Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(5), 1-8
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.145309

狄拉克函数在金融数学进阶学习中的应用与教学实践研究

任凯鹏[1,2]，孟祥瑞[1]，崔学慧[1]，范　申[1,2*]

[1]中国石油大学(北京)理学院，北京
[2]中国石油大学(北京)油气资源与工程全国重点实验室，北京

收稿日期：2026年2月13日；录用日期：2026年5月4日；发布日期：2026年5月13日

摘　要

金融数学作为基础数学理论在实际问题中的典型应用，对数学专业学生具有很好的实践学习价值，可帮助学生理解抽象理论背后的丰富意义与广泛应用，增强学生的学习兴趣。在课程教学中做到既重视金融知识等业务背景的介绍，又凸出数学知识的理论高度是当前金融数学教学过程中面临的一大制约限制。本论文以狄拉克函数作为切入点，通过将其链接离散、连续的特性与金融数学中的年金计算进行类比与统一，贡献了兼顾数学理论与金融实践的典型案例，不仅后续可作为教材与教学改革中的核心元素，还为师生提供了金融数学进阶学习的方向。进一步，通过提出“课前－课中－课后”三位一体的教学实践建议，为该案例在金融数学课程的实际应用提供了良好参考。

关键词

金融数学进阶，狄拉克函数，年金计算，教学案例创新

Applications and Teaching Practices of the Dirac Delta Function in Advanced Financial Mathematics Courses

Kaipeng Ren[1,2], Xiangrui Meng[1], Xuehui Cui[1], Shen Fan[1,2*]

[1]College of Sciences, China University of Petroleum, Beijing
[2]State Key Laboratory of Petroleum Resources and Engineering, China University of Petroleum, Beijing

Received: February 13, 2026; accepted: May 4, 2026; published: May 13, 2026

*通讯作者 Email: fans@cup.edu.cn

文章引用: 任凯鹏, 孟祥瑞, 崔学慧, 范申. 狄拉克函数在金融数学进阶学习中的应用与教学实践研究[J]. 创新教育研究, 2026, 14(5): 1-8. DOI: 10.12677/ces.2026.145309

Abstract

Financial mathematics, as a foundational mathematical theory, holds significant practical learning value for mathematics majors by illustrating the rich implications and broad applications behind abstract concepts, thereby enhancing students' engagement and interest. A key challenge in its pedagogy lies in balancing the introduction of financial and business contexts with the rigorous theoretical depth required in mathematical education. This paper takes the Dirac delta function as a starting point, drawing analogies and unifying its discrete and continuous characteristics with annuity calculations in financial mathematics to provide a compelling case study that integrates mathematical theory and financial practice. This case can subsequently serve as a core element in curriculum design and pedagogical reforms, while also pointing to direction for advance study of Financial Mathematics. Furthermore, by proposing a three-in-one teaching framework ("pre-class - in-class - post-class"), the paper offers actionable guidance for implementing this case in financial mathematics courses, ensuring its practical effectiveness.

Keywords

Advances in Financial Mathematics, Dirac Delta Function, Annuity Calculations, Innovative Teaching Case Studies

1. 引言

年金是定义在一定期限内的特殊现金流，具体表现为收款、付款的形式[1]，在养老金、保险等领域有广泛而深刻的实际应用价值[2]，是金融数学课程中的一大基础性概念[3]。在金融数学的传统教学体系中，年金的现值计算通常按照支付方式的不同(如离散或连续、等额或变额、期初付或期末付等)分别建立各自的公式[4]。这种分类处理具有在特定情形下便于操作的突出优势，便于同学们学习中的直观理解与应用。但上述教学实践因缺乏统一的数学框架用以表征年金的多种形式，也带来了公式与分类条件繁多、易加重记忆负担的问题，不利于大部分同学对知识的系统性理解与宏观把控。尤其当面对现实中常见的混合型年金(即同时包含离散与连续支付的情形)时，传统方法往往显得力不从心，二者难以在一个表达式中自然融合，导致模型割裂、计算繁琐，也限制了理论的普适性。

