

虚拟三维软件在数学教育中的教学设计实践 ——以vZome为例

龙泽, 杨超*

广东外语外贸大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期: 2026年1月16日; 录用日期: 2026年2月5日; 发布日期: 2026年2月24日

摘要

本文通过在《抽象代数》课程中的一个具体的群论教学案例, 介绍虚拟三维软件vZome在数学与应用数学(师范)专业的主干课程教学中的应用。通过对计算机软件融入课堂教学的教学设计理念的探索和实践, 解决数学师范生培养方案学时紧张与培养目标中对学生数学素养和教学技能的高要求之间的矛盾。

关键词

数学教育, 教学设计, 虚拟三维软件, vZome, 群论

Teaching Design Practice of Virtual 3-Dimensional Software in Mathematical Education

—A Case Study of vZome

Ze Long, Chao Yang*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: January 16, 2026; accepted: February 5, 2026; published: February 24, 2026

Abstract

By a concrete example of teaching case for group theory in the course of "Abstract Algebra", this paper introduces the application of a virtual 3-dimensional software vZome in the teaching of the main courses of Mathematics and Applied Mathematics (Teacher Education) major. Through the

*通讯作者。

exploration and practice of the teaching design concept of integrating computer software into classroom teaching, this paper shows our effort in trying to solve the conflict between the tense class hours of the training program for mathematics students and the high requirements for students' mathematical literacy and teaching skills in the training objectives.

Keywords

Mathematics Education, Teaching Design, Virtual 3-Dimensional Software, vZome, Group Theory

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

当前高校数学与应用数学(师范)专业在培养方案的制定与课程的教学过程中,面临着总学时被挤压和社会对数学师范生的数学素养和教学技能需求不断提高的矛盾。如何在有限的学时条件下,既要保障数学主干课程的开设,又要兼顾到学生教育教学技能的训练,是一个急需解决的问题。最新版的中小学数学课标均强调了注重信息技术与数学教学的融合。《义务教育数学课程标准(2022年版)》提到:“利用数学专用软件等教学工具开展数学实验,将抽象的数学知识直观化,促进学生对数学概念的理解和数学知识的建构”[1]。《普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)》亦有多处强调计算机软件的应用,如在几何与代数主题中,提出帮助学生形成空间观念要“提供丰富的实物模型或利用计算机软件呈现空间几何体”[2]。然而,在传统的大学课堂中,对数学课程的讲授偏重于理论推导,忽略借助数学软件构建对相关数学概念的直观想象。针对这一不足,本文探讨在数学与应用数学(师范)专业的数学主干课程中更多地利用数学软件开展教学,培养学生多用善用数学软件的习惯,以起到潜移默化之功效,同时也摆脱了教育教学技能课时相对缺乏的困境。本文通过在《抽象代数》课程中使用vZome软件辅助“群在集合上的作用”一节教学的实践案例来阐述这一教学方式。

本文结构安排如下。第2节介绍vZome软件的基本情况和使用方法。第3节详细地描述了我们在《抽象代数》教学中使用vZome的一个具体教学设计的案例。第4节是对vZome使用于数学教学的一些展望。

2. vZome 的介绍与使用

工具软件vZome源于对实物三维建模工具Zometool的虚拟,但从某种意义上又超越了Zometool,并在三维建模的便捷性和三维渲染的顺滑度等方面有优于传统的GeoGebra之处。

2.1. Zometool

Zometool是由位于美国科罗拉多州的Zometool公司于1992年开发的一种用于空间几何结构搭建的实物塑料材质的建模工具,可作为数学教学工具使用[3]。它由一种统一规格的小球和若干种不同长度的小棒构成,能快速搭建各种空间几何结构。从2023年起,Zometool由火光摇曳教育科技有限公司(深圳)有限公司在中国代理销售[4]。

