Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(3), 411-418
Published Online March 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.143213

基于微积分发展的历史沿革对高等数学课程进行的教学实践

王　晋

成都大学计算机学院，四川 成都

收稿日期：2026年2月9日；录用日期：2026年3月10日；发布日期：2026年3月20日

摘　要

高等数学在高等教育中占据重要地位，主要教学内容及顺序一般是：极限理论、一元函数微积分、微分方程、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数。但是通过阅读数学史会发现，这些理论的出现和发展顺序其实并不与教学安排的顺序完全一致，那么这种不一致是否会影响学生对理论的理解？研究基于笔者在实际教学活动中进行的思考和探讨，调查这一现象对教学效果可能产生的影响，并在教学中进行了一些尝试。

关键词

微积分发展史，知识背景，高等数学，教学实践

Teaching Practice of Advanced Mathematics Course Based on the Historical Evolution of Calculus Development

Jin Wang

College of Computer Science, Chengdu University, Chengdu Sichuan

Received: February 9, 2026; accepted: March 10, 2026; published: March 20, 2026

Abstract

Advanced mathematics plays a pivotal role in higher education, typically taught in the following sequence: limits, single-variable calculus, differential equations, spatial analytic geometry, multivariable calculus, and infinite series. However, a study of mathematical history reveals that the historical development of these theories often diverges from the prescribed teaching order. This discrepancy

文章引用: 王晋. 基于微积分发展的历史沿革对高等数学课程进行的教学实践[J]. 创新教育研究, 2026, 14(3): 411-418. DOI: 10.12677/ces.2026.143213

raises the question: Does it hinder students' comprehension of the theories? This paper presents reflections and explorations from the author's teaching practice, examining how this phenomenon might impact instructional effectiveness and proposing practical teaching strategies.

Keywords

History of the Development of Calculus, Background Knowledge, Advanced Mathematics, Teaching Practice

1. 引言

讨论数学史对数学教育的影响并不是一个新话题，早在 1972 年，随着数学史与数学教学关系国际研究小组(简称 HPM 小组)的组建，数学史与数学教育(HPM)便作为一个新的研究领域出现[1]。近年来，国内也陆续开展了很多关于 HPM 的理论探讨与实践研究[2]-[4]，提出了“历史序－逻辑序－认知序”的教学重构。目前，大多数 HPM 研究主要针对中等教育阶段，而在高等教育阶段的数学课程中同样可以研究这个课题。

高等数学主要面向理工科专业开设，其他专业虽没有直接开设高等数学课程，但微积分的主要内容还是会包含在其培养计划中，如数学类专业会开设数学分析课程、经管类专业会开设微积分课程、医学类专业会开设医用高等数学课程[5]-[8]。不论哪一门课程，关于相同内容的教学顺序安排是基本一致的。但是纵观微积分的发展历史[9]，各个理论萌芽、发展和完善的顺序和安排的教学顺序并不一致，那么，这就产生了几点疑问：微积分理论的历史沿革是怎样的？教学顺序又为何做不同的安排？是否会对学生学习和理解产生影响？如何应对这种情况？本文将从这几个方面进行探讨。

2. 微积分理论发展的历史沿革

2.1. 思想萌芽阶段

芝诺(约公元前 490~公元前 425)提出的“阿基里斯追龟”悖论，已经隐含了无穷级数的理念，若将阿基里斯在跑完第一段用时记为t，那他追上乌龟用时可以用几何级数求和得$t+\frac{t}{10}+\frac{t}{10^2}+\frac{t}{10^3}+\cdots=\frac{10}{9}t$。

庄子(约公元前 369~公元前 286)在《庄子•天下篇》中有这样一句：“一尺之棰，日取其半，万世不竭”，同样蕴含了无穷级数的理念，截取的“棰”长度同样可以用几何级数求和得$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=1$，但是这里需要无限时间。

阿基米德(公元前 287~公元前 212)在《抛物线求积法》中使用“穷竭法”研究抛物线与直线围成的弓形面积，穷竭法的核心思想是用无限多个已知图形(如三角形、矩形)去无限逼近曲线图形，这已经包含了积分学的原始思想。

