Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(3), 332-339
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.143203

Hans汉斯

基于弗赖登塔尔理论的高中圆锥曲线教学模型建构

——聚焦现实情境的数学化与再创造

覃春阳，黄月兰*

广西民族师范学院数学与计算机科学学院，广西 崇左

收稿日期：2026年1月31日；录用日期：2026年3月9日；发布日期：2026年3月19日

摘 要

针对高中圆锥曲线教学长期存在的抽象性强、模式僵化与学生认知困难等问题，本研究以弗赖登塔尔的数学化与再创造理论为框架，系统建构了一个以现实情境为驱动、以数学化与再创造为主线的教学模型。该模型将教学过程组织为现实情境启动、数学化探索推进、意义建构协同与反思深化延伸四个循环深化的阶段，并将动态几何软件作为贯穿全程的认知工具，引导学生亲历从几何直觉到代数模型的完整知识建构过程。文章详细阐述了模型的构成逻辑与操作要点，并以椭圆及其标准方程为例展示了具体应用。本研究为破解圆锥曲线教学困境提供了系统化、可操作的理论框架与实践路径，也为弗赖登塔尔理论在中国高中数学课程中的学科化应用提供了学科案例。

关键词

弗赖登塔尔理论，圆锥曲线，教学模型，数学化，再创造

Construction of a High School Conic Sections Teaching Model Based on Freudenthal's Theory

—Focusing on Mathematization and Reinvention through Realistic Contexts

Chunyang Qin, Yuelan Huang*

School of Mathematics and Computer Science, Guangxi Minzu Normal University, Chongzuo Guangxi

*通讯作者。

文章引用: 覃春阳, 黄月兰. 基于弗赖登塔尔理论的高中圆锥曲线教学模型建构[J]. 创新教育研究, 2026, 14(3): 332-339.
DOI: 10.12677/ces.2026.143203

Received: January 31, 2026; accepted: March 9, 2026; published: March 19, 2026

Abstract

Addressing the persistent challenges in high school conic sections instruction—namely, high abstraction, rigid teaching patterns, and students' cognitive difficulties—this study draws on Freudenthal's theories of mathematization and reinvention to systematically construct a teaching model driven by realistic contexts and centered on mathematization and reinvention. The model organizes the instructional process into four recursively deepening stages: realistic context initiation, mathematization exploration advancement, meaning construction collaboration, and reflection deepening extension. It employs dynamic geometry software as a cognitive tool throughout the entire process, guiding students to experience the complete knowledge construction from geometric intuition to algebraic models. The paper elaborates on the model's constitutive logic and operational key points, and illustrates its concrete application through the example of the ellipse and its standard equation. This study provides a systematic and operable theoretical framework and practical pathway for addressing the instructional difficulties of conic sections, and also serves as a subject-specific case for the discipline-based application of Freudenthal's theory within the context of Chinese high school mathematics curricula.

Keywords

Freudenthal's Theory, Conic Sections, Teaching Model, Mathematization, Reinvention

1. 引言

圆锥曲线作为高中数学解析几何的核心内容，其教学长期以来面临着双重困境：从知识特性看，圆锥曲线的定义、方程与性质具有高度抽象性，涉及焦点、准线、离心率等相互关联的复杂概念体系；从教学实践看，传统“定义－方程－性质－练习”的线性教学模式往往导致学生陷入以解题为导向的机械操练，难以真正理解知识的内在逻辑与意义，更无法建立与现实世界的有机联系[1]。与此同时，《普通高中数学课程标准(2017 年版)》明确强调数学教学应注重情境创设，引导学生经历“数学化”过程，发展数学建模、直观想象等核心素养。在这一背景下，如何创新圆锥曲线教学模式，实现从知识传递向意义建构的转变，成为亟待解决的现实问题。

