

新工科背景下有限元教学的多维度提升

——以刚度矩阵的生成和组装为例

夏雪, 鲍四元*^{ORCID}, 沈峰

苏州科技大学土木工程学院, 江苏 苏州

收稿日期: 2026年2月13日; 录用日期: 2026年4月13日; 发布日期: 2026年4月23日

摘要

新工科建设作为中国工程教育改革的重要方向, 旨在培养适应新技术革命和产业变革的创新型复合型人才。有限元分析中的刚度矩阵生成与组装是工程力学课程的核心知识点, 但传统教学模式存在理论与实践脱节、内容抽象、学生参与度低等问题。文章以刚度矩阵的生成和组装为例, 提出多维度教学提升策略: 结合虚拟仿真软件实现理论与实践融合, 采用Hermite多项式单元简化计算, 通过MATLAB和Mathematica通用函数强化计算能力训练, 最终构建“理论-实践-计算”三位一体的教学体系。实践表明, 该方法显著提升了学生对复杂力学概念的理解深度和工程应用能力, 为新工科背景下工程力学教学改革提供了可借鉴的路径。

关键词

新工科, 有限元分析, Hermite多项式, 刚度矩阵的组装, MATLAB, Mathematica

Multidimensional Enhancement of Finite Element Teaching in the Background of New Engineering

—A Case Study on the Generation and Assembly of Stiffness Matrix

Xue Xia, Siyuan Bao*^{ORCID}, Feng Shen

School of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou Jiangsu

Received: February 13, 2026; accepted: April 13, 2026; published: April 23, 2026

*通讯作者。

Abstract

As an important direction of China's engineering education reform, the construction of New Engineering aims to cultivate innovative and composite talents to adapt to the new technological revolution and industrial transformation. The generation and assembly of the stiffness matrix in finite element analysis are core knowledge points in the engineering mechanics curriculum. However, the traditional teaching mode has problems such as the disconnection between theory and practice, the abstraction of content, and the low participation of students. Taking the generation and assembly of the stiffness matrix as an example, this paper proposes a multidimensional teaching improvement strategy: combining virtual simulation software to integrate theory and practice, using Hermite polynomial elements to simplify the calculation, and using MATLAB/Mathematica universal functions to strengthen the training of computational ability, and finally constructing a "theory-practice-calculation" integrated teaching system. Practice shows that this method has significantly improved students' understanding of complex mechanical concepts and their ability to apply engineering, and has provided a reference for the reform of engineering mechanics teaching under the background of New Engineering.

Keywords

New Engineering, Finite Element Analysis, Hermite Polynomials, Assembly of Stiffness Matrix, MATLAB, Mathematica

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

新工科建设作为中国工程教育改革的重要方向，正逐步深化并推动工程教育理念、模式和方法的全方位创新。2017年“复旦共识”[1][2]、“天大行动”[3][4]和“北京指南”[5]的提出，为工程教育的创新发展描绘了清晰的路线图，旨在培养适应新技术革命和产业变革的创新型复合型人才。在这一背景下，工程教育的教学内容和教学方法亟待革新，以满足新工科对人才培养的高标准要求[6]。

在工程力学领域，刚度矩阵的生成和组装是结构力学、有限元分析等课程中的核心知识点，也是学生理解和掌握工程结构分析的关键环节。然而，传统的教学模式往往存在理论与实践脱节的问题，学生在学习过程中容易感到抽象和难以理解，缺乏将所学知识灵活运用到实际工程问题中的能力。此外，教学内容的呈现方式较为单一，难以激发学生的学习兴趣和创新思维。

为解决这些问题，本文以刚度矩阵的生成和组装为例，探讨在新工科背景下如何实现教学的多维度提升。通过结合新工科建设理念，提出将理论知识、项目式教学与实践操作相结合的教学方法[7]-[9]。具体而言，运用相关的虚拟仿真软件来分析简单的结构模型，让学生在解决问题的过程中，理解刚度矩阵的生成原理和组装方法，培养学生的工程实践能力。同时，借鉴力学通识教育的理念，将基础力学知识与刚度矩阵的理论教学相结合，采用由浅入深、循序渐进的方式，降低学生对抽象理论的理解难度，提高学生的学习兴趣 and 参与度[10]。此外，注重实践操作环节，让学生亲身体验刚度矩阵在工程中的应用，提高学生的动手能力和创新思维。

2. 有限元刚度矩阵的基本理论

有限元的基本思想是，在弹性体内选取足够多、有限数量的具有代表性的点，假定这些点的位移已知，再用这些假定的位移量描述其他位置点的位移，就得到了用特定点位移表示的弹性体的位移场，这些选定的有代表性的点称为节点。为了较准确反映原结构特征，通常，尖点、拐角、界面改变处、位移约束位置、集中载荷作用点等特殊、具有代表性的点都应选为节点[11]。

在整个有限元分析过程中，有限元刚度矩阵占据着核心地位，它精准地反映了物体在受力后各个节点的力与位移之间的定量关系。在完成单元刚度方程之后，建立整个计算模型的整体刚度方程成为求解前关键的一步。而能否准确地将各个单元的刚度矩阵组装成整体刚度矩阵，直接关系到最终计算结果的可靠性。

