Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(5), 498-506
Published Online May 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.145369

Hans汉斯

基于APOS理论的“函数奇偶性”概念建构教学设计

李翠玲[1]，陈迪群[2]，赵　晗[1]，何春玲[1*]

[1]黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈
[2]黄冈中学，湖北 黄冈

收稿日期：2026年4月1日；录用日期：2026年5月19日；发布日期：2026年5月28日

摘　要

函数的性质是高中数学的核心内容，教学中普遍存在学生机械记忆符号结论、难以把握本质特征的“形式化困境”，制约了数学核心素养的落实。APOS理论为概念建构教学提供了系统的认知框架。本研究以“函数奇偶性”为例，构建基于APOS四阶段的教学方案(活动阶段创设情境→过程阶段抽象定义→对象阶段辨析本质→图式阶段整合应用)。通过单组前后测(高一年级，n = 42)，聚焦“定义域对称”关键前提的考察：后测中85.7%的学生能正确辨析该前提(较前测54.8%显著提升)，验证了教学设计有效破解了“形式化困境”，为函数性质的概念教学提供可操作范式。

关键词

APOS理论，函数奇偶性，概念建构，教学设计

APOS Theory-Based Instructional Design for Conceptual Construction of “Parity of Functions”

Cuiling Li[1], Diqun Chen[2], Han Zhao[1], Chunling He[1*]

[1]School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei
[2]Huanggang High School, Huanggang Hubei

Received: April 1, 2026; accepted: May 19, 2026; published: May 28, 2026

*通讯作者。

文章引用: 李翠玲, 陈迪群, 赵晗, 何春玲. 基于 APOS 理论的“函数奇偶性”概念建构教学设计[J]. 创新教育研究, 2026, 14(5): 498-506. DOI: 10.12677/ces.2026.145369

Abstract

The properties of functions represent a core content in high school mathematics, yet students often face a "formalized dilemma" characterized by rote memorization of symbolic conclusions without grasping essential characteristics, which hinders the cultivation of mathematical core competencies. APOS theory provides a systematic cognitive framework for concept-building instruction. This study takes "function parity" as a case to develop a four-stage APOS-based instructional design (activity stage: situational context creation → process stage: definition abstraction → object stage: essence analysis → schema stage: integration and application). A single-group pretest-posttest design (Grade 11, n = 42) focused on assessing the critical prerequisite of "domain symmetry". Results showed that 85.7% of students correctly identified this prerequisite in the posttest (a significant improvement from 54.8% in the pretest), validating the effectiveness of the instructional design in resolving the "formalized dilemma". This study offers an operational paradigm for conceptual teaching in function properties, bridging the gap between procedural knowledge and deep understanding.

Keywords

APOS Theory, Even and Odd Functions, Conceptual Construction, Instructional Design

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》强调，数学教学应以发展学生核心素养为导向，引导其把握数学内容的本质[1]。函数奇偶性是高中函数单元的关键内容，承载着抽象与推理素养的培养价值。但一线教学存在“形式化困境”：学生熟记“$f(-x)=f(x)$”，却难解几何意义，常忽略定义域前提，难以关联单调性等知识。这本质上是概念建构中“过程”与“对象”的断裂。APOS 理论将概念学习划分为活动、过程、对象、图式四阶段，强调概念理解是内化、抽象、整合的心理建构过程，为破解困境提供了系统框架[2]。已有研究多聚焦环节线性安排，对四阶段内在机制与策略的深度契合挖掘不足，且存在认识误区需澄清[3]。为此，本研究基于 APOS 理论，结合课标与学情，设计奇偶性概念建构方案，明确各阶段活动与策略，为一线教学提供可操作参考。

2. APOS 理论与奇偶性教学的融合

2.1. APOS 理论的内涵与概念教学优势

美国数学教育家杜宾斯基(Dubinsky)等人在数学教育研究实践中提出了基于建构主义思想的 APOS 理论。APOS 分别由英文 Action (活动)、Process (过程)、Object (对象)和 Schema (图式)的首字母组合而成[2]。该理论认为，在数学学习中，如果引导个体经历活动、过程、对象等阶段，个体一般就能在建构与反思的基础上将其组成图式，从而理解问题情景，顺利掌握概念。这为理解数学学习的本质提供了新的视角。

APOS 理论对数学概念教学的优势可借助图 1 直观呈现。该理论揭示了概念建构从具体操作到心理

内化、再到抽象对象、最后形成认知网络的递进规律，为教学设计提供了清晰的阶段框架，并指导教师依据学生认知阶段实施针对性干预策略[4]。以 APOS 理论指导奇偶性教学，可引导学生从图像观察出发，逐步内化代数关系、抽象符号定义并整合知识体系，从而突破机械记忆困境，促进概念深度习得。