荷兰数学教育家弗赖登塔尔(Hans Freudenthal)提出的“现实数学教育”(Realistic Mathematics Education, RME)理论为此提供了深刻启示。该理论的核心主张是：数学不是被动接受的“成品”，而应是通过数学化过程主动建构的“活动”；学习数学的一种重要且有效的方式是学生在教师引导下对数学知识的再创造[2]。这一理论在国际数学教育领域产生了广泛影响，其情境学习、渐进形式化等原则与我国新课标理念高度契合。近年来，国内学者开始探索弗赖登塔尔理论在数学教学中的应用[3] [4]，且国际学界亦涌现出大量关于 RME 理论与动态几何软件的整合应用[5] [6]。然而，现有研究多集中于理论探讨或片段化设计，缺乏将其系统转化为圆锥曲线整体单元教学，并整合现代教育技术的可操作模型。

鉴于此，本研究旨在系统整合弗赖登塔尔理论的核心原理，针对高中圆锥曲线的知识特点与教学难

点，建构一个以“现实情境”为驱动、以“数学化”与“再创造”为主线的教学模型。论文将详细阐述模型的构成阶段与运行逻辑，并通过典型案例剖析，展示其具体应用方式，以期为破解圆锥曲线教学困境提供一个新的、系统化的理论框架与实践指南，亦为弗赖登塔尔理论在中国高中数学教育情境中的学科化实施提供范例。

2. 弗赖登塔尔理论的核心要义与教学启示[7]

2.1. 数学化：数学学习的核心过程

弗赖登塔尔将数学化定义为将非数学情境组织转化为数学问题的过程。它包括两个层次：水平数学化与垂直数学化。

水平数学化是指从现实世界中发现、抽象和形式化数学问题的过程，即从现实情境到数学问题的飞跃。

垂直数学化则是在数学系统内部对概念、关系进行重组、精炼和形式化，建立更一般的数学结构，即从数学问题到数学体系的深化[8]。

在圆锥曲线教学中，水平数学化体现为从行星轨道、抛物线桥拱等现实情境中抽象出轨迹问题；垂直数学化则体现为从轨迹的几何定义出发，通过坐标法建立方程，并进一步探究性质与关系。

2.2. 再创造：数学学习的基本方式

“再创造”是弗赖登塔尔理论的核心理念。它主张学生应在教师引导下，像数学家当初发现数学一样，亲历数学知识的创造过程，这一过程并非学生“原发创造”，而是在教师精心设计的任务与策略支架下的“引导性创造”。这不是让学生进行无依据的凭空创造，而是在特定情境和已有知识基础上，重新经历数学关键思想的发展历程[2]。对于圆锥曲线而言，“有指导再创造”意味着学生通过操作、观察、猜想、推导，自己发现椭圆、双曲线、抛物线的定义，并自主建立其标准方程与性质体系。

2.3. 数学现实：数学学习的逻辑起点

数学现实指学生已有的、可用于学习新数学的所有经验、知识和认知结构的总和。有效的教学必须从学生的数学现实出发，这既包括学生熟悉的生活经验，也包括已掌握的数学知识，例如函数、方程、坐标法等具体内容。在圆锥曲线教学中，学生的数学现实是设计教学情境与探究活动的根本依据。

这三个核心概念相互关联，构成了一个完整的数学学习闭环：数学现实是起点，数学化是核心过程，有指导再创造是实现数学化的理想路径。这为重构圆锥曲线教学提供了坚实的理论基础。

3. 圆锥曲线教学的传统困境与理论适配性分析

3.1. 传统教学模式的弊端审视

当前高中圆锥曲线教学普遍采用线性传授模式，其弊端集中体现在三个方面：第一，情境缺失导致动机不足。教学常从抽象定义直接开始，学生不明白为什么要学，大部分学生以接受式学习为主，主动构建空间不足。第二，过程压缩导致理解肤浅。标准方程的推导往往由教师快速演示，学生失去了在尝试、化简和反思中深刻理解坐标法精髓的机会。第三，知识孤立导致迁移困难。椭圆、双曲线、抛物线常被作为孤立知识点教授，学生难以洞察三者作为圆锥截线的统一本质与内在联系[9]。这种模式下，学生认知多停留在过度依赖机械记忆、缺乏意义联结的重复演练，当面对需要综合运用知识解决实际问题的情境时，往往束手无策。