为克服这一局限，本文引入狄拉克函数(Dirac delta function)作为建模工具，通过拓展探讨年金的统一性表达形式，为金融数学进阶学习提供具体的案例抓手。尽管函数在经典函数论中并不具备严格定义，但作为广义函数(或分布)，它在刻画“瞬时脉冲”或“点质量”方面具有强大而简洁的表达能力，已在物理学[5]、工程学[6]及概率论[7]等领域广泛应用。借鉴狄拉克函数在概率论中被用来统一描述离散、连续乃至混合型随机变量的概率密度的思想，我们将狄拉克函数引入年金建模：通过将其引入支付率函数，使离散支付可视为在特定时刻发生的单位脉冲，而连续支付则对应于常规的密度函数。如此一来，无论支付形式如何复杂，均可在一个统一的积分框架下表示其现值，即贴现因子与广义支付率函数(可能包含狄拉克函数项)的积分。这一方法不仅消除了传统分类带来的冗余与割裂，更使得任意混合支付模式下的年金现值计算变得系统化、简洁化。更重要的是，它为金融数学提供了一种更具一致性和延展性的分析语言，有助于深化对现金流结构本质的理解，并为后续更复杂的金融建模奠定坚实的理论基础。进一步，

本文探究了在本科大学四年级课堂上如何将狄拉克函数这一知识点与金融数学教学实践进行融合，从高阶性、创新性、挑战度(“两性一度”)三个维度提升课程建设的完整性[8]，切实提高学生数学素养与实践应用能力。

2. 金融数学进阶学习中的教学问题剖析与教学方法探索

2.1. 金融数学课程中的年金计算常用方式

在金融数学课程教学中，对年金通过等额或变额、期初付或期末付、每年支付的次数等不同分类维度进行分类[3]。按照支付次数是离散还是连续，将年金分为离散年金与连续年金。针对离散支付的年金，假定某特定年金的利率为 i，每年总共支付 1 元，支付 n 年，则每年支付 m 次时的期末付等额年金的现值记作 $a_{n,i}^{(m)}$；若允许每年支付金额不一致，则可定义变额年金，如递增年金 $Ia_{n,i}^{(m)}$、递减年金 $Da_{n,i}^{(m)}$、复递增年金 $Ca_{n,i}^{(m)}$。连续支付年金的计算一般会与极限、积分等连续函数的运算密切相关。例如，连续支付的等额年金被定义为 $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n,i}^{(m)}$，即每年支付无穷期时的等额年金。这种定义方式虽然直观，但是在变额年金等复杂的支付计算时其实并不方便。由此，在金融数学教材体系中需引入支付率 $\rho(t)$ 和利息力概念来简化计算[9]-[11]。

2.2. 现有教学方法局限性与教学问题剖析

通过上述分析可发现，离散年金与连续年金可分别使用级数、积分的形式进行计算，体现了现有方法在处理纯离散型或纯连续型年金时的良好适用性。从现有教学内容设计角度看，在面对离散与连续支付并存的混合型年金情形时，仍缺乏一个统一且严谨的数学表述框架。无论是离散形式的求和表达，还是连续形式的积分表达的现值计算模型，均难以直接推广至混合支付场景。在教学实践方面，传统金融数学教学中对离散与连续现金流的分离处理，也容易导致学生形成碎片化知识结构，不利于学生构建体系化的知识结构[12]。此外，金融数学的进阶学习往往会陷入理论性过强，难以吸引学生关注的困境。传统金融数学的教学实践中常采用以教材为中心、PPT 与板书结合的教学方法，很少采用案例为导向、进阶知识为主体的教学方法。上述教学方法的使用在年金计算时体现得尤为显著，而年金计算又涉及大量的数学公式，诸多公式之间的内在一致性难以被学生在学习时捕捉到，从而会增加学生记忆公式的压力和对知识本质的理解难度。