2.1. 单元刚度矩阵的确定

在建立了单元位移模式之后，确定单元内的位移场，根据几何方程确定单元上任意一点的应变，建立应变与节点位移之间的关系；再根据物理方程计算单元上一点的应力；利用虚位移原理或最小势能原理，建立单元的能量与节点位移之间的关系，形成单元刚度矩阵。

对于单元 i ，其单元刚度矩阵的大小取决于单元的自由度数。以二维平面问题中的常应变三角形单元为例，假设每个节点有 2 个自由度(位移在 x 和 y 方向)，若单元有 3 个节点，则单元刚度矩阵为 6×6 矩阵。其推导过程通常基于虚功原理或最小势能原理，通过单元的形状函数、材料属性(弹性模量、泊松比等)以及几何参数来确定。

2.2. 整体刚度矩阵的建立

整体刚度矩阵是由各个单元刚度矩阵通过节点自由度的对应关系进行组装而成的。每个单元的节点自由度与整体结构的节点自由度存在映射关系，通过这种映射，将单元刚度矩阵中的元素分配到整体刚度矩阵的相应位置上。例如，当组装一个四节点四边形单元矩阵到整体刚度矩阵时，需要将 8×8 维数的该单元刚度矩阵中每个元素，按照单元节点编号与整体节点编号的对应关系，叠加到整体刚度矩阵中对应的行和列位置上，最终形成完整的结构刚度矩阵。

3. 刚度矩阵生成前的关键步骤及准备

在有限元分析领域，生成刚度矩阵是求解工程结构力学问题的关键环节。而在此之前，一系列准备工作至关重要，它为刚度矩阵的形成提供了准确依据，确保了后续分析的可靠性。

3.1. 问题定义与分析

3.1.1. 明确结构类型与几何形状

明确所分析的结构是梁、桁架、刚架、板、壳还是三维实体结构等。不同结构形式的力学特性和分析方法存在差异。如梁单元适用于承受弯曲和轴向力的构件，桁架单元仅承受轴向力。单元类型的选择需与结构的几何形状、受力特点相关，例如分析高层建筑框架结构时，梁柱可选用梁单元，支撑可选用桁架单元。

3.1.2. 确定材料属性

不同材料具有独特的物理特性，这些特性直接影响结构在受力后的变形或响应。因此，确定结构所用材料的各项物理参数是必不可少的步骤。以钢材为例，其弹性模量通常为 210 GPa，泊松比约为 0.3。这些参数将直接参与单元刚度矩阵的计算，其准确性关乎整个分析结果的可靠性。在实际工程中，需根据材料的质量证明文件或实验测试数据，获取精确的材料属性，以确保分析结果与实际情况相符。

3.1.3. 分析边界条件和载荷情况

边界条件和载荷情况的确定是有限元分析中至关重要的环节。对于简支梁结构，其边界条件为两端在竖直方向上的位移被约束，而在水平方向上的位移则可自由伸缩。在载荷方面，可能受到集中力、分布力等多种形式的作用。例如，在梁的中点处可能作用一个 10 kN 的集中力，或者在梁的上表面可能承受一个均匀分布的均布载荷，其大小为 5 kN/m²。这些载荷将引起结构的变形和应力分布，准确识别载荷的大小、方向和作用位置是模拟真实受力情况的前提，为后续分析提供了准确的边界和载荷信息。

3.2. 结构的离散化

3.2.1. 选择合适的单元类型

根据结构的几何形状和力学特性，选择恰当的单元类型是离散化的关键步骤。如对于梁结构，Hermite 多项式单元是一种理想的选择。与传统的 Lagrange 单元相比，Hermite 单元不仅可以描述位移的分布，还能考虑位移的一阶导数(如转角)的连续性，这使得它在分析梁的弯曲问题时具有更高的精度。例如，在分析简支梁的弯曲变形时，选择 Hermite 多项式单元可以更好地捕捉梁的转角变化，从而更准确地预测梁的变形和应力分布。

3.2.2. 划分单元和节点编号

将整个结构划分成有限个单元，并对单元和节点进行编号。在划分单元时，应遵循一定的原则。首先，单元的形状应规则，大小应适中，避免出现长宽比过大的单元，以保证计算的稳定性。其次，对于应力变化较大的区域，如梁的支座附近或集中力作用点附近，应适当细化单元，以提高分析精度。例如，在简支梁的支座附近，将单元长度设置为 0.1 m，而在梁的中部区域，单元长度可以适当增大。同时，合理安排节点编号顺序，可以减少刚度矩阵的带宽，提高计算效率。通常采用蛇形编号或分块编号等方法，使相邻节点的编号尽可能相近[12]。

3.3. 单元分析

3.3.1. 建立局部坐标系

为每个单元建立局部坐标系是单元分析的基础。对于梁单元，通常以梁的轴线为局部坐标轴，例如，以梁的左端点为原点，沿梁的长度方向为 x 轴，垂直于梁的轴线向上为 y 轴，建立局部坐标系。这种局部坐标系的建立有助于简化单元的分析过程，便于描述单元的位移场和应力场。在 Hermite 多项式单元中，局部坐标系的建立还可以方便地引入转角等高阶自由度，使得单元能够更准确地描述梁的弯曲变形。

3.3.2. 利用 Hermite 多项式单元推导单元刚度矩阵

Hermite 多项式单元在描述梁的弯曲问题时具有独特的优势。以简支梁为例，假设每个节点有 2 个自由度：位移在 y 方向的位移 u 和转角 θ 。对于一个具有两个节点的梁单元，其位移场可以表示为：

