Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(3), 513-519
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.143227

Hans汉斯

解析几何中直线与圆锥曲线位置关系的教学探究

——典型题型解析与教学策略

卢雪峰

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2026年2月2日；录用日期：2026年3月13日；发布日期：2026年3月25日

摘 要

直线与圆锥曲线的位置关系是高中数学解析几何部分的核心内容，也是高考的重点与难点。该部分知识综合性强，对学生的代数运算能力、逻辑推理能力和数形结合思想要求较高。文章以一道凝练了多种解题思路的高考模拟题为载体，并辅以一道探究性变式，深入剖析了此类问题的解题思路与内涵思想。在此基础上，提出了“夯实基础、一题多解、变式驱动、思想升华”的四步教学策略，旨在优化教学过程，提升学生分析和解决复杂问题的核心素养。

关键词

圆锥曲线，位置关系，典型题型，教学策略，数学核心素养

Teaching Exploration on the Positional Relationship between Straight Lines and Conic Sections in Analytical Geometry

—Analysis of Typical Question Types and Teaching Strategies

Xuefeng Lu

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: February 2, 2026; accepted: March 13, 2026; published: March 25, 2026

Abstract

The positional relationship between straight lines and conic sections is a core content in the analytical

文章引用: 卢雪峰. 解析几何中直线与圆锥曲线位置关系的教学探究[J]. 创新教育研究, 2026, 14(3): 513-519.
DOI: 10.12677/ces.2026.143227

geometry part of high school mathematics, as well as a key and difficult point in the college entrance examination. This part of knowledge is highly comprehensive, requiring students to have strong algebraic operation ability, logical reasoning ability, and the ability to combine numbers and shapes. Taking a college entrance examination simulation question that condenses a variety of problem-solving ideas as the carrier, supplemented by an exploratory variant, this paper deeply analyzes the problem-solving ideas and connotative thoughts of such problems. On this basis, a four-step teaching strategy of "consolidating the foundation, solving one problem with multiple methods, driving by variants, and sublimating ideas" is proposed, aiming to optimize the teaching process and improve students' core literacy in analyzing and solving complex problems.

Keywords

Conic Section, Positional Relationship, Typical Question Type, Teaching Strategy, Core Mathematical Literacy

1. 引言与问题背景

解析几何的本质就是用代数的方法来研究几何问题，而直线与圆锥曲线的位置关系，无疑是解析几何本质思想最集中、最典型的表现。根据《普通高中数学课程标准》的要求，学生要将圆锥曲线的几何性质和代数方程紧密结合，用建立方程组、韦达定理等一系列代数工具来探究相交、相切、相离等几何位置关系，在此基础上解决弦长、面积、最值、定点、轨迹等综合问题[1]。这个过程深刻地诠释了“数”和“形”的相互转化与依存，是培养学生数学抽象、逻辑推理、数学运算等核心素养的重要载体。其中，数学运算素养作为核心素养的关键组成，在此类问题的解决过程中表现得尤为突出。正如章建跃博士所指出，运算能力并非简单的计算技能，而是在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的综合素养，它包括探究运算思路、设计运算程序、求得运算结果等环节[2]。因此，解析几何的教学不应止步于让学生算对，更要引导其“明算理、优算法、通算路”。

但是理想的教学目标和现实的教学实践之间存在着差距。学生普遍认为这类问题“思路容易找到，但计算繁琐，容易出错，难以深入”。这一感受恰恰揭示了目前直线与圆锥曲线教学所面临的三大困境：

其一，思路容易找到。因为联立方程的通法路径清晰，大多数学生都能迈出第一步[3]。

其二，计算繁琐、容易出错。因为后面代数变形过程复杂，对学生运算稳定性、准确性提出了极高的要求，很多学生容易在过程中出现疏漏，无法获得成功的解题体验。

其三，很难深入。说明学生一般都满足于单一的、机械的代数硬算，思维容易固化，缺少主动观察题目几何特征、寻找更简单解法的意识与能力。往往把不同的题目当作孤立的知识点，如弦长、中点、面积等，不能形成系统的知识网络和灵活应变的问题解决策略[4]。

