Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(1), 152-158
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.141020

Hans汉斯

一道高考数学题目的多种解法与思考

——以2025年全国新课标II卷第16题为例

靳旭华*，关晋瑞

太原师范学院数学与统计学院，山西 晋中

收稿日期：2025年11月14日；录用日期：2026年1月6日；发布日期：2026年1月16日

摘 要

圆锥曲线问题作为历年高考数学试卷中的一个重点与难点，主要考查学生对知识的灵活性、创新性应用。以2025年高考数学新课标二卷第16题为例，从不同思维视角切入来分析解决问题，并归纳思考解法中的共性思维，实现从“一题多解”到“多解归一”，给予一线数学教师习题教学的策略建议：立足单元教学，培养学生对知识的综合应用能力；聚焦解法本质，提升学生的数学思维与解题素养。帮助学生分析解法的逻辑起点与核心思路，实现从“盲目机械解题”到“真正学习”的转变。

关键词

高中数学，圆锥曲线，一题多解，习题教学

Multiple Solutions and Reflections on a College Entrance Examination Mathematics Problem

—Taking Question 16 of the 2025 National New Curriculum Standard Volume II as an Example

Xuhua Jin*, Jinrui Guan

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: November 14, 2025; accepted: January 6, 2026; published: January 16, 2026

Abstract

Conic section problems, as a key and difficult topic in the mathematics papers of the National College

*通讯作者。

文章引用: 靳旭华, 关晋瑞. 一道高考数学题目的多种解法与思考[J]. 创新教育研究, 2026, 14(1): 152-158.
DOI: 10.12677/ces.2026.141020

Entrance Examination over the years, mainly examine students' flexible and innovative application of knowledge. Taking Question 16 of the 2025 college entrance exam Mathematics National New Curriculum Standard Volume II as an example, this paper analyzes and solves the problem from different thinking perspectives, and summarizes the common thinking in the solution methods. It realizes the transformation from "multiple solutions to one problem" to "integrating multiple solutions into one core logic", and provides strategic suggestions for front-line mathematics teachers in exercise teaching: basing on unit teaching to cultivate students' comprehensive application ability of knowledge; focusing on the essence of solutions to improve students' mathematical thinking and problem-solving literacy. This helps students analyze the logical starting point and core ideas of solutions, and achieves the transformation from "blind and mechanical problem-solving" to "genuine learning".

Keywords

Senior High School Mathematics, Conic Sections, Multiple Solutions to One Problem, Exercise Teaching

1. 引言

圆锥曲线问题往往可以很好交汇并融合平面几何与平面向量、函数与方程等相关知识，非常契合高考数学试卷“在知识交汇点处”的命题指导思想。同时又是多种思维方式切入与应用的基地，是数学命题与创新应用的一个重要场景，一直是各类模拟考试与高考试卷中的热点问题之一[1]。圆锥曲线作为平面解析几何“大单元”中的主要内容，各小节间的知识共性、联结性较为紧密，对学生思维的灵活性、发散性提升有重要意义。学生可综合运用几何方法与代数法，从不同角度作为解题切入点，灵活研究各曲线间的基本关系，重点提升学生的直观想象、数学运算、数学建模、逻辑推理和数学建模素养。

在高中数学教学与学习过程中，“一题多解”不仅是一种解题技巧，更是一种重要的思维方式。借助“一题多解”，要求学生在面对一个问题时，能够从不同的角度，运用不同的知识和方法去思考和解答，这不仅有助于提高学生的解题能力，拓展数学知识内容与思想方法，还能促进学生的思维发展和创新能力的提升，是数学解题学习中一个非常重要的手段与应用[2]。一题多解在解决圆锥曲线问题时，引导学生运用传统几何法锻炼逻辑推理思维；用面积法将几何图形关系转化为代数等式，既锻炼了转化思维，又提升了直观想象与数学运算素养；坐标法是逻辑推理思维从“隐性运用”到“显性强化”的过程，既锻炼了演绎推理的严谨性，又提升了归纳推理的概括性，而这正是逻辑推理素养的核心要求。一题多解让学生从单一思维模式转向多角度、系统性的思维方式。基于此对 2025 年高考数学新课标二卷第 16 题重点展开研究，以期优化一线数学教师解题教学过程的育人价值与策略应用。

2. 问题与求解

2.1. 问题陈述

如图 1，椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4，

1) 求 C 的方程；

2) 过点 $\left(0,-2\right)$ 的直线 l 与 C 交于 A、B 两点，O 为坐标原点，若 $S_{\triangle OAB}=\sqrt{2}$，求 $\left|AB\right|$。