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

为了确保位移和转角在单元接口处的连续性，利用 Hermite 多项式插值函数来表示位移场。通过 Hermite 插值，可以建立位移场与节点位移和转角之间的关系：

$$u(x) = N_1(x)u_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)u_2 + N_4(x)\theta_2$$

其中 $N_1(x), \dots, N_4(x)$ 是区间 $[0, L]$ 上的 Hermite 插值函数，它们的表达式为：

$$N_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \quad N_2(x) = L\left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$$N_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3; \quad N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

其中 L 为单元长度, 根据虚功原理或最小势能原理, 可以推导出梁单元的单元刚度矩阵, 其单元刚度矩阵的维数大小为 4×4 。代入具体的材料属性参数(弹性模量 E 、截面惯性矩 I 等)以及几何参数(单元长度 L 等), 可以计算出单元刚度矩阵的各个元素。

针对上述提到的 Hermite 多项式, 运用 MATLAB 软件对 Hermite 多项式进行训练, 并将其应用于有限元分析中, 以提高结构分析的精度和效率[13]。下面给出一个关于函数 $f(x) = x^{3/2}$ 的三次 Hermite 插值的求解代码及结果, 如表 1 所示。

Table 1. Numerical implementation and results of cubic Hermite interpolation for $f(x) = x^{3/2}$

表 1. 函数 $f(x) = x^{3/2}$ 的三次 Hermite 插值的求解代码及结果

代码 1
<pre> syms x; f=x^(3/2); % 需要逼近的函数 X=[1/4,1]; %插值点 Y=[1/8,1]; %插值点的函数值 D=[3/4,3/2]; %插值点处的导数值 [h0,h1,g0,g1]=GetBasics(X) H3=h0*Y(1)+h1*Y(2)+g0*D(1)+g1*D(2); n=linspace(1/4,1,500); F=subs(f,x,n); H=subs(H3,x,n); function [h0,h1,g0,g1]=GetBasics(X) syms x; h0=(1+2*(x-X(1))/(X(2)-X(1)))*((x-X(2))/(X(2)-X(1)))^2; h1=(1+2*(x-X(2))/(X(1)-X(2)))*((x-X(1))/(X(2)-X(1)))^2; g0=(x-X(1))*((x-X(2))/(X(2)-X(1)))^2; g1=(x-X(2))*((x-X(1))/(X(2)-X(1)))^2; end </pre>

其中根据 GetBasics 函数中四个基函数结果如下:

$$h_0 = \left(\frac{4x}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 \left(\frac{8x}{3} + \frac{1}{3}\right)$$

$$h_1 = -\left(\frac{4x}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{8x}{3} - \frac{11}{3}\right)$$

$$g_0 = \left(\frac{4x}{3} - \frac{4}{3}\right)^2 \left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$g_1 = \left(\frac{4x}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 (x - 1)$$

通过上述示例, 可知运用 MATLAB 能够快速得到原函数的 Hermite 插值形式 H3, 然后对比所得插值函数和原函数在插值点的函数值, 反映插值函数的精度。也便于应用有限元法对结构进行静力学和动力学分析。

3.3.3. 计算单元刚度矩阵

在确定了单元的形状函数、材料属性和几何参数后，就可以利用公式计算单元刚度矩阵。单元刚度矩阵体现了单元在局部坐标系下，节点位移和转角与节点力之间的定量关系，为后续的整体刚度矩阵组装提供了基础数据。

3.4. 坐标变换

3.4.1. 建立整体坐标系

为了统一描述整个结构的变形和受力情况，需要建立一个整体坐标系。通常选择笛卡尔坐标系作为整体坐标系，其原点可以设置在结构的某个关键位置，例如结构的中心点或支座点。坐标轴的方向应根据结构的几何形状和受力特点进行合理选择，以便于描述结构的变形和应力分布。

3.4.2. 进行坐标变换

在有限元分析中，部分单元的局部坐标系可能与整体坐标系不一致。此时，需要将单元刚度矩阵从局部坐标系转换到整体坐标系。通过坐标变换矩阵，可以实现这种转换。

4. 刚度矩阵组装的通用函数和示例

组装刚度矩阵的过程相对复杂，必须仔细处理。它是一个有序的过程，需要根据自由度的编号将局部刚度矩阵的元素放置到全局刚度矩阵的正确位置上。每个局部单元刚度矩阵的元素需要通过元素编号和自由度编号来进行定位。自由度编号的连续性是必要的，否则可能导致组装过程出错，使得最终的全局刚度矩阵出现问题。通过上述内容我们明白了单元刚度矩阵如何建立，以及如何将单元刚度矩阵组装成整体刚度矩阵的方法。为了减少程序编写可能的错误及提高组装程序代码的通用性，本文将分别给出基于 MATLAB 和 Mathematica 的刚度矩阵组装通用函数和示例。

4.1. 基于 MATLAB 的刚度矩阵组装通用函数

有限单元中单元繁多，常见的如杆单元、梁单元、三节点三角形单元、八节点六面体单元等，由于这些单元的节点数和节点自由度数往往不同，在组装单元刚度矩阵时，教材中的各单元刚度矩阵组装函数的具体形式不同。为了使这些函数形式相同，编制通用的 MATLAB 函数如表 2，其中：