2.3. 年金计算中的教学方法探索

金融数学进阶教学是建立在学生对基本知识的扎实理解上，进一步开展的课程内容迭代升级，需要兼顾“有根”与“有魂”。“有根”指的是课程大纲内的基本教学内容掌握扎实，知识点理解到位，解题过程使用知识点正确。“有魂”指的是始终有明确的研究与探索主线在牵引着教学开展，教学服务具体的教学目标。进阶学习并不是单纯引入更加复杂的理论，而是从教学中遇到的实际问题出发，为了解决学生知识学习中遇到的难点与卡点。考虑金融数学进阶学习的实际需求，将年金计算连续与离散计算的统一作为具体教学环节具有很好的代表性与可操作性。一方面，给出狄拉克函数的统一表达形式，可引导学生更好理解后续以 *Lebesgue-Stieltjes* 积分为代表的测度论积分法，另一方面，通过案例教学的方式开展年金计算教学方法探索也使得学生的进阶学习更加顺畅，最大程度减少了理论的抽象性与难理解性。

值得注意的是，以 *Lebesgue-Stieltjes* 积分为代表的测度论积分法也具有统一性刻画离散与连续年金现金流的能力，并允许处理连续支付与离散支付同时存在的混合模式。测度论积分法的优点体现在具有深厚坚实的数学理论基础，并且在可扩展性、通用性、数值计算方面具有很好的表现。然而，测度论积

分法也存在高度抽象造成使用门槛高、计算使用复杂性高、实际应用场景使用频率低等限制性因素。相对而言，狄拉克函数更易于理解，并且在工程、控制领域的应用更加广泛，计算使用过程相对更加简洁。事实上，狄拉克函数刻画年金可以作为测度论积分法学习的过渡环节，为后续更高阶的学习起到承上启下的过渡作用。因此，本研究为了进一步探索统一形式且易于理解、使用的年金计算方法，尝试引入狄拉克函数。

3. 狄拉克函数的性质及优势

3.1. 狄拉克函数的定义

狄拉克函数有以下定义：

$$\delta(x)=\begin{cases}\infty, x=0\\ 0, x\neq 0\end{cases} \tag{1}$$

同时要求

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)dx=1 \tag{2}$$

从经典数学的角度看，这样一个函数是不可能存在的。因为任何仅在有限点上不为零的函数，其积分必然为 0，不可能为 1。因此，狄拉克函数并不是传统意义上的函数，它的严格定义需要泛函分析理论作为基础[13] [14]。

除了上述原始的定义之外，狄拉克函数还有另一种表述方式，即导数形式。若已知阶梯函数为

$$\theta(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases} \tag{3}$$

容易验证 $\theta(x)$ 的导数 $\theta'(x)$ 满足 $\delta(x)$ 的条件，因此 $\theta'(x)=\delta(x)$ [15]。

3.2. 狄拉克函数统一离散与连续的作用

狄拉克函数有以下性质，即：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)f(x)dx=f(x_0) \tag{4}$$

我们通过狄拉克函数在概率论中的应用，来介绍狄拉克函数统一离散与连续的作用。概率密度函数通常用来描述连续型随机变量[16]。对于离散型随机变量，通常借助分布列来描述。然而，对于混合型随机变量，无论是概率密度函数还是分布列都无法完整描述其分布。但是，通过引入狄拉克函数，我们可以拓展概率密度函数的应用范围，使之适用于离散型和混合型随机变量。

若 W 是一个“平凡”的随机变量，其取值 0 的概率是 1，那么 $\theta(x)$ 刚好是 W 的分布函数，则 $\theta(x)$ 的导数 $\delta(x)$ 就是 W 的概率密度函数。这暗示了如果将狄拉克函数引入概率密度函数，那么概率密度函数可以用来描述离散型随机变量。

考虑一个更复杂的例子。假设随机变量 M，它的分布函数是：

$$F_M(x)=\begin{cases}0, x<-1\\ \dfrac{1+x}{2}, -1\leq x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases} \tag{5}$$

DOI: 10.12677/ces.2026.145309

或者表示为：

$$F_M(x)=\frac{1}{2}\theta(x)+\frac{1+x}{2}I_{[-1,0)}(x)+\frac{1}{2}I_{[0,+\infty)}(x) \tag{6}$$

最后一项 $\frac{1}{2}I_{[0,+\infty)}(x)$ 存在的目的是构造没有跳跃间断点的函数 $\frac{1+x}{2}I_{[-1,0)}(x)+\frac{1}{2}I_{[0,+\infty]}(x)$，保证仅 $\theta(x)$ 项包含跳跃间断点，从而避免多余讨论。