刘徽(约 225~295)在《九章算术注》中创造了“割圆术”，用圆内接正多边形来逼近圆的面积，并指出“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这清晰地阐述了极限思想。

祖暅(456~536)提出的“幂势既同，则积不容异”，即“等高处的横截面积相等的两个立体，其体积相等”，如图 1 所示，等高截面面积 $S_1 = S_2$，则两立体体积相等，这本质上已经是卡瓦列里原理的前身，是计算体积的积分学核心思想。

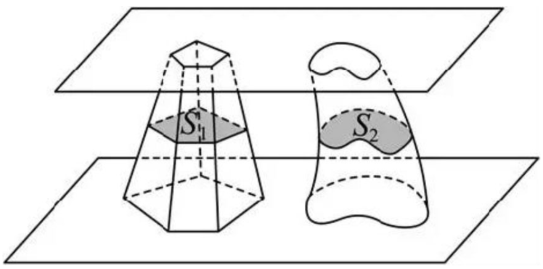


Figure 1. Schematic diagram of the Zuogeng principle
图 1. 祖暅原理示意图

2.2. 发展过渡阶段

尼科尔·奥雷姆(约 1320~1382)在其著作《论均匀与非均匀的强度》及《论图线》中用图形来表示一个可变量的值，这个量依赖于另一个量，这可以说是函数和解析几何的萌芽，同时作图表示匀速运动和匀加速运动，如图 2 所示，用直线 CD 表示匀速运动的速度，直线 AB 表示匀加速运动的速度，同时矩形 COBD 的面积表示匀速运动的路程，三角形 ABO 的面积就表示匀加速运动的路程，这已经触及了积分学(求面积)与物理学(求路程、总量)的本质联系。

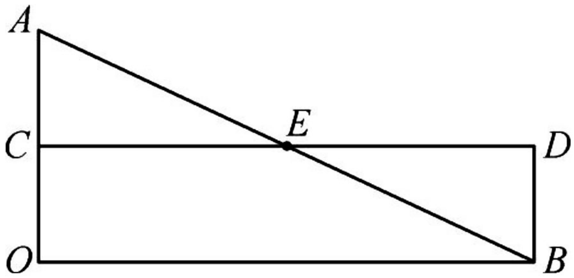


Figure 2. Geometric diagram of uniform speed and uniform acceleration motion
图 2. 匀速和匀加速运动的几何示意图

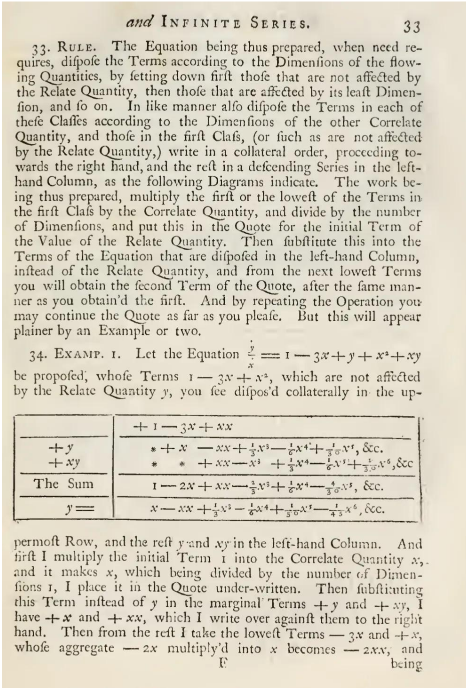
勒内·笛卡尔(1596~1650)在其著作《几何学》中引入了直角坐标系，进而创立了解析几何，这使得代数的强大计算能力与几何的直观可视化完美结合，当然也为后续微积分的发展提供了非常好的载体。

皮耶·德·费马(1601~1665)独立于勒内·笛卡尔也发现了解析几何的基本原理，区别在于笛卡尔是从一个轨迹来寻找其方程，而费马则是从方程出发来研究轨迹，这正是解析几何基本原则的两个相对方面。此外，费马在求函数的极值和曲线的切线时，使用了“虚拟等式法”，该方法的本质已经和现代导数的定义非常接近。