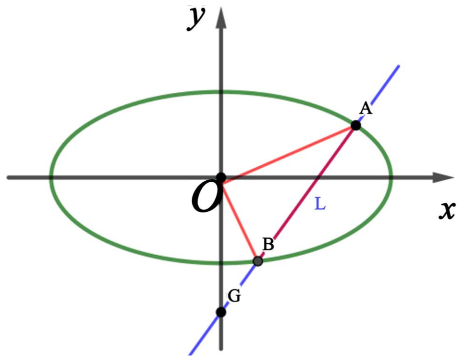

Figure 1. Question 16 in the 2025 national examination paper (New Curriculum Standard Volume II)
图 1. 2025 年全国新课标 II 卷第 16 题

2.2. 求椭圆方程

解题思路：椭圆作为圆锥曲线的重要类型，题目中已经给出其标准方程，a、b、c（半焦距，满足 $c^2=a^2-b^2$）是关键参数。长轴长、离心率分别与 a、$e=\frac{c}{a}$ 直接关联，已知长轴长和离心率，可按“长轴长求 $a\to$ 离心率求 $c\to a$、c 求 b”的逻辑，逐步确定椭圆方程。这是椭圆标准方程求解的基础流程，核心是利用椭圆参数间的内在关系，将已知条件转化为方程所需参数。

解题方法过程：

$$\because 2a=4$$
$$\therefore a=2$$
$$\text{又}\because e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},c^2=a^2-b^2$$
$$\therefore b^2=2$$
$$\therefore \text{椭圆}C\text{的方程为}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$$

2.3. 求 $|AB|$ 的值

已知过点 $(0,2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A、B 两点，O 为坐标原点，且 $S_{\Delta OAB}=\sqrt{2}$。直线与椭圆相交问题，需联立方程，借助韦达定理、弦长公式、面积公式等工具求解，以下是本题的四种解法。

2.3.1. 解法一：弦长公式结合面积公式

解题思路及分析：直线与椭圆相交求解弦长时，常规思路为遵循“直线与圆锥曲线方程联立→韦达定理→弦长与距离计算→利用面积列方程→求解弦长”的流程。首先考虑联立方程得到一元二次方程，然后通过韦达定理可获取两交点横坐标 x_1x_2 的和与积，进而结合弦长公式计算弦长 $|AB|$。同时，利用点到直线距离公式求出原点到直线的距离 d，再结合三角形面积公式 $S=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|$ 建立关于直线斜率 k 的方程，解出 k 后回代弦长公式，最终求得 $|AB|$。

该思路着重强化数学运算素养，培养学生逻辑推理素养中的演绎推理能力，还可以促进直观想象素养发展，提升学生数形转化的思维品质。适用于具备基础解析几何思维的大部分学生，他们已熟练掌握椭圆标准方程、弦长公式、点到直线距离公式等基础知识点，能完成常规代数运算，但对于复杂图形转化或技巧性解法尚不熟悉。该方法步骤固定、逻辑清晰，是解决椭圆弦长问题的基础方法，能帮助学生

夯实解析几何的解题基础，建立“代数解几何”的基本思维框架。

解题方法过程：

1) 设直线方程并联立椭圆方程

因直线过点$(0,-2)$且斜率存在(若斜率不存在，直线与椭圆交点情况易判断，本题不满足面积条件，故设斜率为k)，设直线l的方程为$y=kx-2$，设$(x_1y_1),B(x_2y_2)$。将$y=kx-2$代入椭圆方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，展开并整理。

2) 利用韦达定理表示根与系数关系

对于一元二次方程$ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$，韦达定理指出$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$。在方程$(2k^2+1)x^2-8kx+4=0$中，$a=2k^2+1$，$b=-8k$，$c=4$，因此：$x_1+x_2=\frac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4}{2k^2+1}$。

3) 计算弦长$|AB|$

弦长公式为$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$，其中$|x_1-x_2|$可由$\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$计算，所以$|x_1-x_2|=\frac{4\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1}$(由判别式$\Delta=64k^2-16(2k^2+1)>0$)，解得$k^2>\frac{1}{2}$，保证根号内非负)。则弦长$|AB|=\sqrt{1+k^2}\frac{4\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1}$。