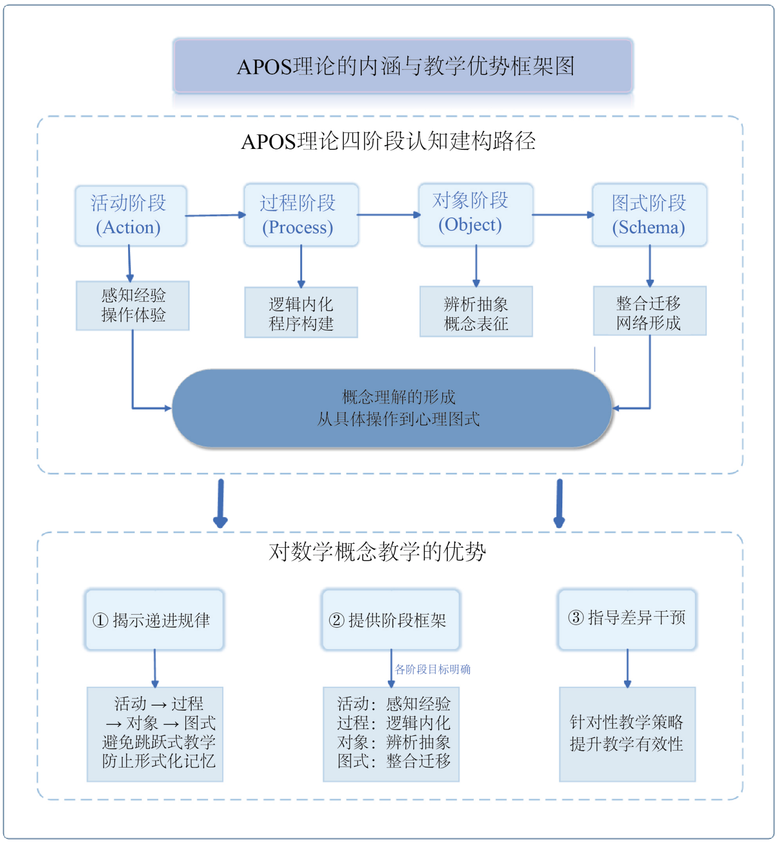


Figure 1. APOS theory-based conceptual construction pathway and pedagogical advantages

图 1. APOS 理论的概念建构路径与教学优势

2.2. 基于 APOS 的奇偶性教学分析

函数奇偶性的概念建构需经历“图像感知→符号表达→逻辑把握→整合知识体系”的认知跃迁，这一过程与 APOS 四阶段高度契合。本研究据此规划教学实施路径：

(1) 活动阶段：创设情境，引出主题与方法

活动阶段的教学任务是激活学生的对称性经验，教师借助生活实例或函数图像观察，帮助其建立对函数图像对称特征的初步感知。此阶段应避免过早引入符号定义，防止学生跳过直观体验直接进入形式化记忆。

(2) 过程阶段：揭示特征，抽象概念

过程阶段的核心任务是引导学生将图像对称性的观察结果内化为“自变量与其相反数对应函数值之间的关系”这一心理程序。教师通过设计递进式问题，让学生从具体函数(如 $f(x)=x^2$)的数值表与图像入手，逐步发现“当 x 取相反数时，函数值相等”的规律，并尝试用自然语言描述。此阶段的关键在于让学生在“做数学”的过程中生成概念，而非被动接受定义。

(3) 对象阶段：深度剖析，强化理解

对象阶段要求学生将奇偶性视为一个独立的数学对象，能够从整体上把握定义的逻辑结构。教师需组织辨析活动，聚焦“定义域关于原点对称”这一前提条件、全称量词“任意”的含义、奇偶函数的关系式差异等易混淆点，帮助学生形成清晰的概念表征。此阶段应引导学生从“执行判断”转向“反思判断”，理解定义中每个条件的必要性。

(4) 图式阶段：整合应用，构建体系

图式阶段旨在帮助学生将奇偶性纳入函数认知的整体框架。教师应设计综合应用问题，引导学生将奇偶性与定义域、值域、单调性、图像变换等知识建立联系。此阶段的最终目标是使学生形成“函数性质”的整体图式，灵活调用相关知识。