对分布函数求导，就得到 M 的概率密度函数，用狄拉克函数和示性函数来表示：

$$f_M(x)=\frac{1}{2}\delta(x)+\frac{1}{2}I_{[-1,0)}(x) \tag{7}$$

这样我们就通过引入狄拉克函数来用概率密度函数表示混合型随机变量。更进一步还可以证明，如果 X 离散部分的分布列是 $P(X=k),k\in E$，而连续部分的概率密度函数是 $\overline{f}_X(x)$ (这里 $\sum_{k\in E}P(X=k)+\int_{-\infty}^{+\infty}\rho_X(x)dx=1$)，那么 X 的概率密度函数可以表示为：

$$f_X(x)=\overline{f}_X(x)+\sum_{k\in E}P(X=k)\delta(x-k) \tag{8}$$

4. 狄拉克函数在年金计算中的应用

4.1. 离散情况下的支付率函数

在连续型年金情况下，支付率函数 $\rho(t)$ 是连续的累计支付额函数 $S(t)$ 的导数。但是在离散情况下，累计支付额函数会呈现为阶梯状：

$$S(t)=\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)\theta(t-t_k) \tag{9}$$

$M(t=t_k)$ 表示 t_k 时刻支付的数额。这函数包含间断点，通常意义下不可导。但是如果我们引入狄拉克函数，另 $\theta'(t-t_k)=\delta(t-t_k)$，那么这个函数就变为可导函数：

$$S'(t)=\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)\delta(t-t_k) \tag{10}$$

如果将这个函数定义为离散情况下的支付率函数 $\rho(t)$，那么离散的年金也可以使用支付率来表示了。

离散型年金的支付率可以直接应用连续型年金的现值公式：

$$\begin{aligned}a(t_0)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t)(1+i)^{t_0-t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)\delta(t-t_k)\right)(1+i)^{t_0-t}\,dt=\\&\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_k)(1+i)^{t_0-t}\,dt=\sum_{t\in t_k}M(t=t_k)(1+i)^{t_0-t_k}\end{aligned} \tag{11}$$

这与离散型年金通常使用的现值计算方法等价，这表明，离散型年金的支付率函数是连续型年金支付率的拓展。引入狄拉克函数后，可以将离散型年金和连续型年金的表示方法以及现值计算方法使用支付率函数统一起来。

4.2. 混合情况下的支付率函数

混合型年金的累计支付额函数既存在可导且导数大于零的区间，也存在跳跃间断点，它的累计支付额函数可以表示为：

$$S(t)=s(t)+\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)\theta(t-t_k) \tag{12}$$

其中 $S(t)$ 是连续递增函数，导数为 $\overline{\rho}(t)$，包含了年金连续部分的全部信息；$\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)\delta(t-t_k)$ 是阶梯状递增函数，包含了年金离散部分的全部信息，E 是离散部分的支付时间点的集合，是有限集或可数集。对 $S(t)$ 求导，则：

$$S'(t)=\overline{\rho}(t)+\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)\delta(t-t_k) \tag{13}$$

将这个函数定义为混合情况下的支付率函数 $\rho(t)$，那么混合型的年金就可以使用支付率来表示了。混合型年金的支付率也可以直接应用连续型年金的现值公式：

$$\begin{aligned}&a(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t)(1+i)^{t_0-t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\overline{\rho}(t)+\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)\delta(t-t_k)\right)(1+i)^{t_0-t}\,dt=\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\rho}(t)(1+i)^{t_0-t}\,dt+\sum_{t\in t_k}M(t=t_k)\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_k)(1+i)^{t_0-t}\,dt=\\&\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\rho}(t)(1+i)^{t_0-t}\,dt+\sum_{t_k\in E}M(t=t_k)(1+i)^{t_0-t_k}\end{aligned} \tag{14}$$

这等价于分别计算年金的离散和连续部分的现值然后相加。

至此，离散型、连续型、混合型年金都已经可以用支付率函数来统一表示，他们的现值计算公式都可以统一为：

$$a(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t)(1+i)^{t_0-t}\,dt \tag{15}$$