2.2. vZome

使用Zometool进行教学成本较高,一个低成本的替代品为虚拟三维软件vZome[5]。有两种方式使

用 vZome, 均为免费的开源软件: 一是下载安装桌面版, 二是使用 vZome 的在线版本 (<https://www.vzome.com/app/>)。图 1 为桌面版 vZome 的程序界面截图。该软件采用“可见即可得”的交互式三维建模方式, 可直观地通过鼠标点击来添加或删除三维构件(小球或小棒), 极易上手。图 1 所示的工作界面呈现了一个由 20 个虚拟小球和 30 个长度相等的虚拟小棒搭建的正十二面体模型。虚拟模型可以用鼠标或触摸屏任意旋转改变视角和放大缩小, 直观地呈现学生不易想象的空间几何图形。虚拟的 vZome 软件具有实物版所不具备的一些额外功能, 如按需改变小棒或小球的颜色, 这对在不同场景下演示不同的数学概念提供了极大的方便。

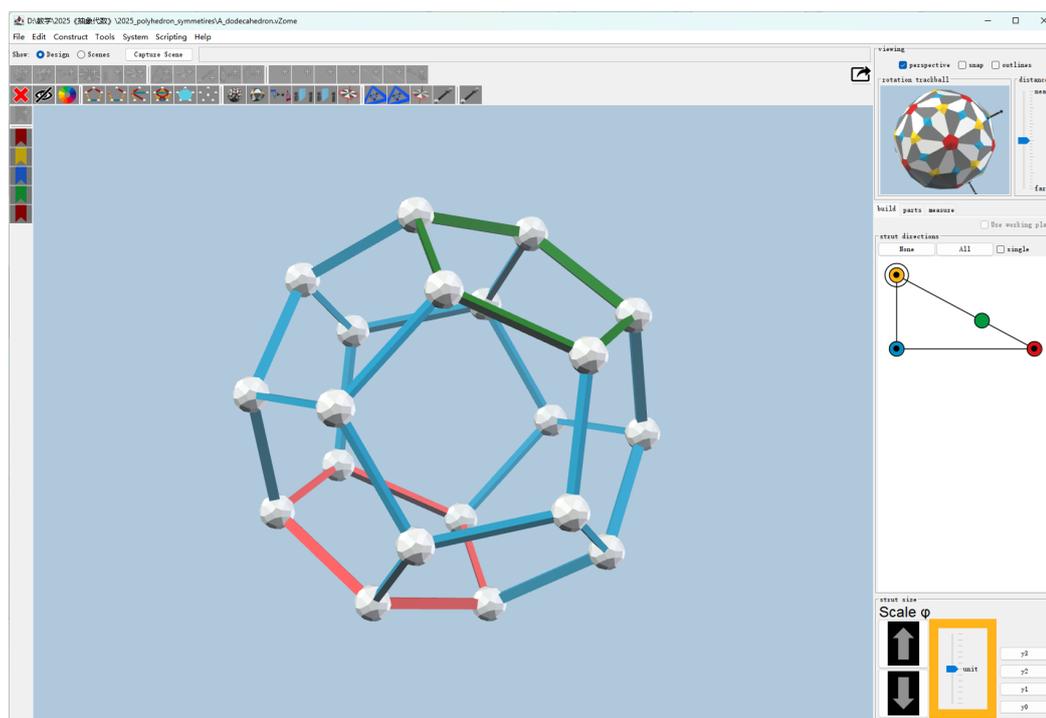


Figure 1. Screenshot of interface of the virtual 3-dimensional modeling software vZome
图 1. 虚拟三维建模软件 vZome 程序界面截图

使用 vZome 创建的各种三维模型可单独保存为文件, 扩展名为.vzome。除了保存为文件之外, 三维模型还可以上传至 GitHub 等共享平台或嵌入网页中, 直接用浏览器打开, 甚至手机浏览器亦可直接加载。因此, 课堂上不必安装专门软件即可演示, 方便快捷, 适用场景广泛。图 1 的 vZome 中的虚拟正十二面体可从网址 https://sokoban2.github.io/vzome-sharing/2025/11/06/A_dodecahedron-12-59-28.html 打开。