K: 整体刚度矩阵；

ke: 单元刚度矩阵；

nodes: 所有节点的坐标信息(行为节点数，列为坐标维度)；

element: 单元节点(行为单元数，列为单元包含节点数)。

Table 2. General MATLAB function for stiffness matrix assembly

表 2. 基于 MATLAB 的刚度矩阵组装通用函数

代码 2

```
function K = AssembleStiffnessMatrix(nodes, elements, ke)
% 每节点自由度数
num_element_nodes = size(elements,2);
dof_per_node = size(ke,1) / num_element_nodes;
total_dof = num_nodes * dof_per_node;
% 初始化稀疏矩阵
K = sparse(total_dof, total_dof);
```

续表

```

% 单元循环(仅保留一层循环)
for e = 1:size(elements,1)
    elem_nodes = elements(e,:);
    % 构造自由度映射向量
    dof_map = zeros(1, num_element_nodes*dof_per_node);
    for i = 1:num_element_nodes
        base = (elem_nodes(i)-1)*dof_per_node;
        dof_map((i-1)*dof_per_node+1 : i*dof_per_node) = ...
            base + (1:dof_per_node);
    end
    % 向量化组装
    K(dof_map, dof_map) = K(dof_map, dof_map) + ke;
end
end

```

4.2. 通用 MATLAB 组装函数的运用示例

以一个二维三角形单元为例，展示如何使用代码 2 中的组装函数来组装二维平面的整体刚度矩阵。

问题描述：三个节点，编号为 1、2、3；每个节点两个自由度(x、y 方向位移)；节点坐标分别为(0, 0)、(1, 0)和(0, 1)，具体运用见表 3。

Table 3. Numerical example 1

表 3. 示例 1

示例 1

```

% 定义节点坐标和单元
nodes = [1, 0, 0; 2, 1, 0; 3, 0, 1]; % 节点编号、x 坐标、y 坐标
elements = [1, 2, 3]; % 单元定义
% 定义单元刚度矩阵(6×6, 每个节点有两个自由度)
ke = 
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

% 调用组装函数
K = AssembleStiffnessMatrixSparse(nodes, elements, ke);
% 输出整体刚度矩阵
disp("整体刚度矩阵 K(稀疏格式) = ");
disp(K);
disp("整体刚度矩阵 K = ");
disp(full(K));
end
function K = AssembleStiffnessMatrixSparse(nodes, elements, ke)
num_nodes = size(nodes, 1); % 节点总数 n
nen = size(elements, 2); % 每单元节点数 nen
% 每节点自由度 dof_per_node

```

续表

```

dof_per_node = size(ke, 1) / nen;
if abs(dof_per_node - round(dof_per_node)) > 1e-12
    error("ke 尺寸与单元节点数不匹配, 无法得到整数自由度数。");
end
dof_per_node = round(dof_per_node);
total_dof = num_nodes * dof_per_node;
% 初始化稀疏矩阵
K = sparse(total_dof, total_dof);
% 组装: 仅保留一层单元循环
for e = 1:size(elements, 1)
    elem_nodes = elements(e, :); % 该单元的节点编号
    % 构造自由度映射向量
    dof_map = zeros(1, nen * dof_per_node);
    for i = 1:nen
        base = (elem_nodes(i) - 1) * dof_per_node;
        dof_map((i-1)*dof_per_node + 1 : i*dof_per_node) = base + (1:dof_per_node);
    end
    % 向量化组装
    K(dof_map, dof_map) = K(dof_map, dof_map) + ke;
end
end

```

运行结果如下所示:

$$\text{整体刚度矩阵 } K : \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

通过对二维三角形单元的整体刚度矩阵组装, 验证了 MATLAB 通用函数的有效性和准确性, 为实际工程中更复杂的结构分析提供了可靠的计算基础, 教师可让学生课堂讲授或课后继续练习组装 2 个三角形单元的例子。

4.3. 基于 Mathematica 的刚度矩阵组装通用函数

由于不同软件的运行环境和模块语法不同, 下面给出基于 Mathematica 环境下的刚度矩阵组装的通用函数, 见表 4 所示的 GeneralAssemble 函数。其中变量含义如下:

m: 局部刚度矩阵;

GlobalK: 整体刚度矩阵;

p: 节点编号列表, 表示每个元素的节点编号;

dimofEachNode: 每个节点的自由度数量。

4.4. 通用 Mathematica 组装函数的运用示例

采用上文所提到二维三角形单元为例, 使用代码 3 中的组装函数来组装二维平面的整体刚度矩阵。具体运用见表 5 所示。

Table 4. General Mathematica function for stiffness matrix assembly
表 4. 基于 Mathematica 的刚度矩阵组装通用函数

代码 3

```
GeneralAssemble[p_, m_] := Module[{}, dimofEachNode = Length[m]/Length[p];
  For[j = 1, LessEqual[j, Length[p]], j++(*correspond to row in elem-matrix*),
    For[k=1, LessEqual[k, Length[p]], k++(* k is the y-direction global nodes, correspond to column in element matrix*),
      For[i=1, LessEqual[i, dimofEachNode],
        i++(*freedom of one direction in Global-matrix, where dimofEachNode is freedom number of a node*),
          For[L = 1, LessEqual[L, dimofEachNode],
            L++(*freedom of another dim in Global matrix*),
              GlobalK[[dimofEachNode (p[[j]] - 1) + i,
                dimofEachNode (p[[k]] - 1) + L]] +=
                m[[dimofEachNode (j - 1) + i,
                  dimofEachNode (k - 1) + L]]; ];
            ];
          ];
        ];
      ];
    ];
  ](*ending of Module*)
```