因此，教师怎样才能冲破这些教学困境，带领学生跨越从思路到答案的计算鸿沟，达成从方法到思想的思维跃迁，真正使学生既学会解题的方法，又懂得其中数学的思想内核，是值得高中数学教师深入探究的课题。本文正是基于这样的思考，选择一道典型的高考试题及其变式进行深入剖析，目的是探索能够有效突破教学难点、提高学生核心素养的教学策略。

2. 典型题型深度解析：从“一题”看“一类”

2.1. 试题呈现与教学价值

例题：2025 年高考数学(全国二卷)第 16 题：

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4。

(1) 求 C 的方程；

(2) 过点 $\left(0,-2\right)$ 的直线 l 交 C 于 A,B 两点，O 为坐标原点。若 ΔOAB 的面积为 $\sqrt{2}$，求 $\left|AB\right|$。

这道题较好地体现了高考命题的科学性与艺术性，是一道具有基础性、层次性与探究性的优质试题。其价值首先体现在基础性与综合性的平衡上：

第(1)问直接考察椭圆定义，作为基础性问题给予学生信心；而第(2)问则将直线、椭圆、定点、面积、弦长等多个知识点有机融合，构成一个完整的解题链条，全面检验学生的基础知识与综合应用能力。

更深的价值是，从不同的解法路径上，可以清楚地看到学生思维的层次。学生普遍能够想到用面积公式、弦长公式和韦达定理进行代数硬算，这代表了对解题流程的程序化思维；更高层次的学生能观察到直线恒过 y 轴定点的几何特征，巧妙地将二维面积问题转化为一维坐标差问题，实现了由平面几何运算向坐标运算的降维求解，体现了追求高效的优化思维[5]；能考虑到斜率不存在的情况或者尝试用非斜截式直线方程求解的学生，则表现出思维的严谨性和发散性。

2.2. 解法剖析：从“通法”到“巧法”的思维进阶

第(1)问解析：由长轴长 $2a=4$ 得 $a=2$。由离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $b^2=2$。故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$。

第(2)问核心思路分析：

1) 基础通法：构建“$S=\dfrac{1}{2}\times d\times\left|AB\right|$”模型，这是最常规的思路。设直线 $y=kx-2$，与椭圆方程联立，得到 $\left(1+2k^2\right)x^2-8kx+4=0$。利用韦达定理求出用 k 表示的弦长 $\left|AB\right|$ 和原点到直线的距离 d，代入面积公式 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}d\cdot\left|AB\right|=\sqrt{2}$，解出 k 值，再回代求 $\left|AB\right|$。此法虽然计算量大，但逻辑链条完整，是必须掌握的基本功。

2) 几何巧法：利用“定点在坐标轴”的特殊性，这是本题的关键特征。观察到直线 l 恒过 y 轴上的点 $P\left(0,-2\right)$。此时，ΔOAB 的面积可以看作被 y 轴分割成的两部分面积之和或差，其底边都在 y 轴上，即线段 OP。

$S_{\Delta OAB}=S_{\Delta OPA}+S_{\Delta OPB}=\dfrac{1}{2}\left|OP\right|\cdot\left|x_A\right|+\dfrac{1}{2}\left|OP\right|\cdot\left|x_B\right|$。由于 A，B 在 y 轴两侧，故 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\left|OP\right|\cdot\left(\left|x_A-x_B\right|\right)=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\left|x_1-x_2\right|=\left|x_1-x_2\right|$。

题目条件给出 ΔOAB 面积为 $\sqrt{2}$，直接转化为 $\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{2}$。

利用韦达定理 $\left|x_1-x_2\right|^2=\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2=\left(\dfrac{8k}{1+2k^2}\right)^2-4\left(\dfrac{4}{1+2k^2}\right)=2$。