2.3. 创立阶段

艾萨克·牛顿(1643~1727)从物理运动中创造出了“流数法”，用来描述变量随时间变化的速率，分为正流数术和反流数术。前者关注于变化率，而后者则关注于累积量的计算，分别对应微分和积分。因此，“流数术”可视为微积分的早期形式。牛顿在著作《流数法与无穷级数》中还介绍了“流数法”的应

用，例如通过流数为 0 来确定极值、绘制曲线切线和计算曲率等。同时书中还广泛讨论了无穷级数的应用，包括用无穷级数求解微分方程的详细讨论，如图 3、图 4 所示。



and INFINITE SERIES. 33

33. RULE. The Equation being thus prepared, when need requires, diſpoſe the Terms according to the Dimenſions of the flowing Quantities, by ſetting down firſt thoſe that are not affected by the Relate Quantity, then thoſe that are affected by its leaſt Dimenſion, and ſo on. In like manner alſo diſpoſe the Terms in each of theſe Claſſes according to the Dimenſions of the other Correlate Quantity, and thoſe in the firſt Claſs, (or ſuch as are not affected by the Relate Quantity,) write in a collateral order, proceeding towards the right hand, and the reſt in a deſcending Series in the left-hand Column, as the following Diagrams indicate. The work being thus prepared, multiply the firſt or the loweſt of the Terms in the firſt Claſs by the Correlate Quantity, and divide by the number of Dimenſions, and put this in the Quote for the initial Term of the Value of the Relate Quantity. Then ſubſtitute this into the Terms of the Equation that are diſpoſed in the left-hand Column, inſtead of the Relate Quantity, and from the next loweſt Terms you will obtain the ſecond Term of the Quote, after the ſame manner as you obtain'd the firſt. And by repeating the Operation you may continue the Quote as far as you pleaſe. But this will appear plainer by an Example or two.

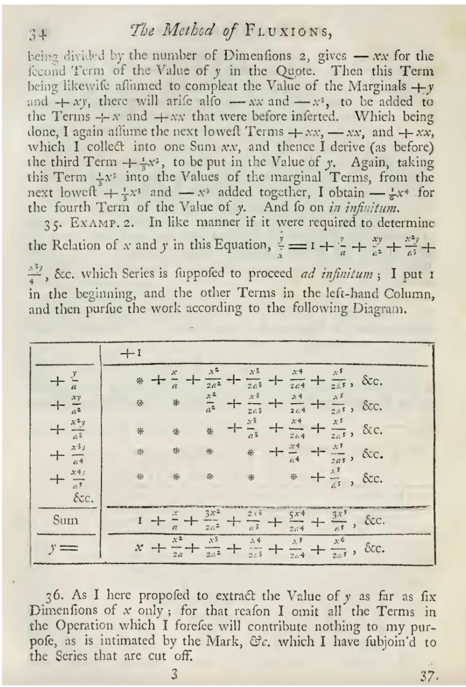
34. EXAMP. 1. Let the Equation $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$ be propoſed, whoſe Terms $1 - 3x + x^2$, which are not affected by the Relate Quantity y, you ſee diſpos'd collaterally in the uppermoſt Row, and the reſt y and xy in the left-hand Column.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$, &c.
$+xy$	$* \quad * + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$, &c
The Sum	$1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$, &c.
$y =$	$x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$, &c.

