**Creative Education Studies** 创新教育研究, 2025, 13(12), 328-334
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2025.1312966

# 初中数学习题的“变式教学”研究

**周立平**[1]**，唐慧辉**[2]**，吴雪云**[2]

[1]湖南科技学院理学院，湖南 永州
[2]永州市第一中学，湖南 永州

收稿日期：2025年10月18日；录用日期：2025年12月2日；发布日期：2025年12月12日

## 摘 要

初中数学习题的变式教学在解题教学中有着重要作用，但也应该遵循一些相应的原则。通过分析，我们发现初中习题的变式教学以变条件的变式、变结论的变式、变解题过程的变式为基本类型。教师在掌握数学解题教学常用的变式策略的同时，学会运用条件特殊化、条件一般化、改变背景、联系实际以及变换条件和结论等方法指导教学。同时，在教学的过程中还应注意变式要适时、变式要适度、变式要注意纵向联系、变式要适量等问题，为以后的教育教学做好基础。

## 关键词

初中数学，解题教学，变式练习，一题多变

# A Study of “Variation-Based Teaching” in Junior Middle-School Mathematics Exercises

**Liping Zhou**[1]**, Huihui Tang**[2]**, Xueyun Wu**[2]

[1]College of Science, Hunan University of Science and Engineering, Yongzhou Hunan
[2]Yongzhou No. 1 High School of Hunan, Yongzhou Hunan

Received: October 18, 2025; accepted: December 2, 2025; published: December 12, 2025

## Abstract

**Variation-based teaching of mathematics exercises plays a vital role in junior-middle-school problem-solving instruction, yet it must be guided by clearly defined principles. Analysis shows that such teaching rests on three fundamental types of variation: varying the conditions, varying the conclusions, and varying the solution process. Teachers should therefore master the variation strategies commonly used in mathematics instruction—such as specializing or generalizing the given conditions, altering the problem context, linking the task to real-life situations, and interchanging the**

文章引用: 周立平, 唐慧辉, 吴雪云. 初中数学习题的“变式教学”研究[J]. 创新教育研究, 2025, 13(12): 328-334.
DOI: 10.12677/ces.2025.1312966

conditions and conclusions—so as to guide their classroom practice effectively. At the same time, care must be taken to ensure that variations are introduced at the right moment, to the right degree, in the right amount, and with due attention to vertical coherence across the curriculum, thereby laying a solid foundation for future teaching and learning.

## Keywords

**Junior-Middle-School Mathematics, Problem-Solving Instruction, Variation Practice, One Problem Multiple Changes**



## 1. 引言

随着《全日制义务教育数学课程标准数学课程标准(2022 年版)》的发布，学生的数学核心素养定位为“三会”：会用数学的眼光观察现实世界、会用数学的思维思考现实世界、会用数学的语言表达现实世界[1]。这就要求学生不能只是“学”数学，而是能“用”数学，更关键的是创新意识的培养。为此，教师应积极探索更高效的教学策略与方法，推动课堂从注重机械训练向发展思维能力的模式转变。如何在有限的教学时间内，既帮助学生扎实掌握知识，又有效提升其学习主动性与探索创新意识，是当前数学教学改革面临的重要课题。将变式教学模式系统应用于数学习题课教学，为应对这一挑战提供了可行路径[2]。本文在梳理数学变式教学常用策略的基础上，结合具体教学案例，系统阐述初中数学习题变式教学的实施方法。

## 2. 数学变式教学与初中数学习题课

所谓数学变式教学，是指在教学过程中教师有策略地对数学概念、性质、定理及问题等进行多维度、多层次的变换，即改变其外在条件或表达形式，但保持其核心内涵不变的一种教学方法[1]。

该教学方法植根于“变异理论”(Variation Theory)，该理论强调，学习源于对事物关键特征在不同维度上的辨识，只有通过系统、有结构的变化，学生才能逐步识别哪些特征是本质的、哪些是非本质的[2]。从认知科学角度看，变式教学通过构建具有系统性差异的样例序列，有助于降低外在认知负荷，促进图式构建与迁移，从而提升学生的数学思维品质与问题解决能力[3]。借助这一方法，通过对数学问题的多视角、多维度的分析与探讨，构建系统的变式探究体系，展现数学知识的形成、演进与实际应用路径，进而引导学生从变化的表象中把握不变的数学本质，并在不变的本质中探索变化的规律，达到知识的融会贯通。