2.3. 与 GeoGebra 的对比

GeoGebra 是当前数学教育中使用较为广泛的一款动态数学软件, 在基础数学和高等数学的教学中有广泛的应用[6], 也可以用于构建三维多面体[7]。GeoGebra 的特点是通用性强, 可用于代数、几何等各数学领域。但其对三维几何体的构建较麻烦, 需要输入顶点坐标, 如可用 $Dodecahedron(A,B)$ 命令来创建正十二面体, 其中 A, B 为顶点坐标。同时, GeoGebra 的三维图像渲染略显粗糙, 把棱的直径放大后图像会有明显的不吻合等情况。而 vZome 专注于三维建模的构建, 具有功能更强大和自由度更高的可视化编辑界面, 创建三维模型效率高。并且, vZome 对三维图形的渲染更逼真, 三维视角旋转更流畅丝滑, 可在课堂上让学生更投入地沉浸于三维情景之中, 忘却了外在的软件, 聚焦于纯粹的几何多面体。

3. 抽象代数课程中的教学设计案例

《抽象代数》(又称《近世代数》)课程是数学与应用数学(师范)专业的一门重要的专业主干课程,学生通过课程学习,了解现代数学中具有广泛应用的群、环、域等代数系统的基本概念及性质[8]。《抽象代数》课程内容中“群在集合上的作用”一节用群论的眼光来观察现实世界,是整个课程中最美妙的内容之一。然而,此节内容比较抽象,学生理解有一定困难。因此,我们设计了运用 vZome 来演示正立方体的旋转变换群对正立方体的作用的案例,帮助学生直观地理解群作用这一较为抽象的数学概念。

3.1. 正立方体的旋转变换群

在 3 维空间中把一个正立方体映射到它自身的刚体变换(不考虑镜面反射)的全体在变换的复合运算下构成一个有限的非交换群。在本文中,把该群记为 G 。群 G 有 24 个元素,是 3 维空间中旋转变换群的一个子群。若考虑包含反射在内的从正立方体到其自身的刚体变换的全体,则构成一个 48 阶群。

3.2. 正立方体的旋转变换群对其顶点集的作用

由于空间想象的困难性,对于正方体的旋转变换群 G ,学生不易理解为何 G 的阶是 24。为此,在教学中设计了通过用 vZome 来演示正立方体的旋转变换群对其顶点集的作用这一方法,快速确定群 G 的阶为 24,并让学生直观地体会到群这一工具的威力。设正立方体的 8 个顶点构成的集合为 M ,且令 x 为取定的一个顶点。则由群作用的基本定理(陪集分解的 Lagrange 定理的推论),有

$$|G| = |G_x| \cdot |M_x|, \quad (1)$$

其中, G_x 为 M 中元素 x 的稳定子群, M_x 为 x 在群 G 作用下的轨道。这一群作用可以 vZome 动态演示(见图 2),其中 x 用红色顶点表示, x 在正立方体中的 3 个邻点用绿色表示。此交互式的 vZome 动态演示可在网址 https://sokoban2.github.io/vzome-sharing/2026/01/04/The_Cube-10-41-46.html 中直接打开。