解得 $k^2=\dfrac{3}{2}$。

最终求 $|AB| = \sqrt{1+k^2}\,|x_1 - x_2| = \sqrt{1+\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{5}$ 。

对比可见，此方法将复杂的面积表达式直接简化为坐标差的绝对值，计算量骤减，彰显了数形结合的威力。

2.3. 变式训练：从“求值”到“探究”的思维深化

变式题 1：已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$，过点 $Q(2,2)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点。

(1) 若直线 l 过椭圆的右焦点，求弦长 $|AB|$ 。

(2) 设弦 AB 的中点为 M ，求证：点 M 的轨迹为一椭圆的一部分，并求出其轨迹方程。

该变式从“求定值”转向“求轨迹”，这是直线与圆锥曲线位置关系中的另一大核心题型——中点弦问题。它引入了“点差法”或“设而不求”的整体代换思想，是思维上的又一次重要跃升。它将学生的思维从解决一个具体计算问题，引导到探究一类动点的几何规律，更能体现解析几何的学科本质。

教学步骤(重点分析第(2)问)：

点差法：

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$，中点 $M(x_M, y_M)$ 。

将 A, B 坐标代入椭圆方程作差：$\frac{x_1^2 - x_2^2}{4} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{2} = 0$ 。

利用平方差公式：$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{4} + \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{2} = 0$ 。

整理得：$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{1}{2}$。即 $k_{AB} \cdot \frac{2y_M}{2x_M} = -\frac{1}{2}$，得到 $k_{AB} = -\frac{x_M}{2y_M}$ 。

又因点 $M(x_M, y_M)$ 在直线 l 上，所以 $k_{AB} = k_{QM} = \frac{y_M - 2}{x_M - 2}$ 。

联立两式：$-\frac{x_M}{2y_M} = \frac{y_M - 2}{x_M - 2}$ 。

化简整理得：$x_M^2 + 2y_M^2 - 2x_M - 4y_M = 0$ 。

配方得：$(x_M - 1)^2 + 2(y_M - 1)^2 = 3$。这是一个新的椭圆方程，需注意 M 点作为中点，其轨迹范围在原椭圆内部，因此是椭圆的一部分。

在直线与圆锥曲线的综合问题中，除了标准的弦长、面积、中点关系外，还常遇到形如 $\lambda = x_1 y_2 + x_2 y_1$ 或涉及 x_1， y_2 交叉项的非对称结构。这类问题无法直接套用韦达定理的对称形式，对学生代数变通能力提出了更高要求。

变式题 2：已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$，过点 $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点。设椭圆左顶点为 D，直线 DA 与直线 DB 的斜率分别为 k_1, k_2 。试探究 $k_1 + k_2$ 是否为定值？若是，求出该定值。

通法受阻分析：设直线 $l: y = kx + m$，代入椭圆方程，得到关于 x 的二次方程。设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 。由韦达定理可得 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ (用 k, m 表示)。但目标式 $k_1 + k_2 = \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2}$ 通分后，分子会出现 $x_1 y_2 + x_2 y_1$ 这样的非对称项，无法直接由 $x_1 + x_2$ 和 $x_1 x_2$ 得出。

非对称结构的对称化处理：为了利用韦达定理，需要将目标式变形为关于 x_1, x_2 的对称式。

第一步：代换 y_i 。将 $y_i = kx_i + m$ 代入目标式。

$$k_1+k_2=\frac{kx_1+m}{x_1+2}+\frac{kx_2+m}{x_2+2}$$

第二步：通分与整理。通分后，分子为：

$$(kx_1+m)(x_2+2)+(kx_2+m)(x_1+2)=2kx_1x_2+(2k+m)(x_1+x_2)$$

此时，分子是关于 x_1+x_2 和 x_1x_2 的对称式。

第三步：利用韦达定理与直线方程。将直线方程 $y=kx+m$ 代入椭圆方程，结合点 $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 在直线上（$m=\frac{1}{2}-k$），可得 x_1+x_2 和 x_1x_2 关于 k 的表达式。再将这些表达式代入上一步的分子，化简后即可得到 k_1+k_2 的值。