Table 5. Numerical example 2
表 5. 示例 2

示例 2

```
GeneralAssemble 函数的定义同代码 3。
(* 2) 节点与单元 *)
nodes = {{1, 0, 0}, {2, 1, 0}, {3, 0, 1}};
elements = {{1, 2, 3}}; (* 1 个三角形单元 *)
(* 3) ke(6×6)*)
ke = {
  {1, -1, 0, 0, 0, 0},
  {-1, 2, -1, 0, 0, 0},
  {0, -1, 2, -1, 0, 0},
  {0, 0, -1, 2, -1, 0},
  {0, 0, 0, -1, 2, -1},
  {0, 0, 0, 0, -1, 1}
};
(* 4) 初始化整体刚度矩阵 GlobalK*)
numNodes = Length[nodes];
dofPerNode = 2;
totalDof = numNodes*dofPerNode;
GlobalK = ConstantArray[0, {totalDof, totalDof}];
(* 5) 调用组装 *)
Do[
  GeneralAssemble[elements[[e]], ke,
    {e, Length[elements]}
];
(* 6) 输出 *)
Print["整体刚度矩阵 GlobalK ="];
MatrixForm[GlobalK]
```

运行结果如下所示:

$$GlobalK = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

从运行结果可以看出,与 MATLAB 通用函数运行所得结果一致。整体刚度矩阵的阶数与节点自由度总数一致,且矩阵保持对称性,说明单元刚度矩阵在组装过程中按照自由度映射规则准确嵌入整体刚度矩阵。由于该算例仅包含一个三角形单元,整体刚度矩阵在数值上等于单元刚度矩阵,从而验证了通用组装函数的正确性与稳定性。

5. 教学方法与手段创新

5.1. 结合虚拟仿真软件实现理论实践融合

传统教学模式中,理论与实践常常脱节,学生难以将抽象的理论知识应用于实际问题。为解决这一问题,提出将虚拟仿真软件与项目驱动教学相结合的方法。通过虚拟仿真软件,学生可以在虚拟环境中对复杂力学结构进行模拟分析,直观地观察到刚度矩阵在不同工况下的变化及其对结构变形和应力分布的影响。为了更好地将理论与实践相结合,设计了一系列与刚度矩阵生成和组装相关的项目任务,这些任务以实际工程项目为背景,具体包括:

(1) 多层多跨框架结构的有限元分析,学生需要对框架结构进行有限元建模,生成并组装刚度矩阵,分析其在水平荷载作用下的受力状况。

(2) 建筑结构的抗震分析,学生需要对一个建筑结构进行有限元建模,生成并组装刚度矩阵,分析其在地震荷载下的响应。

5.2. 基于 ABAQUS 的虚拟仿真实验

本研究选取 ABAQUS 教材[14]中的“多层多跨框架分析”案例作为虚拟仿真实施对象。该案例通过建立多跨钢框架模型,分析其在水平荷载作用下的结构响应特性,具有较强的工程代表性和教学价值。在课堂教学中,教师引导学生基于该案例完成以下仿真实践过程:

- (1) 建立二维框架几何模型;
- (2) 定义钢材弹性参数;
- (3) 选用梁单元进行建模;
- (4) 施加水平荷载;
- (5) 分析结构位移及内力分布;
- (6) 对比不同加载位置下结构响应差异。

在完成 ABAQUS 仿真后,提取关键节点(A点、B点)的位移数据,A点、B点的变形云图和位移时程曲线图,如图 1~4 所示。并与课堂推导的梁单元刚度矩阵计算结果进行对比。根据有限元基本关系: $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = F(t)$,利用 MATLAB/Mathematica 程序计算整体刚度矩阵并求解节点位移,与 ABAQUS 计算结果进行对比。