4) 计算原点到直线的距离d

根据点(x_0,y_0)到直线$Ax+By+C=0$ (一般式)的距离公式$d=\frac{Ax_0+By_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}$，将直线$l$的方程$y=kx-2$化为一般式$kx-y-2=0$，原点$O(0,0)$到直线的距离$d=\frac{|0-0-2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2}{\sqrt{k^2+1}}$。

5) 利用面积公式求k^2

已知$S_{\Delta OAB}=\sqrt{2}$，根据三角形面积公式$S=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|$，代入$d$和$|AB|$的表达式，两边同时乘以$2k^2+1$得：$\sqrt{2}(2k^2+1)=4\sqrt{2k^2-1}$。两边同时消去根号，令$t=k^2$，方程变为$4t^2-12t+9=0$，因式分解得$(2t-3)^2=0$，解得$t=\frac{3}{2}$，即$k^2=\frac{3}{2}$。

6) 计算$|AB|$

将$k^2=\frac{3}{2}$代入弦长公式$|AB|=\sqrt{1+k^2}\frac{4\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1}$可得$|AB|=\sqrt{5}$。

2.3.2. 解法二：利用三角形面积与弦长的关系(纵坐标差)

解题思路及分析：三角形面积除了用底乘高计算，还可借助向量思想，利用坐标表达式的转化，更直接地建立起面积与弦长的联系。以$\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$表示(对应平行四边形面积的一半)。结合直线方程$y=kx-2$，将$y_1$、$y_2$用$x_1$、$x_2$和$k$表示，代入面积公式后化简，可转化为仅关于$x_1$、$x_2$的表达式。再利用韦达定理将其与$k$关联，求出$k$后，结合弦长公式或直接通过横坐标差与斜率的关系计算$|AB|$。

该思路可以强化学生的直观想象素养，培养数学运算的灵活性，还能深化学生的逻辑推理素养。适用于具备初步灵活解题思维的中上等水平学生，这类学生不仅掌握基础公式，还能主动思考不同量之间的隐藏关系，不再局限于固定步骤。他们能通过观察图形中三角形的位置特征，联想到纵坐标差与高的对应关系，进而选择更简便的运算路径，该方法可进一步提升其解题的灵活性与技巧性。

解题方法过程：

1) 表示 $S_{\Delta OAB}$ 为纵坐标差形式

由三角形面积的向量积的向量表示 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|x_1y_2-x_2y_1\right|$，将直线方程 $y=kx-2$ 中 $y_1=kx_1-2$，$y_2=kx_2-2$ 代入。

2) 结合韦达定理与面积条件求 k^2

已知 $S_{\Delta OAB}=\sqrt{2}$，所以 $\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{2}$。根据韦达定理，$\left|x_2-x_1\right|=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}$，将 $x_1+x_2=\frac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4}{2k^2+1}$ 代入得：$\sqrt{\left(\frac{8k}{2k^2+1}\right)^2-4\times\frac{4}{2k^2+1}}=\sqrt{2}$。后续计算与解法一相同，通过平方、整理方程，解得 $k^2=\frac{3}{2}$。

3) 计算 $\left|AB\right|$

因为 $\left|AB\right|=\sqrt{1+k^2}\cdot\left|x_1-x_2\right|$，已知 $\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{2}$，$k^2=\frac{3}{2}$，则 $1+k^2=\frac{5}{2}$，$\sqrt{1+k^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$。所以 $\left|AB\right|=\frac{\sqrt{10}}{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$ (也可利用直线斜率与弦长的关系，直接由横坐标差结合斜率系数计算，本质与弦长公式一致)。

2.3.3. 解法三：利用直线与轴交点及面积公式

解题思路及分析：从直线与坐标轴交点切入，拓展面积计算视角，借助坐标转化建立面积与弦长联立。当直线斜率不为 0 时，直线与 x 轴存在交点，可将 ΔOAB 的面积转化为以该交点到原点的距离为底，A、B 纵坐标差的绝对值为高的三角形面积。先求出直线与 x 轴交点坐标，再结合韦达定理，把纵坐标差转化为横坐标的表达式，代入面积公式求解直线斜率 k，最后依据弦长公式算出 $\left|AB\right|$。

该思路中对“坐标系思想”的运用，可以锻炼学生直观想象素养，强化逻辑推理素养中的合情推理能力，培养学生思维的适应性，同时能巩固数学运算素养，增强学生运算的针对性。适用于中等偏上水平、具备一定图形分析能力的学生，他们能快速识别直线与坐标轴的特殊交点，并能将该特殊条件转化为解题突破口，不再依赖通用公式的机械套用。该方法需要学生跳出“通用弦长解法”的固定思维，通过特殊交点的特征优化解题过程，能帮助其逐步形成“抓特殊条件、简化解题步骤”的思维模式。