此变式 2 的价值在于，它展示了当“通法”遇到“非对称”结构时，仍有应对策略。通过有目标的代数变形，即将目标式转化为韦达定理所能处理的对称形式，学生能够体会到所谓的“通法”并非僵化的步骤，而是一种基于韦达定理核心思想的、可灵活变通的解题策略。这进一步深化了学生对“设而不求”思想的理解，也为其解决更复杂的解析几何问题提供了方法论的指导。

3. 教学策略探究

3.1. 教学策略

从前面分析的典型例题及其变式的解题过程来看，学生的解题表现与思维水平存在明显的层次性。为此，本文基于学生认知发展的规律提出一个四阶段递进式教学模型，让学生系统地攻克“直线与圆锥曲线位置关系”板块。

第一阶段：学生掌握这类问题的一般代数范式

教学实践当中应当把例题的常规解法当作核心载体，促使学生规范地执行联立方程、代数消元、应用韦达定理、创建目标函数的流程。本例中就是引导学生完整经历：从设直线 $y=kx-2$，到与椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 联立，从而得到关于 x 的一元二次方程 $(1+2k^2)x^2-8kx+4=0$，最后利用韦达定理和面积公式得到关于 k 的方程。教师要重点说明其中的逻辑节点，判别式大于零是存在两个交点的前提，斜率不存在时也要进行讨论。此阶段的目的在于给学生建立一个稳固的知识体系，使学生在面对例题这样的标准问题时，有一条可靠的解题途径。

第二阶段：数学思想的初步渗透与解题策略的优化

学生掌握了基本方法之后，教学的重点就应当转向思维优化。例题中出现的几何巧法给教学提供了极好的教学情境。相较于直接呈现该方法，更有效的策略就是设计启发式问题，使学生把注意力集中在“直线恒过定点 $(0,-2)$”的关键几何特性上，并探究它对 ΔOAB 面积的特殊影响。当学生自己发现面积 $S_{\Delta OAB}$ 可以直接等于 $|x_1-x_2|$ 时，就会体验到数形结合思想在简化运算中所起到的巨大作用。组织学生比较分析“常规代数法”和“几何观察法”解决同一道例题时的效率和思维量，可以有效地促进学生“择优”意识的养成，使学生从“会做”向“巧做”迈进。

第三阶段：变式驱动下的知识迁移与认知结构深化

知识的深入理解、灵活应用，来自于系统的变式练习。本研究设计的变式题就是这一策略的载体。本变式将问题的焦点从例题的“面积求值”转为“中点轨迹探究”，教学内容也由韦达定理的常规应用，自然过渡到解决中点弦问题的高效工具——“点差法”。学生经由点差法得到轨迹方程 $(x_M-1)^2+2(y_M-1)^2=3$，既学到一项新技能，又形成“中点弦问题”认知模型。在此基础上，教师可以

根据例题和变式题形成“变式链”，如将例题的定点$(0,-2)$变为椭圆内一点，求面积最值；将变式题的椭圆变为双曲线，探究中点轨迹的异同。此策略意在冲破知识点孤立的状态，明显改进学生的知识迁移及综合应用水平[6]。

第四阶段：数学思想方法的显性化与高阶思维的升华

教学的终极目标在于数学思想的内化与学生核心素养的生成。在完成了具体方法的教学后，必须对其中蕴含的数学思想进行显性化的提炼与升华。

通过变式题中“点差法”的教学，可探究“设而不求”的整体思想：我们无需解出A,B的具体坐标，而是将x_1+x_2与y_1+y_2等式子作为整体进行代换。

通过对例题多种解法的复盘，可清晰归纳出“特殊与一般”的辩证思想：几何巧法正是利用了定点在y轴这一“特殊”位置，从而简化了“一般”的代数运算。

纵观例题与变式题的整个求解过程，无论是引入参数k来表达几何量，还是通过“点差法”建立中点坐标间的关系，都完美诠释了“函数与方程”和“化归与转化”的核心思想。

教师应在课堂总结时，将这些从具体例题中提炼出的思想方法明确化、条理化，引导学生超越题目的束缚，从思想方法的高度对知识进行二次审视与重构，从而实现其高阶思维能力的实质性提升。