3.2. 弗赖登塔尔理论之于圆锥曲线教学的独特适配性

圆锥曲线的知识特性与弗赖登塔尔理论具有天然的适配性，这为教学改革提供了可能。首先，丰富

的现实背景为水平数学化提供了优质素材。从天体运行到建筑美学，从物理原理到技术应用，圆锥曲线与现实世界有着广泛而深刻的联系。

其次，清晰的知识生成逻辑为垂直数学化搭建了自然阶梯。从几何定义到代数方程，再到性质探究与体系统一，这一过程本身就是数学化的典范。

最后，多样的操作活动为“再创造”创造了物理空间。无论是拉线画椭圆、折纸得抛物线，还是利用动态几何软件进行参数变化实验，学生都能在“做”中亲身经历知识的建构过程。

基于以上分析，建构一个以弗赖登塔尔理论为指导、系统整合“数学化”与“再创造”过程、深度融合现代教育技术的圆锥曲线教学模型，不仅必要，而且可行。

4. “现实－数学化－再创造”教学模型的构建

基于上述理论分析与现实诊断，本研究构建了以“现实情境驱动”为核心的圆锥曲线教学模型。该模型以弗赖登塔尔理论为指导，以学生的数学现实为起点，将教学过程组织为四个相互衔接、循环深化的阶段，并明确将动态几何软件作为贯穿全程的认知工具(如图 1 所示)。

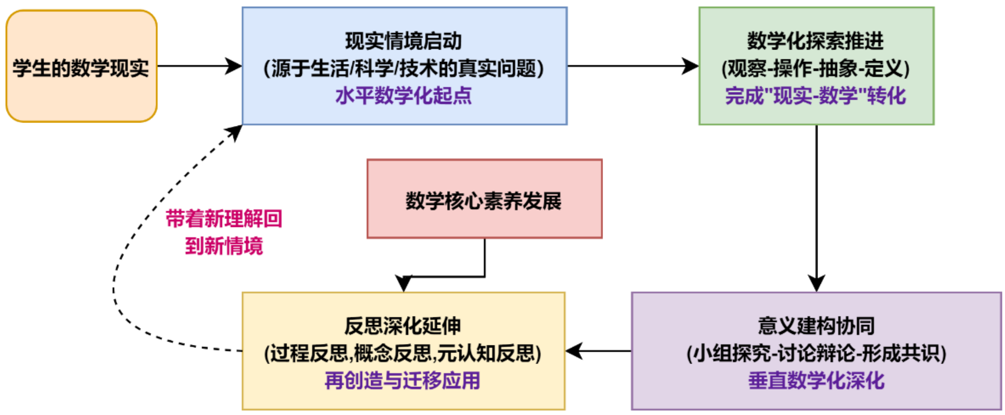

Figure 1. Structural diagram of the “Reality-Mathematization-Reinvention” teaching model
图 1. “现实－数学化－再创造”教学模型结构图

4.1. 阶段一：现实情境启动

本阶段旨在从学生的数学现实出发，创设能够自然引发认知冲突、激发探究欲望的真实情境。情境开发遵循三项原则：情境必须真实，源于现实世界；必须符合学生的认知适应性，处于其最近发展区；同时需要具备清晰的数学可析性，能够直接导向目标数学概念。例如，在椭圆教学中，教师可引入行星轨道数据拟合、建筑中钉线法绘制椭圆，或倾斜圆形杯口的投影等真实案例。同时，教师也可以利用动态几何软件展示平面截圆锥得到不同圆锥曲线的过程。在此过程中，教师扮演情境设计师角色，通过精心选择与呈现情境，提出“这些图形有什么共同特征？”、“如何精确描述它？”等驱动性问题，开启数学化进程。