And firſt I multiply the initial Term 1 into the Correlate Quantity x, and it makes x, which being divided by the number of Dimenſions 1, I place it in the Quote under-written. Then ſubſtituting this Term inſtead of y in the marginal Terms $+y$ and $+xy$, I have $+x$ and $+xx$, which I write over againſt them to the right hand. Then from the reſt I take the loweſt Terms $-3x$ and $+x$, whoſe aggregate $-2x$ multiply'd into x becomes $-2xx$, and

F being

Figure 3. Example 34 from "The Method of Fluxions and Infinite Series"
图 3. 《流数法与无穷级数》例 34



34 *The Method of* FLUXIONS,

being divided by the number of Dimenſions 2, gives $-xx$ for the ſecond Term of the Value of y in the Quote. Then this Term being likewiſe aſſumed to compleat the Value of the Marginals $+y$ and $+xy$, there will ariſe alſo $-xx$ and $-x^3$, to be added to the Terms $+x$ and $+xx$ that were before inſerted. Which being done, I again aſſume the next loweſt Terms $+xx$, $-xx$, and $+xx$, which I collect into one Sum xx, and thence I derive (as before) the third Term $+\frac{1}{3}x^3$, to be put in the Value of y. Again, taking this Term $\frac{1}{3}x^3$ into the Values of the marginal Terms, from the next loweſt $+\frac{1}{3}x^3$ and $-x^3$ added together, I obtain $-\frac{1}{6}x^4$ for the fourth Term of the Value of y. And ſo on *in infinitum*.

35. EXAMP. 2. In like manner if it were required to determine the Relation of x and y in this Equation, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2} + \frac{x^2y}{a^3} + \frac{x^3y}{4}$, &c. which Series is ſuppoſed to proceed *ad infinitum*; I put 1 in the beginning, and the other Terms in the left-hand Column, and then purſue the work according to the following Diagram.

	$+1$
$+\frac{y}{a}$	$* + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$, &c.
$+\frac{xy}{a^2}$	$* \quad * \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$, &c.
$+\frac{x^2y}{a^3}$	$* \quad * \quad * + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$, &c.
$+\frac{x^3y}{a^4}$	$* \quad * \quad * \quad * + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$, &c.
$+\frac{x^4y}{a^5}$ &c.	$* \quad * \quad * \quad * \quad * + \frac{x^5}{a^5}$, &c.
Sum	$1 + \frac{x}{a} + \frac{3x^2}{2a^2} + \frac{2x^3}{a^3} + \frac{5x^4}{2a^4} + \frac{3x^5}{a^5}$, &c.
$y =$	$x + \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{2a^2} + \frac{x^4}{2a^3} + \frac{x^5}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^5}$, &c.

36. As I here propoſed to extract the Value of y as far as ſix Dimenſions of x only; for that reaſon I omit all the Terms in the Operation which I foreſee will contribute nothing to my purpoſe, as is intimated by the Mark, &c. which I have ſubjoin'd to the Series that are cut off.

3 37.

Figure 4. Example 35 from "The Method of Fluxions and Infinite Series"
图 4. 《流数法与无穷级数》例 35

戈特弗里德・威廉・莱布尼茨(1646~1716)在论文《一种求极大、极小值与切线的新方法》中通过无穷小差分和无穷小求和构建了微积分体系，并引入了沿用至今的符号，他用 dx 表示无穷小，用 $\frac{dy}{dx}$ 表示切线斜率和用 $\int$ 表示积分符号，可见图 5。同时，给出了计算和、积、商、幂、根的微分法则，并列举切线、拐点等微分应用实例，研究了一阶微分方程的解法。莱布尼茨的符号优于牛顿采用的“流数”说法和符号。

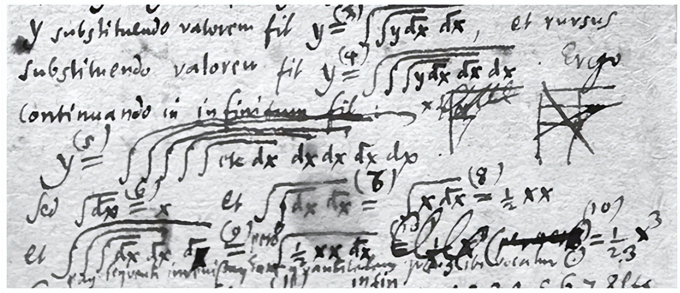


Figure 5. Leibniz’s manuscript
图 5. 莱布尼茨手稿

2.4. 初步应用及理论严格化阶段

莱昂哈德・欧拉(1707~1783)在其著作《微分学原理》和《积分学原理》中对当时的微积分方法作了最详尽系统的解说，进一步丰富可无穷小分析的这两个分支。在其论文中，他还解决了 n 阶常系数线性齐次方程，引入指数函数猜想解 e^{rx}，导出特征方程，并处理了复根情况，建立通解、特解等理论。