通过对该工程案例的分析,学生能够理解刚度矩阵在整体结构分析中的作用,并认识到单元刚度矩阵组装对于结构整体刚度形成的关键意义。

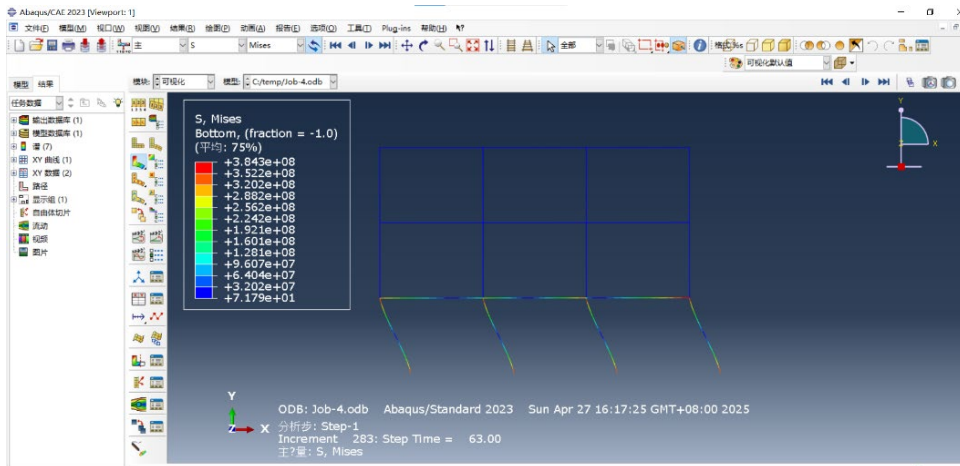


Figure 1. Deformation contour plot at point A
图 1. A 点变形云图

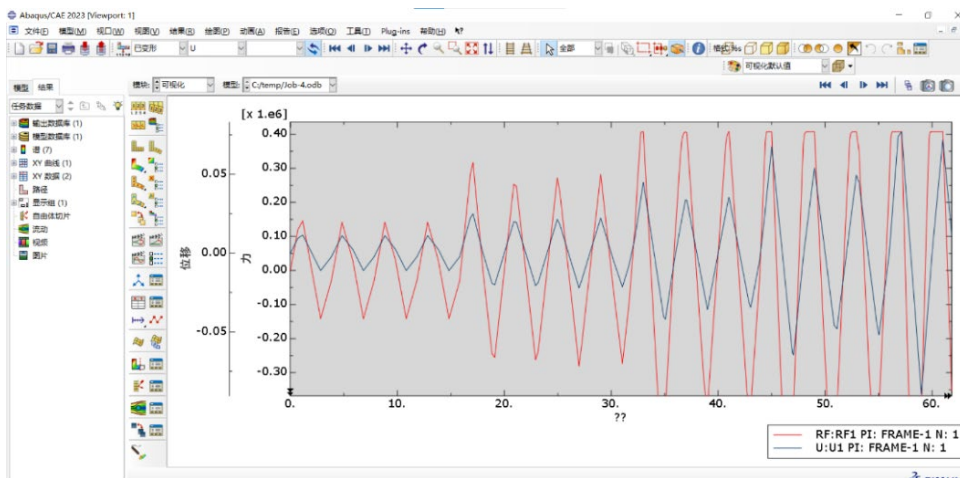


Figure 2. Displacement time-history curve at point A
图 2. A 点位移时程曲线图

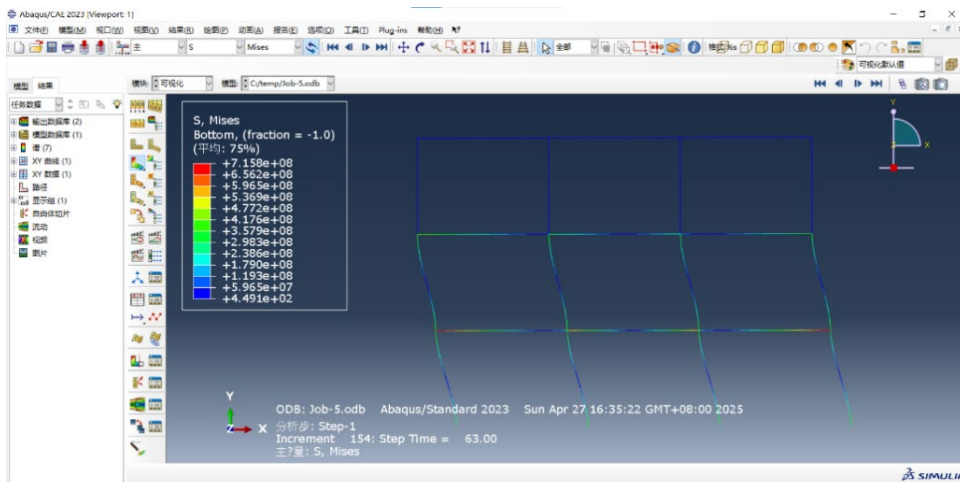


Figure 3. Deformation contour plot at point B
图 3. B 点变形云图

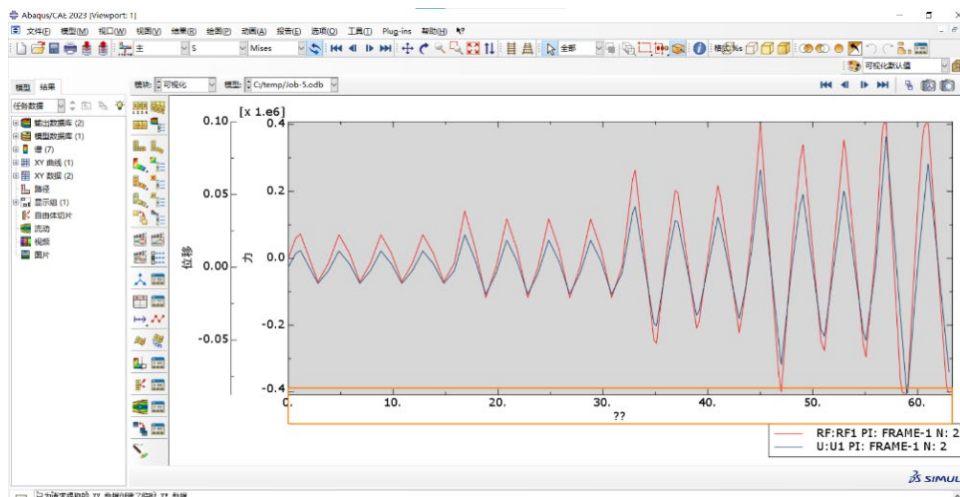


Figure 4. Displacement time-history curve at point B
图 4. B 点位移时程曲线图

5.3. 采用 Hermite 多项式单元提升弯曲问题的连续性表达能力

在梁、板等结构的有限元分析中，位移场不仅需要在单元交界处保持连续(即 C^0 连续)，还需要保证其一阶导数的连续性，即满足 C^1 连续性条件。根据 Euler-Bernoulli 梁理论，结构弯曲变形与位移的二阶导数相关，因此在有限元离散过程中，如果仅采用传统的 Lagrange 插值单元，通常只能保证节点位移的连续性，而难以满足转角连续性的要求。