作为连接知识、技能与思想方法的重要纽带，例题与习题教学不仅承担着巩固基础、传授方法、揭示规律的任务，更有助于启发思维、激励创新与综合能力的发展。在初中数学习题课中，变式教学常体现为“一题多变”，即围绕一道基本题目，通过改变其条件、结论、情境或结构等方式，衍生出一系列具有逻辑联系的习题。具体而言，变式类型可包括条件变式、结论变式与过程变式等，分别指向题目条件的具体化或一般化、结论的延伸或转化，以及解题策略与思维路径的多样化[4]。通过改变原题的条件、结论或情境，将其转化为新的问题(常称为“变题”)，从而拓展学生的认知广度与思维深度[5]。

然而，学生在学习过程中易受思维定式影响，习惯于套用固定模式，导致思维僵化，这在一定程度

上是过度重复练习可能带来的局限。为此，在教学中应在学生掌握基本解法后，适时引入变式策略，如改变问题条件或结论、转换问题情境等，引导学生进行多方向、多角度、多层次的思考。这有助于深化学生对知识与方法的理解，增强学生思维活力与创新能力，并鼓励他们提出新问题或寻求同一问题的多种解法[6]-[8]。

## 3. 初中数学习题变式教学的设计与实施

初中数学习题变式教学不仅是一种教学方法，更是一种系统化的教学设计理念。它强调在保持数学本质不变的前提下，通过有层次、有导向的题目变化，引导学生构建知识网络、发展数学思维。通过对习题进行有效教学设计和实施，学生不仅能够加深对基本知识与方法的理解，更能在变化中识别不变规律，把握数学问题的结构特征与通性通法，实现从“解题”到“思维”的跨越，达成举一反三、触类旁通的学习效果。本节将从变式的基本类型与具体设计技巧两个维度，系统阐述如何在初中数学习题课中有效设计与实施变式教学。

### 3.1. 变式教学的基本类型

在初中数学习题课中，常见的例题、习题变式类型主要包括一题多问、一题多解(证)、一题多变以及多题归一(一法多用)等基本形式[9]。它们从不同角度促进学生认知发展与思维深化。

#### 3.1.1. 一题多问变式

所谓一题多问即是通过设计具有层次性与引导性的问题链，驱动学生主动参与课堂，不仅能有效提升其学习积极性与探究热情，更有助于提升其创造性思维能力。采用一题多问的教学有助于拓展学生的发散思维，提升其思维的灵活性。例如，问：直线 $y=-3x+6$ 通过哪几个象限？

解完此题后，教师可以紧接着采取一题多问方式，提出如下系列问题：

① $y=-3x+6$ 不过哪一象限？

② $y=-3x+6$ 中 $y$ 随 $x$ 减少而怎样变化？

③ 求 $y=-3x+6$ 与 $x$ 轴、$y$ 轴交点 $A$、$B$ 坐标；

④ 求 $AB$ 的距离；

⑤ 求 $\Delta AOB$ 的面积；

⑥ 求原点 $O$ 到 $AB$ 的距离。

#### 3.1.2. 一题多解(证)变式

所谓一题多解(证)变式，就是引导学生对同一数学问题探寻多种解法，以训练其发散思维与创新素养，并透过对比与归纳方法培养学生整合所学知识，从不同角度构建解题路径的能力。在此过程中，不仅能锤炼学生观察、联想与知识迁移能力，更有助于他们深化对数学思想方法的理解，从而全面提升数学思维能力。

例如：某一天，小芳与小玲同时从家里出发去学校，速度分别为 3 km/h，4 km/h。小玲家离学校 2.5 km，小芳家在小玲上学的路上，离小玲家 0.7 km。你能预测谁先到达学校吗？