让・勒朗・达朗贝尔(1717~1783)首次将导数定义为“极限”，并且提出了一种判别级数绝对收敛的方法——达朗贝尔判别法。

奥古斯丁・路易斯・柯西(1789~1857)提出用不等式描绘极限，并以极限为基础建立逻辑清晰的微积分定义，把定积分定义为和的“极限”。同时提出了级数收敛性理论并给出了严谨的判别方法。

卡尔・特奥多尔・威廉・魏尔斯特拉斯(1815~1897)给出了极限的清晰严密的“$\varepsilon-\delta$”定义。该定义第一次使连续、极限、微分、积分等概念彻底摆脱了几何和运动的局限，同时也克服了以往无穷大、无穷小概念模糊的缺陷。

3. 历史沿革和教学顺序对比

将微积分理论发展历史和高等数学教材内容顺序进行对比可以发现，历史发展是由问题驱动而交叉演进的，而教材顺序是将逻辑重构后循序渐进的，见图 6。

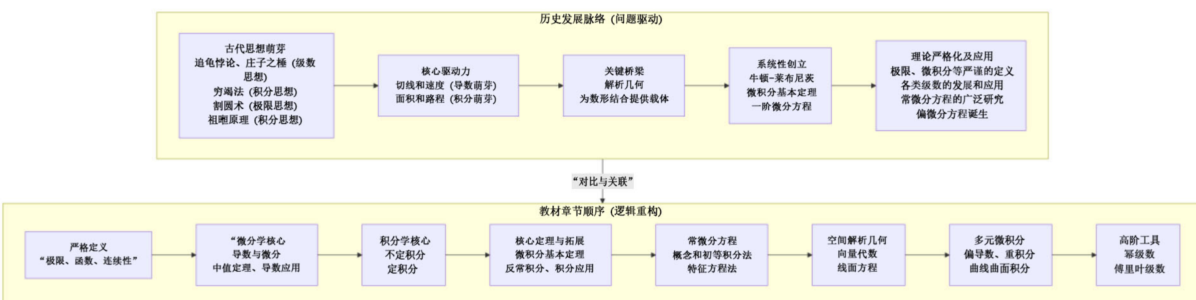


Figure 6. Comparison of historical development and teaching chapter sequence
图 6. 历史发展脉络和教学章节顺序对比

从历史脉络可以看出，最先萌芽的其实是无穷级数、积分和极限的思想。随后，随着解析几何的建立，从曲线切线等问题中产生了微分思想，积分理论也得到进一步发展。后来，牛顿和莱布尼茨分别从物理和几何角度发展出了系统的微积分运算，同时用于描述物理与天文问题的微分方程也随之出现。又经过近一百年的努力，微积分、级数、极限等理论才得以以明确且严密的方式最终确立。知识的发展顺序符合人类的思维发展顺序，但是，我们教学的时候是先从严格的极限“$\varepsilon-\delta$”定义开始的，因此，很多同学会感到理解困难，进而也不容易理解后续章节用“$\varepsilon-\delta$”语言定义的导数、定积分和无穷级数敛散，也就不擅长使用“$\varepsilon-\delta$”语言做证明推导。事实上，这种教学安排是更加科学严谨的，只有用这套严格的“$\varepsilon-\delta$”定义，才能更确定方便地描述微积分并应用它，之前困扰牛顿和莱布尼茨的“幽灵的无穷小”就不再是问题。反观无穷级数，它是最初就萌芽的思想，但一般数学教材都将其安排在靠后章节。这是因为，随着微积分的严谨化及其应用的扩展，无穷级数的严格定义与敛散性判别才更容易建立；此时，无穷级数本身也已成为广泛应用于信号处理、微分方程求解及计算等领域的分析工具[10] [11]。