如果利息力不是常数，那么公式就是：

$$a(t_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\rho(t)\cdot e^{-\int_{t_0}^{t}F(s)ds}\,dt \tag{16}$$

5. 狄拉克函数融入金融数学的教学实证研究

真实案例出发且充分运用所学知识的案例教学可更好调动学生参与感与学习积极性[17]。作为离散与连续年金学习的后续，添加狄拉克函数作为案例补充既具有明确的理论意义，又有利于培养学生的探索创新精神。因此，在课程教学环节，采用 OBE (Outcome-Based Education)教育理念，以狄拉克函数链接离散与连续型年金作为典型案例[18]，进行《金融数学》中的年金知识点讲授。在此过程中，强调以学生为中心的教学方式，即以增加学生在学习中的参与度为核心目标。

由于课程在每年的授课班级只有 1 个，为了分析教学方法使用对考核结果的影响，笔者将 2025 年秋季学期使用 OBE 教学方法案例时的期末考试成绩与 2024 年秋季学期未使用 OBE 教学方法案例时的期末考试成绩进行对比。其中，2024 年、2025 年选课人数分别为 18 人与 27 人。如图 1 所示，引入狄拉克函数为代表的案例教学法后，期末结课平均成绩从 73 分下降到了 69 分，成绩标准差从 27 下降到 21，最低分从 10 分上升到了 25 分。案例教学法使用后，90 分以上高分段学生数量保持不变，占比有所下降。相比使用案例教学法之前，“两极分化”现象有所好转。同时，结课成绩整体分布更加均匀，表明存在部分同学对基础知识的理解不到位。上述结果既肯定了本次金融数学教学改革对消除“两极分化”的积极作用，也表明仍有相当同学其实不能完全理解新引入的知识概念。课后发放的调查问卷也佐证了上述

发现，如表 1 所示，三分之一的同学表示没听懂狄拉克函数年金相关的知识点。教学实证结果表明未来将狄拉克函数融入金融数学教学仍需要总结经验，如注重相关知识点背景介绍，并注重同学们的学习反馈。同时，这也表明上述教学内容更适合作为金融数学进阶学习内容，在正常教学环节需要控制好教学时间的比例分配。

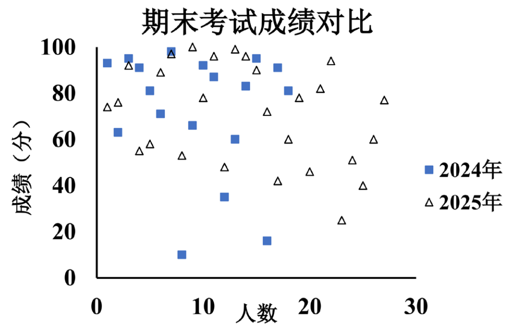

Figure 1. Comparison of the grades in final exam between 2024 and 2025
图 1. 课程期末结课考试成绩对比

Table 1. Survey table of course
表 1. 课程调查问卷

	没听懂	一般	较好	很好	很容易
金融数学整体知识点	0	5	10	10	2
狄拉克函数年金相关知识点	9	4	9	3	2

经过优化后，未来开展金融数学教学改革时具体的操作过程分为课前、课中与课后进行针对性的准备与实施。课前任课教师整理出狄拉克函数的典型概率应用，并设计出与同学们互动的方式与考核方式，排演教学环节预留出 30~40 分钟的时间进行狄拉克函数应用专题实践。值得注意的是，在互动环节要增强同学们的参与程度，利用学习通等教学辅助性软件记录作答情况。特别重视引导学生逐渐认识到离散与连续型年金计算的区别与联系，并对异质性进行辨析与深入思考，进而延伸逻辑链条关注离散与连续混合时的特殊情形如何处理。同时为了方便引入狄拉克函数教学时的连贯性，在实际授课过程，教师需稍加介绍狄拉克函数的背景知识，例如可以通过阐明狄拉克函数在概率中沟通连续与离散分布作为切入点，唤起同学们对狄拉克函数的回忆。进一步，结合离散与连续型年金的累积值计算公式，启发同学们是否可以参考狄拉克函数做一些探索性的尝试及推导演算，并留出充分时间给学生进行头脑风暴式地推导与证明。