4.2. 阶段二：数学化探索推进

这是模型的核心环节，旨在为学生搭建从现实到数学、从直觉到严谨的“脚手架”。本阶段设计了两级“数学化阶梯”：

阶梯 A (水平数学化)：引导学生从具体情境中观察、操作，如动手拉线画椭圆，用自己的语言描述规律，在此，动态几何软件可作为实验工具，学生利用该软件模拟钉线法，拖动动点并观察其满足的约

束条件，其“拖拽即时反馈”功能可以帮助学生直观感知动点到两定点和(差)为定值的轨迹条件，将物理操作的直觉转化为几何轨迹本质的清晰认知[10]，进而逐步抽象、提炼，用严谨的几何语言自主“创造”出圆锥曲线的定义。

阶梯 B (垂直数学化)：引导学生面对新创造的定义，思考“如何用代数刻画它？”。学生需要自主选择坐标系、设定参数、利用距离公式进行推导，在尝试、化简的过程中，亲身经历标准方程的“诞生”。此阶段，动态几何软件可从“实验工具”转变为“检验工具”：学生完成推导后，可在软件中输入所得方程，通过图形与定义的即时反馈来验证代数结果的正确性，将代数与图形联动，为学生从几何定义向代数方程过渡提供了“可见的”形式化支架，使垂直数学化不再是一个黑箱操作。教师在此阶段提供策略性支持，如提示坐标系选择原则、化简技巧，但不代替学生思考。

4.3. 阶段三：意义建构协同

在获得初步数学成果(如标准方程)后，本阶段通过协作学习深化理解。学生以小组形式，从方程出发探究曲线的几何性质：范围、对称性、顶点等，并尝试解释这些性质的几何意义。在此阶段，教师可引导学生在动态几何软件中对参数 a、b 进行调节，实时观察图形变化，进而归纳出离心率 e 对曲线形状的决定性影响。教师组织全班对关键结论如离心率的引入与意义进行讨论、辩论，直至达成共识。这一过程不仅巩固了知识，更培养了学生数学交流与逻辑推理的能力。

4.4. 阶段四：反思深化延伸

本阶段通过三个层次的反思性问题，促进思维升华与迁移：

过程性反思：推导中最困难的一步是什么？你是如何解决的？

概念性反思：椭圆的定义与双曲线的定义仅一字之差，为何图形迥异？

元认知反思：回顾整个过程，我们经历了哪些关键步骤？这些步骤对解决其他轨迹问题有何启发？动态几何软件在此过程中扮演了怎样的角色？

最后，引导学生将所学知识返回到初始情境或其他新情境中解决问题，完成“现实→数学→现实”的完整循环，并自然过渡到对其他圆锥曲线的探究。

5. 模型的应用例析：以“椭圆及其标准方程”为例

为具体说明所建构模型的应用方式，本节以“椭圆及其标准方程(第 1 课时)”为例，呈现完整的教学设计。

5.1. 教学目标与设计思路

教学目标：

1) 经历从现实情境抽象椭圆几何特征的过程，理解椭圆的定义；

2) 通过自主推导，掌握椭圆标准方程的建立方法，理解方程中参数的几何意义；

3) 在探究与反思中，体会坐标法思想，发展数学抽象、逻辑推理与数学建模素养。

设计思路：严格遵循“现实→数学化→再创造”模型的四阶段，以学生的活动与探究为主线，教师作为引导者与支持者，动态几何软件作为认知工具全程嵌入。

5.2. 教学过程与模型阶段对应

【阶段一：现实情境启动】

1) 情境导入：播放行星绕太阳运行的动画与建筑工地上用“钉线法”画椭圆的视频。

2) 提出问题：这些轨迹有什么共同特征？你能用自己的语言描述吗？如何在纸上画出这样的图形？

(设计意图：从科学、技术两个维度提供真实背景，激发兴趣，启动水平数学化。)