3.2. 实证分析

为了初步检验上述四步教学策略的实际效果，本研究设计了一个小型实验。研究对象为某校高二年级两个平行班级，分别设为实验班(45 人)和对照班(46 人)。在实验前，以一次包含直线与椭圆基础位置关系的测试作为前测，结果显示两班学生在解题正确率和平均用时上无显著差异。

在后续的“直线与圆锥曲线位置关系”的专题复习中，实验班采用本文提出的“夯实基础－一题多解－变式驱动－思想升华”四步教学策略进行授课；对照班则采用传统的“讲解典型例题－归纳解题方法－进行变式训练”的教学模式。教学内容均以本文例题及其变式为核心。两班教学进度与课后练习保持一致。教学结束后，立即进行一次包含直接计算、面积最值、中点轨迹等题型的后测。

实验结果与分析：

1) 解题正确率对比

后测数据显示，实验班的平均正确率为 82.3%，对照班为 71.5%。尤其在涉及复杂代数运算的题目上，实验班因计算过程失误导致的失分率较对照班低 15.6%。这表明，该策略中对“几何巧法”的强调和对“设而不求”思想的渗透，有效降低了学生的机械计算量，提升了运算的稳定性与准确性。

2) 解题速度对比

统计两班学生在规定时间内完成全部题目的比例，实验班为 78%，对照班为 61%。通过对解题过程的观察与访谈发现，实验班学生能更迅速地识别题目特征，比如定点位置、中点条件，并选择最优解法，而非盲目联立方程，从而显著提升了解题效率。

3) 典型错误样本分析

收集实验班学生在课堂练习和作业中的典型错误，发现主要集中在两类：一是在“通法”执行中，对斜率不存在情况的遗漏；二是在“巧法”应用中，对面积分割后绝对值符号的处理不当。这些错误样本为后续教学提供了精准的反馈，印证了“夯实基础”阶段讨论斜率不存在情况，以及在“思想升华”阶段明确绝对值几何意义的必要性。

本次初步的实证研究虽样本有限，但其数据初步支持了本文提出的教学策略在提升学生运算准确率和解题速度方面的有效性。所以将教学策略与实证研究相结合，能更科学地指导教学实践，促进学生的深度学习。

4. 结论

直线与圆锥曲线位置关系的教学不能只是简单地堆砌解题技巧，而应该是一个引导学生思维层层深入、能力步步提升的过程。教师经由“夯实基础－一题多解－变式驱动－思想升华”这四个步骤的教学引导，可有效地帮助学生：

1) 由掌握通法走向寻求巧法。

2) 从解决单题走向触类旁通。

3) 从学会解题走向领悟数学之道。

唯有如此，才能真正实现从“学会”到“会学”的飞跃，为学生的终身发展构筑起牢固的数学根基。

参考文献

[1] 黄嘉如. 基于“一题一课”的高三数学复习课教学研究[D]: [硕士学位论文]. 广州: 广州大学, 2025.

[2] 靳翔宇. 基于数学理解的高中解析几何概念教学研究[D]: [硕士学位论文]. 曲阜: 曲阜师范大学, 2025.

[3] 侯福红. 高中数学直线与圆锥曲线位置关系解题方法探究[J]. 中国新通信, 2020, 22(14): 216-217.

[4] 王海青, 曹广福. 高中圆锥曲线的概念教学重构[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 7-13.

[5] 李习凡, 朱胜强. 通过投影建立圆与圆锥曲线的联系[J]. 数学通报, 2024, 63(6): 27-32.

[6] 胡鑫娜. 基于核心素养下的教与学——以“定比点差法在圆锥曲线中的应用”为例[J]. 科学咨询, 2020(49): 278.