方法一、我们可以用算术法分别算出小芳与小玲去学校的时间，然后比较。

小芳去学校的时间：$\left(2.5-0.7\right)\div 3=0.6$ h。

小玲去学校的时间：$2.5\div 4=0.625$ h。因为 $0.6<0.625$，所以小芳先到学校。

方法二、我们可以用一次函数的相关知识列出函数关系式。其中，这里又可从两个角度考虑。

设小芳、小玲离小玲家的距离为 $y$ km，小芳与小玲行走时间分别为 $t_1$ h、$t_2$ h，则

(1) 考虑两人离小玲家的距离，则可得到小芳、小玲离小玲家距离分别为

$$y = 3t_1 + 0.7, \quad y = 4t_2, \quad (t_1, t_2 \geq 0).$$

令 $y = 2.5$，解得 $t_1 = 0.6$，$t_2 = 0.625$，因为 $t_1 < t_2$，所以小芳先到学校。

(2) 考虑两人离学校的距离，则可得到小芳、小玲离学校距离分别为

$$y = 2.5 - 0.7 - 3t_1, \quad y = 2.5 - 4t_2, \quad (t_1, t_2 \geq 0).$$

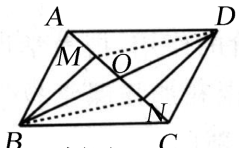
令 $y = 0$，解得 $t_1 = 0.6$，$t_2 = 0.625$，因为 $t_1 < t_2$，所以小芳先到学校。

### 3.1.3. 一题多变变式

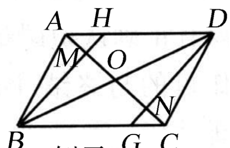
所谓一题多变，是指在数学教学中，以一道题为基点，通过改变、分解或拓展其条件、结论、图形等构成要素，衍生出具有内在联系的题组，旨在引导学生融会贯通，实现从“解一题”到“会一类”的飞跃，从而有效培养学生的创新思维和探索精神。该变式的主要方式有：要素变式：即对原题的条件或结论进行弱化、强化、增删或开放化处理；逆向与构造变式：包括转换思维方向探讨逆命题，或对图形、情境进行类比与拓展；深度变式：将原题进行分解、延伸或综合，以探究其更深层的一般规律或广泛联系。

以如下几何题为例：

如例子 1，在平行四边形 $ABCD$ 中，两对角线 $AC$，$BD$ 交于点 $O$，$M$、$N$ 分别是 $OA$、$OC$ 的中点，求证：$BM$ 与 $DN$ 平行且相等。



例子1



例子2

证明：$\because$ $AC$ 与 $BD$ 为平行四边形的对角线

$\therefore$ $AO = CO$，$BO = DO$ (平行四边形的对角线互相平分)

$\therefore$ $OM = ON$ (由题意可知)

又 $\because$ 在 $\Delta BOM$ 与 $\Delta DON$ 中，$\angle BOM = \angle DON$ (对顶角相等)

$\therefore$ $\Delta BOM \cong \Delta DON(SAS)$

$\therefore$ $BM = DN$ (全等三角形的对应边相等)

$\angle MBO = \angle NDO$ (全等三角形的对应角相等)

$\therefore$ $BM // DN$ (内错角相等，两直线平行)

$\therefore$ $BM$ 与 $DN$ 平行且相等

如果对此题的结论进行联想，可以得到如下的变题：

变题 1：如例子 1，求证：四边形 $BMDN$ 是平行四边形。

这个问题中是将原题的结论进行了递进型变式，只要能将第一题做出来，利用所证明出来的结论就可以直接做出这道题，证明过程如下：

证明：在四边形 $BMDN$ 中，

$\because$ $BM$ 与 $DN$ 平行且相等(已证)

$\therefore$ 四边形 $BMDN$ 是平行四边形(一组对边平行且相等的四边形是平行四边形)

变题 2：如例子 2，延长 $BM$、$DN$ 分别与 $AD$、$BC$ 交于 $H$、$G$。

求证：四边形 $BHDG$ 是平行四边形。

证明：在四边形 $BMDN$ 中，

$\because$ $BM$ 与 $DN$ 平行且相等(已证)

$\therefore$ $BM$ 与 $DN$ 的延长线 $BH$ 与 $DG$ 平行

又$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形

$\therefore$ $AD$ 与 $BC$ 平行且相等

则 $BG$ 与 $DH$ 也平行

故四边形 $BHDG$ 是平行四边形(两组对边平行的四边形是平行四边形)

变题 3：如图 2，求证：$S_{\Delta AMH}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABM}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABH}=\frac{1}{9}S_{\Delta BMC}=\frac{1}{12}S_{\Delta ABD}$。

证明：由题意可知 $AC=4AM$，过 $M$，$B$ 点分别作高交 $AD$ 于 $E$，$F$ 两点，

$\therefore$ $ME$ 与 $BF$ 平行

$\because$ $AC=4AM$

$\therefore$ $BF=4ME$

则 $S_{\Delta AMH}=\frac{1}{2}AH\cdot ME$

$S_{\Delta AMH}=\frac{1}{2}AH\cdot BF=\frac{1}{2}AH\cdot 4ME$

$\therefore$ $S_{\Delta AMH}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABH}$