4. 微积分发展历史在高等数学教学中的实践研究

以往教学中，在讲解概念和定义前也会提及当前理论发展的相关历史背景，但都以直接介绍的方式，学生难以将背景和课堂知识建立有效联想。尤其对于微积分这种历经千百年交叉演进而成的成熟理论，单一的历史片段更难展示其思想发展的全貌。若直接将理论结果展示给学生，又缺乏解决问题的动机，导致理论不易被接受。因此，笔者在上一学年所授的两个高等数学班级中，开展了如下对比实践。

4.1. 课堂实践

实验组：1) 在高等数学课程的第一节课上，没有直接开始课程内容，而是模拟历史进程，让学生们将自己置于历史中，按时间顺序，思考并讨论推动微积分发展的一些代表性问题：庄子之棰、追龟悖论、用割圆术计算圆面积、等幂势体积、匀加速直线运动及其运动方程、作匀加速直线运动速度直线图并通过面积计算路程、曲线切线。并将思考的灵感、计算的过程以及疑问记录下来，在后续学习过程中可以拿来回顾。部分同学在高中阶段接触过导数，但在这节课上要求大家暂时忘掉导数知识，用自己的想法去考虑问题，感受前人的探索之路。2) 讨论结束后老师总结同学们讨论的历史进程并查漏补缺，课后让同学们整理本节课梳理的历史进程和讨论的内容作为笔记。3) 在后续课程中，当开始学习新的理论概念时，同学们先从第一节课的笔记中回顾相关历史背景，老师也翻出第一节课梳理的内容和同学们一起回顾，且回顾方式以同学们自己说为主，老师补充为辅。

对照组：按照常规的教学顺序，在讲解某个知识点之前，以老师讲解为主的方式补充相应的历史背景，虽然最终和甲班了解到的微积分历史沿革总内容一致，但是历史背景并非按时间顺序连贯了解。

4.2. 问卷反馈

对两班(每班 30 位同学)做了问卷调查，详见表 1、表 2。通过对比两个班的问卷数据发现，在集中系统地梳理过知识历史背景的实验组中，对抽象的极限定义明显更容易理解和接受，而且比较关注知识的应用，对高数知识的兴趣也更为浓厚，形成清晰知识网络的比例也更高；同时，也对数学发展史本身有较多的兴趣，且更认可知识的背景历史对学习高数课程的帮助。

4.3. 成绩评价

基于超星学习通的《高等数学》在线课程，设计了“微积分概念理解测试卷”作为后测工具，测试卷分值 100 分，题型包括：判断题、单选题、多选题、填空题、证明题。测试卷对应的具体知识点包括：

数列和函数的定义及性质、无穷小的定义和比较、函数连续的定义、导数和微分的概念及性质、不定积分的概念和性质、定积分的概念和性质、偏导数的定义和性质、全微分的定义及几何意义、重积分的概念和性质、曲线和曲面积分的概念及性质、数项级数和函数项级数的概念和性质。采用 SPSS 软件对实验组和对照组两班的测试成绩进行了统计分析，详见表 3。可以看出，通过集中梳理微积分发展历史进行教学，学生的优秀人数有所增加，总分平均分有所提高。

Table 1. Statistical analysis of questionnaire data for the experimental group
表 1. 实验组问卷数据统计

实验组问卷调查数据统计表			
1) 你对高等数学课程内容的历史背景			
完全了解 46.62%	大部分了解 49.95%	少量了解 3.33%	不了解 0%
2) 你认为“ε − δ”语言定义极限的方式			
方便理解 86.58%	不方便理解 13.32%		
3) 你是否了解微积分数学工具应用的问题			
了解很多 63.27%	了解一些 26.64%	了解一点 9.99%	不了解 0%
4) 你对学习高等数学课程			
非常有兴趣 36.63%	有一定兴趣 59.94%	没有想法 3.33%	
5) 你的高等数学知识			
构成完整清晰的知识网络 39.96%	基本构成了知识网 56.61%	未形成知识网络 3.33%	
6) 你是否通过网络、书籍等渠道了解过微积分的发展史			
是 86.58%	否 13.32%		
7) 你认为梳理微积分发展史对学习高等数学			
很有帮助 46.62%	有一些帮助 43.29%	没有影响 0%	不清楚有无影响 9.99%
8) 你对了解高等数学知识的发展历史			
非常好奇 39.96%	比较好奇 53.28%	不好奇 6.66%	