Hermite 多项式单元通过在节点处同时引入位移和转角作为自由度，利用 Hermite 插值函数构造单元位移场，使位移及其一阶导数在单元边界处保持连续，从而满足 C^1 连续性要求。这一特性使 Hermite 单元在梁弯曲问题建模中具有明显优势，能够更准确地描述结构的弯曲变形和转角变化，提高有限元离散模型的物理一致性和计算精度。

在教学过程中，为降低学生在复杂符号推导和矩阵运算中的计算难度，可以结合 MATLAB、Mathematica 等科学计算工具，对 Hermite 插值函数的构造过程以及单元刚度矩阵的计算进行程序化实现。通过计算机辅助计算，学生能够更加直观地观察 Hermite 插值函数的形状及其对位移场表达的影响，同时验证理论推导结果的正确性。这种“理论推导 + 数值计算”的教学方式，有助于学生在理解有限元基本原理的基础上，提高对有限元建模和工程计算方法的掌握程度。

通过在课程教学中引入 Hermite 多项式单元及其数值实现过程，学生不仅能够理解有限元离散中连续性条件的重要性，还能够掌握梁单元刚度矩阵的形成机理，从而深化对有限元方法基本思想和工程应用价值的认识。

5.4. 构建多维度教学体系线上线下混合式教学

为适应新工科背景下对创新型复合型人才的培养需求，构建“理论 - 实践 - 计算”三位一体的多维度教学体系。在理论教学中，通过课堂讲解和多媒体演示，结合实际工程案例，帮助学生建立对刚度矩阵理论的系统认识。在实践教学中，利用虚拟仿真软件，让学生亲身体验刚度矩阵在工程中的应用，提高动手能力和创新思维。在计算能力训练中，通过 MATLAB 和 Mathematica 等工具，强化学生的计算能力，使学生能够高效地完成复杂的有限元分析任务。

同时，采取线上线下混合式教学模式。线上部分通过课程平台发布教学视频、课件、虚拟仿真软件操作教程等学习资源，学生可以在课前自主学习理论知识和操作技能，完成预习任务。线下部分则通过

课堂讨论、项目实践、小组协作等方式，引导学生深入理解和应用所学知识，解决实际问题。这种混合式教学模式不仅提高了教学效率，还增强了学生的学习自主性和参与度[15]。

6. 教学实践与效果评估

6.1. 教学实践

以“刚度矩阵的生成与组装”为核心内容，围绕上述教学方法与手段创新展开。在理论教学中，通过课堂讲解和多媒体演示，结合实际工程案例，帮助学生建立对刚度矩阵理论的系统认识。例如，在讲解单元刚度矩阵的形成时，引入虚拟仿真软件的演示，让学生直观地观察到单元刚度矩阵的变化及其对结构变形的影响。在实践教学中，学生通过虚拟仿真软件，完成了一系列与刚度矩阵相关的项目任务，如“多层多跨框架结构的有限元分析”和“建筑结构的抗震分析”等。在计算能力训练中，学生利用 MATLAB 和 Mathematica 等工具，完成了复杂的刚度矩阵计算任务，验证了理论推导的正确性。

在工程力学专业的本科课程中进行教学实践，选取两个班级作为实验组和对照组。实验组采用本文提出的多维度教学提升策略，包括虚拟仿真软件的应用、Hermite 多项式单元的引入以及 MATLAB 和 Mathematica 通用函数的训练；对照组则采用传统的教学方法。通过一个学期的教学实践，对两组学生的学习效果进行了评估，实验组编程作业成绩整体高于对照组，其分数段分布如表 6 所示。进一步计算编程作业的平均成绩及标准差，实验组为 84.98 和 7.04，对照组为 75.53 和 11.08。经过独立样本 t 检验分析， $t = 4.59$ ， $p < 0.001$ ，表明实验组在计算能力与程序实现能力方面表现更佳。

Table 6. “Score distribution” of programming assignments
表 6. 编程作业“分数段分布”

分数段	实验组人数	对照组人数
<70	1	13
70~79	10	12
80~89	18	11
90~100	13	4

在“多层多跨框架结构的有限元分析”和“建筑结构的抗震分析”两个项目中，实验组的平均得分为 87.68，标准差为 4.96。对照组的平均得分为 74.16，标准差为 7.33。项目报告分数段分布见表 7。

Table 7. “Score distribution” of project reports
表 7. 项目报告“分数段分布”