则 $S_{\Delta ABM}=S_{\Delta ABH}-S_{\Delta AMH}=3S_{\Delta AMH}$

$\therefore$ $S_{\Delta AMH}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABM}$

又由四边形 $ABCD$ 是平行四边形可得 $AH$ 与 $BC$ 平行，且 $MC=3AC$

$\therefore$ $S_{\Delta AMH}=\frac{1}{9}S_{\Delta BMC}$

$\because$ $AC=4AM$

$\therefore$ $S_{\Delta ABM}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABD}$

$\because$ $S_{\Delta ABM}=3S_{\Delta AMH}$

$\therefore$ $S_{\Delta AMH}=\frac{1}{12}S_{\Delta ABD}$

综上 $S_{\Delta AMH}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABM}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABH}=\frac{1}{9}S_{\Delta BMC}=\frac{1}{12}S_{\Delta ABD}$

#### 3.1.4. 多题归一(一法多用)变式

在数学变式教学中，“多题归一”与“一法多用”本质上是同一教学理念的两种表述，其核心在于通过形式多样的习题，帮助学生识别并掌握其背后的共同数学知识和思想方法。具体表现为两种形式：一是“等价变式”，即保持问题的数学本质不变，仅在不同单元、题型或逻辑表述(如原命题与逆否命题)之间进行形式转换；二是“方法迁移”，指将某一类习题的解题方法或模型，灵活应用于结构相似的另一类习题上。

例如解方程 $x^2-2xy+2y^2+4y+4=0$，此题可变形为 $(x-y)^2+(y+2)^2=0$，再利用“非负数和为零的性质”来解即可。此题的求解即是把握这一特征，诱导学生思维正迁移，顺利的得以求解。同理亦可求解以下变式习题：

① $x^2+y^2+6x-8y+25=0$，求 $x$ 和 $y$ 的值；

② 已知 $a^2+b^2+2b-1=0$，求 $a^{1997}+b^{1998}$ 的值；

③ 已知$\left|x-y+3\right|+\left|x+2y-1\right|=0$，求$x$和$y$的值；

④ 若$a$、$b$、$c$为三角形三条边，且$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$，求证：此三角形为等边三角形，

不论是一题多问变式、一题多解(证)变式、一题多变变式还是多题归一(一法多用)变式在我们初中数学习题的教学中都起着非常重要的作用。变式教学是数学的灵活美、智慧美的很好体现。

### 3.2. 初中数学习题变式教学的方法

用来进行变式教学的习题，要具有针对性、基础性、灵活性和可变性等特征，能用基本知识、基本方法加以解决，可以进行习题变式。本文以下题为例，谈谈习题变式教学的方法。

习题：求一元二次方程$ax^2+bx+c=0\left(a\neq 0\right)$。

#### 3.2.1. 条件特殊化

条件特殊化是指将原题中具有一般性的条件或结论，改为具体对象的条件，使题目具有针对性。例如，将原题改为

变式 1：求$x^2-4=0$，将方程移项得$x^2=4$，直接开平方解得$x=\pm 2$。

#### 3.2.2. 条件一般化

条件一般化是指将原题中特殊条件，改为具有普遍性的条件，使题目具有一般性。例如，将原题改为

变式 2：求$x^2-2x=0$，提出公因式法$x\left(x-2\right)=0$，解得$x=0$或$x=2$。

变式 3：求$x^2-2x+1=0$，用配方法$\left(x-1\right)^2=0$，解得$x=1$。

变式 4：求$x^2+3x+2=0$，用因式分解法得$\left(x+1\right)\left(x+2\right)=0$，解得$x=-1$或$x=-2$。

变式 5：求$x^2+3x-2=0$，先算出$\Delta=17$，用公式法，解得$x=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$或$x=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$。

该变式符合由特殊到一般的认识规律，慢慢加深学习内容，具有层次感，学生容易接受并理解。

#### 3.2.3. 转换条件与结论

转换条件与结论是指保持问题涉及的知识点不变，通过将问题的条件与结论进行互换或重构，从而深化对知识点的理解。在教学过程中，这种变式形式能有效激发学生的探求欲望，从而培养其逆向思维与创新能力。例如，