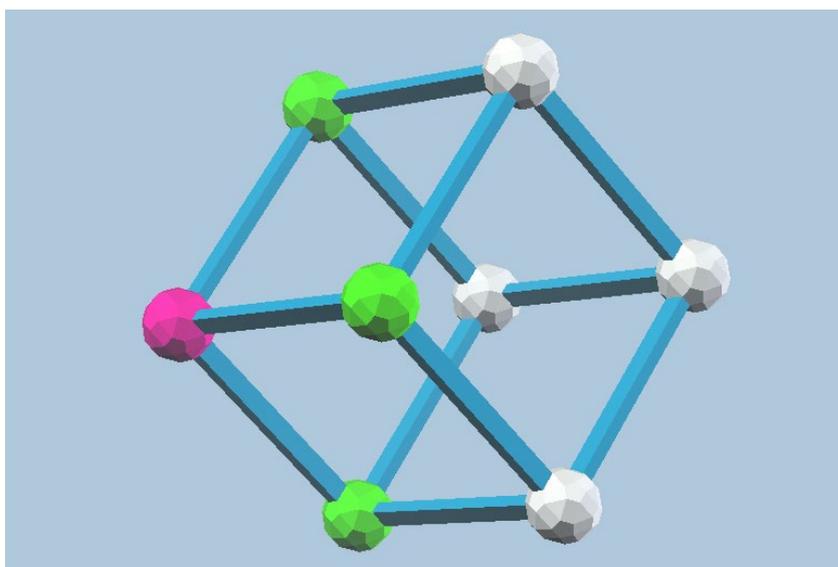


Figure 2. A virtue cube in vZome with some vertices highlighted
图 2. vZome 中的一个虚拟立方体,并用颜色高亮显示关键顶点

通过 vZome 的可视化、交互式演示,学生可以直观地观察到,在红色顶点 x 固定不动的条件下,能把正立方体映射到自身的旋转变换只能是 3 个绿色顶点的轮换。这个刚好对应着一个 3 阶循环群,因此

$|G_x|=3$ 。另一方面, 容易看出在群 G 的作用下, 红色顶点 x 可以变换到其它 7 个点的位置上, 因此 $|M_x|=8$ 。两者结合起来, 由公式(1)即得群 G 的阶为 24。同时, 我们也得到 G 为 8 元对称群 S_8 的一个子群。

类似地, 也可以让学生自行探索群 G 对正立方体的 12 条棱之集或 6 个面之集的作用, 并得出 G 也是对称群 S_{12} 或 S_6 的子群的结论。

3.3. 正立方体的旋转变换群对其对角线集的作用

作为群同构的一个例子, 正立方体的旋转变换群 G 同构于 4 元对称群 S_4 。证明这两个群同构也是一个难点。我们可以借助 vZome 来演示群 G 的作用给出直观证明。首先启发式地引导学生: 我们前面考察了正立方体在 8 个元素的顶点集、12 个元素的棱集和 6 个元素的面集上的作用, 那么正立方体上有什么几何要素刚好有 4 个? 通过启发, 学生想到正立方体刚好有 4 条对角线。设对角线全体之集为 D , 考察群 G 在 D 上的作用。然而, 对角线在群作用下的变换更难以想象, 故制作 vZome 模型如图 3 所示。此 vZome 动态演示亦可在网址 https://sokoban2.github.io/vzome-sharing/2025/11/04/The_CUBE-15-14-34.html 打开。