【阶段二：数学化探索推进】

3) 操作探究(水平数学化)：学生两人一组，使用图钉、细绳、画板，模仿“钉线法”动手画椭圆。在操作中，部分小组可能出现“画不出封闭曲线”的情况，教师注意引导学生关注笔尖(动点)与两个图钉(定点)之间的距离关系。教师借此生成认知冲突，引导学生辨析“定长大于两定点间距”这一关键条件。在学生完成画图后，转入动态几何软件模拟环境，教师利用动态几何软件演示“平面内到两定点距离和为定长”的动点轨迹生成过程，随后，让学生在提供的模板中拖动动点 p，并引导其观察 $|PF_1|+|PF_2|$ 的值，并尝试改变线段长或定点位置直观验证这一约束条件，将实物操作的亲身体验与软件的动态抽象相联系起来，为后续代数建模奠定直观基础。

4) 定义归纳：学生通过测量、讨论，自主归纳出“平面内到两定点距离之和为定长(大于两定点间距)的点的轨迹”，并尝试用文字和符号语言表达。教师引导学生辨析“定长大于间距”这一关键条件。

5) 代数建模(垂直数学化)：教师提问：“如何用方程精确描述这个轨迹？”引导学生建立坐标系(以两定点连线中点为原点，连线所在直线为 x 轴)，设点、列式。学生小组合作，经历“列出带根号的等式→移项→平方→化简”的完整推导过程。教师巡视，对代数运算(如去根号、合并同类项)提供针对性指导，在此过程需要注意，实际教学时，学生首次独立化简常常出现两类典型困难：

典型困难 1：机械平方导致项数剧增，例如学生会直接将两边平方后产生项而不知所措；

应对策略：教师引导学生对比过去处理“一个根号”(如求点到点距离)的经验，激活“移项平方”的策略记忆。

典型困难 2：符号处理失误，尤其在移项后再平方时得到 $4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4cx-4a^2$ 或类似变形漏写绝对值或符号。

应对策略：教师可建议小组将初步结果输入动态几何软件指令栏，点击“自定义函数”绘制曲线，通过图形反馈(如得到的是双曲线或根本无法显示图形)验证推导是否正确。这种“代数推导－几何验证－回溯修正”的闭环，将抽象的代数运算错误具象化，极大地激发了学生寻找错误根源的动力。最后学生经过试误、修正、再验证，最终成功化简出标准方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$。

【阶段三：意义建构协同】

6) 方程分析：得到方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 后，教师引导学生观察方程形式，自主发现其对称性。

7) 参数意义探究：学生在动态几何软件中通过滑动条调节 a、b 的值，观察椭圆形状的变化，引导学生发现 a,b,c (半焦距)的几何意义，并推导关系 $a^2=b^2+c^2$。小组讨论：a,b,c 中哪个量最大？为什么？

8) 概念延伸：教师通过动态几何软件固定 a 值，连续改变 c 值，让学生直观感受离心率如何拉伸椭圆，自然引出离心率 $e=\frac{c}{a}$ 的概念。

【阶段四：反思深化延伸】

9) 过程反思：提问：推导过程中哪一步最具挑战性？你是如何克服的？你觉得动态几何软件在验证和修正指导的过程中起了什么作用？

10) 概念对比：展示双曲线的定义(到两定点距离之差的绝对值为定值)，让学生对比思考：椭圆与双曲线的定义仅“和”与“差”的一字之差，为何轨迹从封闭曲线变为开放曲线？建议课后利用动态几何软件绘制双曲线轨迹进行探究。

11) 迁移展望：今天我们用坐标法创造了椭圆的方程。下次课，我们将用类似的方法研究双曲线。你认为研究步骤会有哪些异同？

12) 回归情境：请学生用今天所学的椭圆方程，解释行星轨道为什么近似于椭圆。

5.3. 例析小结

以上案例完整展示了“现实→数学化→再创造”模型在具体课时中的落地方式。通过学生在垂直数学化阶段的“代数困境”与“几何救援”，清晰地呈现了动态几何软件是如何帮助学生将抽象的代数操作与直观的几何意义进行双向映射。模型四个阶段环环相扣，确保了学生始终处于探究与建构的中心。教师的作用从“讲授者”转变为“情境设计师”、“脚手架搭建者”和“思维引导者”，这正是弗赖登塔尔“再创造”教学思想的体现。