分数段	实验组人数	对照组人数
<70	0	12
70~79	4	18
80~89	24	9
90~100	14	1

经过独立样本 t 检验分析， $t = 9.74$ ， $p < 0.001$ ，表明实验组学生在建模准确性及刚度矩阵组装能力方面整体表现优于对照组。说明多维度教学模式在提升学生建模准确性及刚度矩阵组装能力方面具有显著

效果。

综合编程作业与项目报告成绩分析结果,可以看出多维度教学模式在理论理解、计算实现及工程应用能力等方面均取得了较为显著的教学成效。

6.2. 效果评估

通过问卷调查和课堂反馈,学生普遍认为这种多维度的教学方法能够显著提高他们的学习兴趣和参与度。学生表示,虚拟仿真软件的使用使抽象的理论知识变得更加直观,而 MATLAB 和 Mathematica 的通用函数则提高了他们的计算及编程能力,使他们能够更高效地完成复杂的有限元分析任务。此外,线上线下混合式教学模式让学生能够根据自己的学习进度自主安排学习时间,提高了学习的灵活性。

在课程结束时,对两组学生进行了统一的闭卷考试,考试内容涵盖了有限元分析的基本理论、刚度矩阵的生成和组装以及实际工程问题的解决。结果显示,实验组学生的平均成绩比对照组高出了 15 分,成绩分布也更加集中,表明实验组学生对课程内容的掌握程度更高。

教师在教学过程中也感受到了学生学习积极性的提高。学生在课堂上主动提问、积极参与讨论,课后主动完成作业和实验。教师认为,这种多维度的教学方法不仅提高了学生的学习效果,还培养了他们的自主学习能力和团队协作能力。同时,线上线下混合式教学模式也为教师提供了更多的教学资源 and 教学手段,有助于教师更好地开展教学活动。

7. 结语

本文以“刚度矩阵的生成与组装”教学为例,探讨了新工科背景下刚度矩阵的通用组装函数的构建方法。详细分析了有限元刚度矩阵的基本原理以及单元刚度矩阵的形成和整体刚度矩阵的组装过程,给出适用于不同软件的通用函数。利用这些函数能够高效地将各个单元的刚度矩阵组装成整体的刚度矩阵,显著提高有限元分析的效率和准确性。在给出的代码 2 和代码 3 示例中,我们展示了如何利用这些通用函数进行实际的刚度矩阵组装操作。示例结果验证了所提出方法的有效性和正确性,证明了通用函数在处理不同类型的有限元问题时的灵活性和可靠性。不论教材中的哪种单元刚度矩阵的组装,示例都可以适合其组装。在学生的学习过程中极大地增强了他们的兴趣,也具有统一性,便于实际应用,能够大大提高有限元分析的效率。

在新工科背景下,工程教育的改革与发展需要我们不断探索和创新。本文通过将虚拟仿真软件与传统教学相结合,更好地培养学生的创新思维和实践能力,从而适应新技术革命和产业变革并胜任相应的需求。在后续教学过程中,我们应继续深化教学改革,探索更多创新的教学方法和手段,以培养出更多具有创新精神和实践能力的高素质工程人才,为推动我国工程教育的发展和新工科建设贡献力量。

参考文献

- [1] “新工科”建设复旦共识[J]. 高等工程教育研究, 2017(1): 10-11.
- [2] 胡波, 冯辉, 韩伟力, 等. 加快新工科建设, 推进工程教育改革创新——“综合性高校工程教育发展战略研讨会”综述[J]. 复旦教育论坛, 2017, 15(2): 20-27.
- [3] “新工科”建设行动路线(“天大行动”)[J]. 高等工程教育研究, 2017(2): 24-25.
- [4] 张凤宝. 新工科建设的路径与方法刍论——天津大学的探索与实践[J]. 中国大学教学, 2017(7): 8-12.
- [5] 新工科建设指南(“北京指南”)[J]. 高等工程教育研究, 2017(4): 20-21.
- [6] 马新玲. “互联网+”背景下新工科多循环镶嵌式“工”型人才的培养模式[J]. 力学与实践, 2021, 43(4): 623-627.
- [7] 胡蔓, 赵云龙, 栾晓娜, 等. 新工科背景下工程训练实践教学模式探索[J]. 实验技术与管理, 2022, 39(3): 256-259.
- [8] 王艳艳, 孙崇玲. 新工科项目式教学的课程设计与实施——以芯片实验室课程为例[J]. 高教学刊, 2025, 11(11):

49-52.

- [9] 李雪威, 王文俊, 郝海霞, 等. 新工科项目式教学多元融合评价方法研究——以“智慧社会与大数据智能”课程为例[J]. 高等工程教育研究, 2023(6): 27-33.
- [10] 郭明旻, 陈力奋, 唐国安. 力学通识在新工科课程中的应用[J]. 力学与实践, 2024, 46(3): 656-662.
- [11] 郭吉坦, 薛齐文. 有限元法与 MATLAB 程序设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 2020.
- [12] 曾攀. 有限元基础教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [13] 乔红威, 吕震宙, 宋述芳. 基于分裂法及 Hermite 多项式逼近的随机有限元[J]. 应用力学学报, 2009, 26(3): 569-574.
- [14] 王玉镯, 傅传国. ABAQUS 结构工程分析及实例详解[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
- [15] 莫欣岳, 李欢. “新工科”背景下项目驱动的混合式教学改革研究[J]. 工业和信息化教育, 2025(3): 17-22.