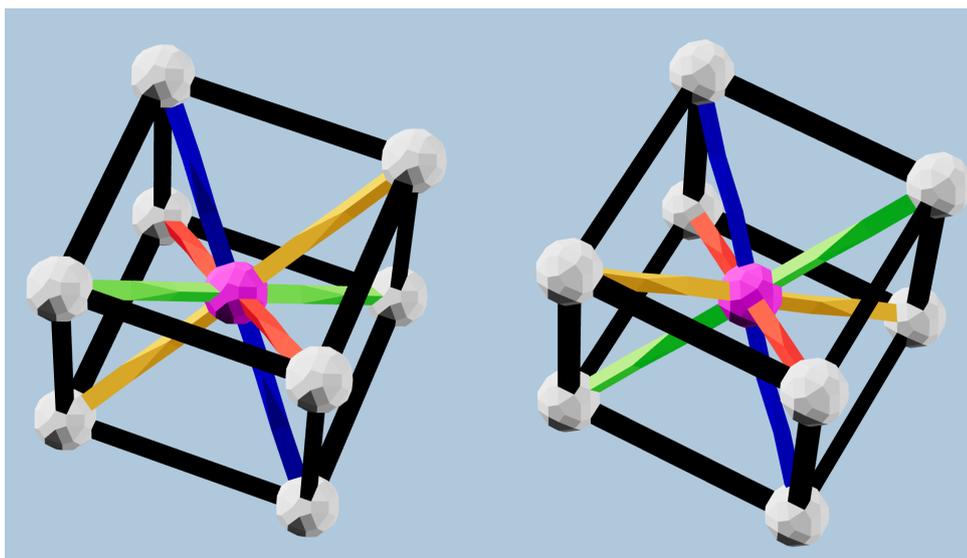


Figure 3. A cube with 4 diagonals in vZome in 2 different orientations
图 3. vZome 中的一个虚拟立方体及其 4 条对角线, 两种旋转朝向

在图 3 中, 用红、黄、蓝和绿 4 种不同的颜色来标记 4 条对角线, 以便清晰地看出群作用后对角线的位置变换。通过在 vZome 上演示, 可观察到图 3 左经过旋转可变换成图 3 右。这一变换, 红色和蓝色两条对角线位置不变, 黄色和绿色两条对角线互换了位置, 即是对角线集上的一个对换。若用 1、2、3、4 来分别表示红、黄、蓝、绿这 4 条对角线, 则该对换可表示为(24)。同理可知, 任意两条对角线可对换, 即(12)、(13)、(14)、(23)、(24)、(34)均为群作用下的元素。而所有的对换通过置换的复合运算可生成对称群 S_4 。注意到 G 和 S_4 都是 24 阶群, 从而群 G 在此作用下所确定的同态映射即为同构映射。

3.4. 课后拓展——正十二面体

在课堂上用 vZome 展示了正立方体的变换群对正立方体的顶点集、棱集、面集和对角线集的作用之后, 课后可以把正十二面体的变换群的作用作为习题, 让学生通过群作用的方法确定正十二面体的变换群的阶, 巩固课堂上学到的新知识。在布置的作业中可同时提供 vZome 制作的虚拟正十二面体的链接(见

第2节及图1), 辅助学生完成作业和为进一步探索提供虚拟场景。鼓励学生利用 vZome 自行搭建其它虚拟多面体, 并作开放式的自由探索。

4. 总结与展望

本文介绍了 vZome 的基本使用方法, 并以一个经过实践的案例来展示 vZome 在高校数学与应用数学(师范)专业的主干课程的教学中的应用。这一教学设计有利于在讲授数学专业知识的同时, 向学生展示使用教学软件的教学方法, 对教学学时有更高效的利用, 可向其它数学主干课程推广。如《离散数学》或《组合数学》课程中的利用 Burnside 引理来计数这一节内容, 是《抽象代数》中群对集合的作用的自然延伸和具体应用。因此也可针对 Burnside 引理来设计 vZome 的虚拟展示来辅助教学。师范生学习了 vZome 后, 亦可在实习或今后的中学数学教学岗位上使用 vZome 来辅助立体几何等内容的教学。总之, 通过在数学师范生的培养体系中加大融合包括虚拟三维软件在内的计算机软件的应用, 可提升培养质量和学生的教学技能。

基金项目

校级质量工程项目“数学与应用数学专项人才培养计划”(2024XJZLGC026)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [3] ZOMETOOL Inc: The ZOMETOOL. <https://www.zometool.com/>
- [4] ZOMETOOL. <https://www.zometool.com.cn/>
- [5] vZome. <https://www.vzome.com/home/>
- [6] 杨晓丹, 赵越, 王琳静. 基于 GeoGebra 软件的高等数学可视化教学探究——以平行截面面积为已知的立体的体积为例[J]. 中国信息界, 2024(4): 185-187.
- [7] Jiang, P. and Qiu, F.W. (2015) The Construction of Uniform Polyhedron with the Aid of GeoGebra. *Proceedings of the 20th Asian Technology Conference in Mathematics*, Leshan, 16-20 December 2015, 270-279.
- [8] 杨子胥. 近世代数[M]. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2020.