解题方法过程：

1) 求直线与 x 轴交点坐标

直线 l 的方程为 $y=kx-2$ ($k\neq0$，若 $k=0$，直线与椭圆交点情况不满足面积条件)，令 $y=0$，则 $kx-2=0$，解得 $x=\frac{2}{k}$，所以直线与 x 轴交点坐标为 $\left(\frac{2}{k},0\right)$。

2) 表示 $S_{\Delta OAB}$ 为以 x 轴交点为底的面积

ΔOAB 面积可表示为 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times\left|\frac{2}{k}\right|\times\left|y_1-y_2\right|$。这里，$\left|\frac{2}{k}\right|$ 是 x 轴交点到原点的距离(作为底)，$\left|y_1-y_2\right|$ 是 A、B 纵坐标差的绝对值(作为高)。由直线方程 $y=kx-2$，可得 $y_1=kx_1-2$，$y_2=kx_2-2$，那么 $\left|y_1-y_2\right|=\left|kx_1-2-\left(kx_2-2\right)\right|=\left|k\left(x_1-x_2\right)\right|=\left|k\right|\left|x_1-x_2\right|$。

3) 结合韦达定理与面积条件求 k^2

已知 $S_{\Delta OAB}=\sqrt{2}$，所以 $\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{2}$。根据韦达定理，同解法二。后续计算同解法一，解得 $k^2=\frac{3}{2}$。

4) 计算 $\left|AB\right|$

同解法二的(3)。

2.3.4. 解法四：利用点 G 拆分三角形面积

解题思路及分析：观察到直线过点 $(0,-2)$，设该点为 $G(0,-2)$。将 ΔOAB 的面积“化整为零”根据 A、B 位置拆分为 ΔOAG 与 ΔOBG 的面积差(或和)。利用三角形面积公式，结合 G 点坐标与 A、B 横坐标的关系，将面积转化为与 $|x_1-x_2|$ 相关的表达式，再结合韦达定理求出 k，进而求得弦长 $|AB|$。

该思路中“几何割补思想”，通过拆分图形、建立面积关系，需要学生自主推导，且拆分方式不唯一，能培养学生思维的发散性与创新性。拆分后的简化运算，可以提升数学运算素养中运算策略选择的思维能力。适用于具备高阶解析几何思维的优秀学生，他们不仅熟练掌握各类公式与定理，还能从整体到局部分析图形结构，具备较强的逻辑推理与创新思维能力。该方法无固定拆分模式，需要学生根据题目条件灵活选择特定点和拆分方式，能充分锻炼其思维的灵活性与深刻性，助力学生形成“化繁为简”的解题思维，应对综合性较强的椭圆弦长难题。

解题方法过程：

1) 设定点 G 并拆分面积

设 $G(0,-2)$，因为 A、B 在直线 l 上，所以 ΔOAB 的面积可表示为 $S_{\Delta OAB}=S_{\Delta OAG}S_{\Delta OBG}$ (假设 $x_1>x_2$，保证面积为正)。根据三角形面积公式，$S_{\Delta OAG}=\frac{1}{2}\times|OG|\times|x_2|$，其中 $|OG|=2$ (O 到 G 的距离)。所以 $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\times 2\times|x_1|-\frac{1}{2}\times 2\times|x_2|=|x_1-x_2|$。又因为 x_1、x_2 是直线与椭圆交点的横坐标，结合韦达定理中 $x_1+x_2=\frac{8k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{4}{2k^2+1}>0$ (两根同号)，所以 $|x_1|-|x_2|=|x_1-x_2|$。

2) 结合韦达定理与面积条件求 k^2

同解法三中的(3)。

3) 计算 $|AB|$

由弦长公式 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot|x_1-x_2|$，代入 $|x_1-x_2|=\sqrt{2}$，$k^2=\frac{3}{2}$，可得 $|AB|=\sqrt{1+\frac{3}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$。

3. 方法总结与对比

四种解法的本质和差异见表 1。

Table 1. The common essence and differences of the four solution methods
表 1. 四种解法共同本质与差异