鉴于当前以生成式人工智能工具为代表的人工智能辅助工具发展迅速，在教学环节需引导学生自主选择特定人工智能大模型工具，充分发挥人工智能辅助教学的作用，并体现在以下几个方面。一是“使用模型检查做裁判”，鼓励同学们在自行推导后，使用人工智能工具辅助的方式对数学证明的具体步骤进行验证，并进行截图。二是“使用模型提示找灵感”，鼓励同学们在充分思考仍证明思路不清晰时，通过提问人工智能工具，针对证明中的堵点卡点寻求线索提示，并进行截图。三是“对比模型找最优”，鼓励同学们广泛对比不同人工智能工具在证明思路上的差异性，总结归纳一致性规律，并筛选组合得到最优证明逻辑思路与最优证明步骤路径。通过三方面做法，集成人工智能工具的优势，最大化锻炼同学们的金融数学进阶能力。

通过以狄拉克函数为切入点扩展探讨年金的进阶定义方式，并以案例为载体、教学目标为导向、学

生深入参与的教学环节作为教学实践的具体抓手，可为金融数学进阶教学过程更加贴近学生实际思考过程、提升学生数理应用能力与逻辑思维能力提供借鉴思路。后续金融数学课程改革中也可将年金计算中计算方式的统一作为课程、教材修订的重点。

基金项目

本论文受到中国石油大学(北京)“1158 工程项目”资助。

参考文献

[1] 刘志东, 荆中博. 投资价值评估[M]. 北京: 清华大学出版社, 2025.

[2] 胡仕强, 陈荣达. 长寿连接型年金的定价及其风险分摊机制研究[J]. 系统工程理论与实践, 2022, 42(3): 604-616.

[3] 孟生旺. 金融数学[M]. 第 8 版. 北京: 中国人民大学出版社, 2024.

[4] 袁海丽. 金融数学课程教学中的一些思考[J]. 科教导刊, 2021(26): 82-84.

[5] 尹真. 电动力学[M]. 第 3 版. 北京: 科学出版社, 2010.

[6] 郑君里, 应启珩, 杨为理. 信号与系统[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[7] 黄金萍, 张林, 王子嫣. 2 个随机量子比特混合态内积的概率密度函数[J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版), 2022, 42(5): 93-97.

[8] 吴岩. 建设中国“金课” [J]. 中国大学教学, 2018(12): 4-9.

[9] Chan, W.S. and Tse, Y.K. (2018) Financial Mathematics for Actuaries. 2nd Edition, World Scientific Publishing Company. https://doi.org/10.1142/10564

[10] 约翰·赫尔(John C. Hull). 期权期货及其他衍生品[M]. 王勇, 索吾林, 张翔, 译. 北京: 机械工业出版社, 2023.

[11] 科内利斯·W. 欧思德里, 莱赫·A. 格瑞兹拉科, 梁进. 金融数学模型与计算[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2023.

[12] 许栩, 许晓强, 闫凯. 浅谈数学专业中金融数学的课程建设及教学思考[J]. 教书育人(高教论坛), 2020(6): 74-75.

[13] 汤志浩, 王荣乾. 狄拉克函数的定义和性质的研究[J]. 柳州职业技术学院学报, 2009, 9(2): 76-78.

[14] 陈恕行. 现代偏微分方程导论[M]. 第 2 版. 北京: 科学出版社, 2018.

[15] 徐玲玲, 赵永芳, 井孝功. 狄拉克 δ 函数[J]. 大学物理, 2010, 29(8): 16-17+38.

[16] 崔学慧, 明辉, 严彦文, 等. 概率论与数理统计[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2021.

[17] 席敏, 肖爱玲. 案例教学法: 金融数学课程的津桥[J]. 教育现代化, 2018, 2(9): 220-221.

[18] 赵彤远, 赵兰苓, 第五鹏祥, 等. OBE 理念下《概率论与数理统计》课程混合互动式教学的创新实践[J]. 创新教育研究, 2022, 10(11): 2987-2992.