变式 6：已知$x^2+bx+c=0$有两个实数解$x_1$与$x_2$，且$x_1+x_2=8$，$x_1x_2=7$，求$b$、$c$的值。

#### 3.2.4. 联系实际

联系实际要求将抽象的数学问题转化为学生熟悉的生活问题，这需要教师具备扎实的生活积累与自觉的教学应用意识。在对习题进行变式时，教师需通过创设真实的应用情境，激发并指导学生进行有效联想，以此提升他们用数学知识解决实际问题的能力，提高他们学习数学兴趣和数学的应用意识。例如：

变式 7：张大哥从市场上买回一块矩形铁皮，他将此矩形的四个角各剪去一个边长为 1 米的正方形后，剩下的部分刚好围成一个容积为 15 立方米的无盖长方体箱子，且此长方体箱子的底面长方形的长比宽多 2 米，现已知购买这种铁皮每平方米要 20 元，问张大叔共花了多少钱？解答过程如下：

解：设这种箱子底部宽为$x$米，则长为$x+2$米。

依题意得$x\left(x+2\right)\times 1=15$。

解得$x_1=-5$ (舍)，$x_2=3$。

所以这种箱子的底部长为 5 米、宽为 3 米。

由长方体展开图知，要购买矩形铁皮的面积为$\left(5+2\right)\times\left(3+2\right)=35$ (平方米)。

所以做这样的箱子要花 $35\times20=700$ (元)钱。

#### 3.2.5. 变换条件和结论

变换条件和结论是将原题的条件和结论都进行变动和加深，但不能离开“源题”的知识范围。这种变式习题要根据学生的学情实际和授课类型而定。例如，

变式 8：已知关于 $x$ 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0\left(a\neq0\right)$ 有两个相等的实数根，求 $\dfrac{ab^2}{\left(a-2\right)^2+b^2-4}$ 的值。

解：由题意知 $\Delta=b^2-4ac=0$，即 $b^2=4ac$；

因为 $c=1$，所以 $b^2=4a$，

$$\frac{ab^2}{\left(a-2\right)^2+b^2-4}=\frac{ab^2}{\left(a-2\right)^2+4a-4}=\frac{4a^2}{a^2}=4.$$

注意：本题考查了分式的性质和一元二次方程的判别式的综合应用，在进行分式化简时，分子、分母能因式分解的务必要先进行因式分解。

## 4. 结束语

本文在介绍变式教学在初中数学解题教学的价值以及应遵循的原则上，主要对初中数学变式训练的几种主要类型，初中数学习题变式教学的策略、方法以及变式教学在数学解题教学中应注意的问题做出了详细的分析。实践证明，变式教学不仅在数学学习上有重要作用，而且在其他科目的学习中也至关重要。因此变式教学要从实践出发，使学生从“变”的现象中领悟“不变”的法则，再以“不变”的法则探索“变”的规律。如此培养学生的思维能力，使学生在学习上一次次进步，以达到教学的最佳效果。


## 基金项目

湖南省教育厅教学改革研究项目(HNJG-20231108, 202502001372)，湖南科技学院教学改革研究重点项目(XKYJ2025003)，湖南科技学院学位与研究生教育教学改革研究项目(XKYJGYB2306)，湖南科技学院校级课程思政示范课程(湘科院教发[2024]21 号)。


## 参考文献


[1] 中华人民共和国教育部. 全日制义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.

[2] Marton, F. and Booth, S. (1997) Learning and Awareness. Lawrence Erlbaum Associates.

[3] Sweller, J. (1994) Cognitive Load Theory: Learning difficulty and Instructional Design. *Learning and Instruction*, **4**, 295-312.

[4] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009.

[5] 黄静. 基于“六何”认知模型的初中数学变式教学策略研究[D]: [硕士学位论文]. 南宁: 广西师范大学, 2022.

[6] 童杰鹏. 以“变”促“思”: 初中数学变式教学实践[J]. 数学学习与研究, 2025(24): 62-65.

[7] 郭伟. 源流致用: 数学变式教学的基因源流与实践突破[J]. 中小学班主任, 2025(14): 19-22.

[8] 陈群. 以“变”促“思”: 初中数学变式教学实践探索[J]. 中学数学, 2025(2): 45-47.

[9] 唐杰. “以变应变”——浅谈中学数学变式教学[J]. 中学教学参考, 2010(16): 74-75.