6. 结论与展望

本研究系统建构了基于弗赖登塔尔理论的“现实→数学化→再创造”圆锥曲线教学模型。该模型将抽象的教育理论转化为由“现实情境启动、数学化探索推进、意义建构协同、反思深化延伸”构成的四阶段、可循环的教学流程，并创造性地将动态几何软件作为贯穿全程的认知基础设施，为高中圆锥曲线教学提供了一个系统化、可操作且理论扎实的新框架。

模型的核心价值体现在以下几个方面：一是理论转化价值，即将弗赖登塔尔的数学化与再创造等核心理念，具体化为清晰的课堂教学阶段与策略，实现了理论向实践的学科化落地。二是教学设计价值，为教师提供了超越传统线性教学模式的全新路线图，特别强调从现实情境出发、以学生探究为主线、以信息技术为认知增强的设计逻辑。三是素养发展价值，模型全过程呼应了数学抽象、逻辑推理、数学建模等数学核心素养的培养要求，引导学生像数学家一样思考与发现。

研究局限与展望：本研究侧重于模型的理论建构与初步例证。模型的普适性及其对不同层次学校、不同基础学生的适应性还需加以检验，建议未来研究可选取平行班级开展前后测试对比实验，并结合课堂录课视频、半结构化访谈等质性工具系统采集学生在数学化水平、再创造表现及概念理解深度方面的变化数据，从而为模型有效性提供数据支撑。同时，进一步开发与本模型配套的学习成效评价量表，以量化方式追踪核心素养的发展轨迹，以及对学生长期学习成效的影响，有待后续通过严格的实证研究加以检验。未来研究可朝以下方向深入：其一，基于本模型，开发包括情境案例库、活动设计、评价工具在内的“圆锥曲线”单元完整教学资源包；其二，开展跨区域、多学校的教学实践，收集更丰富的应用反馈以优化模型细节；其三，探索该模型与动态几何软件、虚拟仿真等信息技术的深度融合模式。

期待本研究建构的模型能为一线数学教师革新圆锥曲线教学提供有益的参考，并激发更多关于弗赖登塔尔理论在中国高中数学课堂中创造性应用的探索。

基金项目

广西教育科学“十四五”规划 2025 年度课题“民族地区高校学生数字化学习能力实证研究”(项目编号：2025C636)；2025 年度国家民委教育教学改革研究项目“数字赋能铸牢中华民族共同体意识融入民族院校师范专业人才培养路径研究”(项目编号：2025-GMJ-007)。

参考文献

[1] 刘晓梅. 圆锥曲线教学中存在的问题和解决办法[J]. 语数外学习(高中版中旬), 2018(2): 41.

[2] Freudenthal, H. (1991) Revisiting Mathematics Education: China Lectures. Kluwer Academic Publishers.

[3] 蒲淑萍, 汪晓勤. 弗赖登塔尔的 HPM 思想及其教学启示[J]. 数学教育学报, 2011, 20(6): 20-24.

[4] 孙嘉嵘. 弗赖登塔尔理论下高中圆锥曲线的教学研究[D]: [硕士学位论文]. 济南: 山东师范大学, 2023.

[5] 鲁延环, 赵欣庆, 张文斌. 利用动态几何软件 GeoGebra 开展数学实验和命制数学问题的路径探究——以圆锥曲线复习中平面截圆锥生成椭圆为例[J]. 成才, 2024(22): 135-137.

[6] 潘丹珑. 基于数字化工具的高中数学教学策略优化——以《圆锥曲线》单元教学为例[J]. 福建中学数学, 2025(1): 9-11.

[7] 弗赖登塔尔, 陈昌平. 作为教育任务的数学[J]. 数学教学, 1995(2): 40.

[8] Freudenthal, H. (1983) Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. D. Reidel Publishing Company.

[9] 李淑芸. 构建主义视域下圆锥曲线优化策略探研[J]. 基教与成才研究, 2021, 17(2): 78-79.

[10] Bakker, A. (2019) Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers. Routledge.