Table 2. Statistical analysis of questionnaire data for the control group
表 2. 对照组问卷数据统计

对照组问卷调查数据统计表			
1) 你对高等数学课程内容的历史背景			
完全了解 16.65%	大部分了解 43.29%	少量了解 29.97%	不了解 9.99%
2) 你认为“ε − δ”语言定义极限的方式			
方便理解 36.63%	不方便理解 63.27%		
3) 你是否了解微积分数学工具应用的问题			
了解很多 36.63%	了解一些 33.3%	了解一点 29.97%	不了解 0%
4) 你对学习高等数学课程			
非常有兴趣 39.96%	有一定兴趣 46.62%	没有想法 13.32%	
5) 你的高等数学知识			
构成完整清晰的知识网络 23.31%	基本构成了知识网 63.27%	未形成知识网络 13.32%	

续表

6) 你是否通过网络、书籍等渠道了解过微积分的发展史			
是 69.93%	否 29.97%		
7) 你认为梳理微积分发展史对学习高等数学			
很有帮助 23.31%	有一些帮助 33.3%	没有影响 16.65%	不清楚有无影响 26.64%
8) 你对了解高等数学知识的发展历史			
非常好奇 23.31%	比较好奇 59.94%	不好奇 16.65%	

Table 3. Student performance evaluation
表 3. 学生成绩评价

组别	班级人数	分数段			总分($\overline{\chi} \pm s$)
		优(90~99 分)	良(80~89 分)	中(70~79 分)	
实验组	30	16 (53.3%)	14 (46.7%)	0 (0%)	91.6 ± 5
对照组	30	9 (30.0%)	16 (53.3%)	5 (16.7%)	$88.2 \pm 7.4^{*}$

备注：*与实验组比 $P < 0.05$。

5. 总结

本文将微积分发展历史融入高等数学课程的教学中，加深了学生对高等数学内容发展历程的了解，提升了学生的学习兴趣，帮助学生更清晰地构建了高等数学的知识网络，对概念知识的理解和掌握起到了积极的推进作用。然而，本研究样本基数不大，对比参数也有限，并不能因此就判断甲班的教学成果更好。但是，本研究确实是一个有意义的实践尝试，在后续的教学中也会继续注重知识和发展背景的连接。

参考文献

[1] 岳增成, 汪晓勤. 国际数学史与数学教育(HPM)发展历程及启示[J]. 上海教育科研, 2022(4): 84-92.

[2] 刘思璐, 汪晓勤. 基于国际视角的数学史与数学教育研究现状分析——14 之专题综述[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 98-102.

[3] 殷如意, 刘冬冬, 李艳辉. 融合赋能阶段中国 HPM 的研究与发展——以《数学教育学报》《数学通报》《中学数学月刊》载文为例[J]. 中学数学月刊, 2024(1): 57-63.

[4] 余庆纯, 汪晓勤. 基于数学史的数学文化内涵实证研究[J]. 数学教育学报, 2020(3): 68-74.

[5] 同济大学数学科学学院. 高等数学[M]. 第八版. 北京: 高等教育出版社, 2023.

[6] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2019.

[7] 成立社. 微积分(经管类) [M]. 第二版. 北京: 科学出版社, 2017.

[8] 马建忠. 医学高等数学[M]. 第四版. 北京: 科学出版社, 2019.

[9] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2013.

[10] 刘帅, 陈永玲, 王立成. 傅里叶级数及其在信号处理领域的应用[J]. 理论数学, 2025(3): 196-202.

[11] 王寿梅, 赵国兴. 用泰勒级数求解非线性代数和微分方程组[J]. 北京航空航天大学学报, 1996(3): 326-331.