解法类型	核心条件	高的代数化形式	本质逻辑
弦长公式 + 面积公式	无特殊条件	点到直线的距离(通用)	通用代数工具转化几何关系
纵坐标差 + 面积	直线垂直坐标轴	纵坐标差(特殊的坐标)	特殊位置简化高的表达
直线与 x 轴交点 + 面积	直线过 x 轴定点	纵坐标差(共底三角形)	特殊定点驱动面积拆分
特定点拆分面积	三角形含特殊点	坐标差(拆分后简单高)	图形结构 + 特殊定点运用

4. 教学启示

4.1. 立足单元教学，培养学生对知识的综合应用能力

圆锥曲线问题的解决常涉及多方面知识的融合，在实际教学中教师应提高“整体意识”，借助“单元整体设计”教学，课堂上引导学生梳理圆锥曲线性质、直线方程、韦达定理等知识的内在联系，让学

生在具体问题中体会代数运算与几何直观的结合。通过展示不同解法，从常规思考到特殊视角，让学生看到同一问题背后不同知识的应用路径。帮助学生掌握学习数学知识的方法要领，使学生形成较强的迁移能力，举一反三，灵活应用，“学会学习”[3]。利用“大单元教学”的整体性，帮助学生巩固分散的知识点，让他们学会从多角度分析问题，在比较中理解知识的关联性，逐步形成综合运用知识解决复杂问题的能力。

4.2. 聚焦解法本质，提升学生的数学思维与解题素养

解题的价值不在于“多解”，而在于引导学生把握解题的本质[4]。教师在圆锥曲线问题的课堂教学中不宜仅停留在展示多种解法，而应带领学生深入分析每种方法的逻辑起点与核心思路，明确各类解法中的共性思维，让学生意识到无论解法如何变化，其核心都是从不同视角围绕问题中的关键条件与重要关系建立联系。在本题教学中，教师可以通过提问椭圆中弦长的代数表达有哪些形式？(弦长公式、两点间距离公式)这些形式的共性是什么？(引导学生发现：本质是“坐标差的运算转化”)若弦为三角形的一边，三角形面积与弦长的关联是什么？(引导学生得出：面积 = 弦长 × 点到弦的距离 ÷2，核心是“弦长作为底，高作为距离/坐标差”)。让学生建立本质逻辑链，为后续四种方法的推导奠定统一的思维基础。在日常数学解题教学中，可通过对教材例题和习题的推敲，对学生进行针对性变式训练，借助一题多解、一题多变、同解变形、逆向求解等方式训练学生的创新思维，这是强化高考数学解题能力的关键[5]。同时鼓励学生自主尝试不同解法，在实践中积累解题经验，从而不断抽象出不同解法的共同本质。帮助学生提升解题技巧的同时，逐步形成严谨的逻辑推理能力和灵活的思维品质，真正实现从“解题”到“会学”的转变，让解题教学的育人价值落到实处。

5. 结语

综上对 2025 年高考数学新课标二卷第 16 题相关问题求解的各方法进行了总结与对比，通过阐述本题不同解题方法的特点、优势以及对学生能力的不同要求，基于此建议高中数学教师能够立足单元教学培养学生综合应用知识的能力，借助单元整体设计引导学生梳理知识内在联系、体会知识应用路径；并聚焦解法本质提升学生数学思维与解题素养，帮助学生分析解法的逻辑起点与核心思路，通过多种训练方式强化学生解题能力，鼓励学生自主实践以提升解题技巧并实现育人价值。对于本题的研究也印证了其他学者对于“一题多解”可以促进学生思维的发展，培养学生数学核心素养的观点，也启发了高中数学教师能够通过这些探讨助力教学开展，促进学生在圆锥曲线知识学习与解题能力培养等方面不断进步，实现从“解题”到“会学”的转变，助力学生在圆锥曲线学习及解题能力培养上不断提升。

基金项目

太原师范学院 2025 年基础教育专项课题(编号：JCJY05)。

参考文献

[1] 陈叶. 多思维展开, 妙归纳变式——一道离心率问题的破解[J]. 数学之友, 2024(9): 48-51.

[2] 周保珍. 依托“一题多解”策略, 提升解题学习成效[J]. 数学之友, 2024(17): 81-83+86.

[3] 唐彩斌, 孔慰. 落实数学新课标, 教师需要提高“四个意识” [J]. 人民教育, 2022(Z2): 35-37.

[4] 波利亚. 怎样解题——数学教学法的新面貌[M]. 涂泓, 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2002.

[5] 常宁, 潘小峰, 胡典顺. 高考改革背景下数学核心素养测评与课程标准一致性研究——以 2022-2024 年全国新课标 II 卷为例[J]. 数学教育学报, 2025, 34(3): 23-29.