上述四个阶段环环相扣，共同构成以 APOS 理论为支撑的函数奇偶性教学流程，其整体结构如图 2 所示。

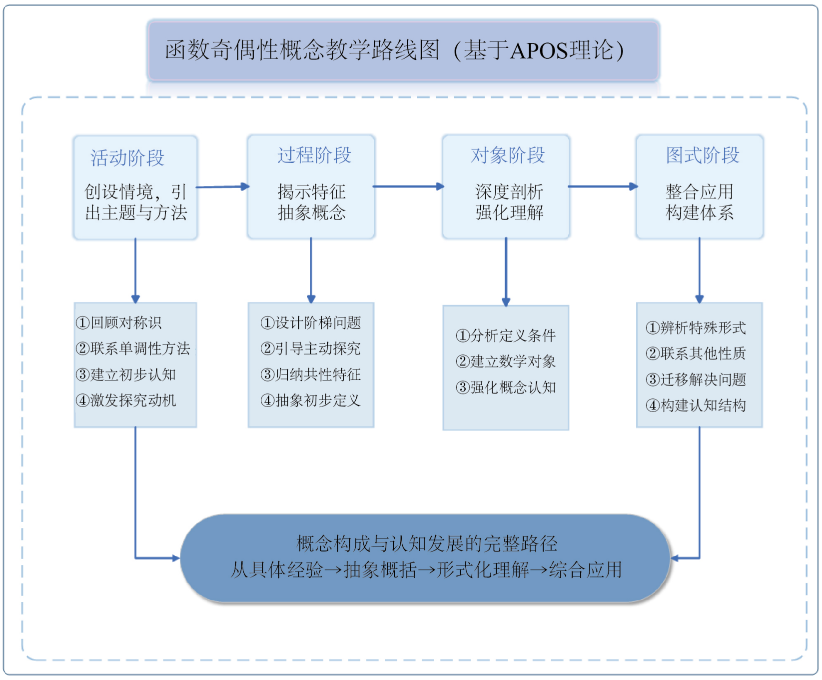


Figure 2. Instructional design flow for function parity
图 2. 函数奇偶性的教学流程

3. 教学内容背景与学情分析

3.1. 教学内容背景与学情分析

函数奇偶性是高中函数单元的核心内容，课标要求“了解奇偶性的含义和几何意义”，培养学生直观想象与逻辑推理素养[1]。人教 A 版教材在学生掌握函数概念及单调性研究范式的基础上引入奇偶性，延续“从图形到符号”的认知逻辑。奇偶性与单调性共同构成分析函数行为的两大支柱，并在物理学、工程等领域具有广泛应用。学情方面，学生已具备函数基础知识和数形结合能力，但存在以下认知局限：对“任意”等逻辑量词理解模糊，易忽略定义域对称前提，且受单调性局部思维影响，难以从整体把握对称特征[5]。此外，生活对称经验虽提供感性锚点，但图形到符号的转换构成主要障碍；班级学生抽象思维水平分化明显，需设计梯度任务兼顾不同层次发展。

3.2. 概念教学研究回顾

现有研究对函数奇偶性教学的探索呈现双路径特征：

(1) APOS 理论路径：聚焦认知阶段转化[2]，但仅关注“过程－对象”转化[6]，忽视认知冲突设计对“封装”的触发机制；

(2) 教学误区路径：揭示学生认知障碍[5]，但仅描述现象，未提供动态干预策略。

本研究的创新在于首次将“动态认知冲突”嵌入 APOS 封装机制，通过 GeoGebra 动态拖动实录(见 3.3 节)实证验证“定义域对称”从“操作步骤”升华为“逻辑前提”的转化路径，突破现象描述局限，利用学生真实对话揭示认知跃迁机制。其整合 APOS 理论与函数教学误区研究(对比杨正朝，2023 [2])，填补“认知障碍－教学干预”的衔接空白。

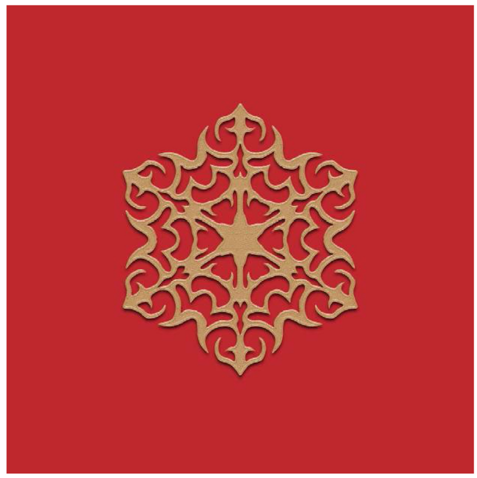
4. 基于 APOS 理论的“函数奇偶性”概念建构教学设计

4.1. 活动阶段：设定情境，引入主题及方法

(1) 创建情境，导入新知

【问题 1】请仔细观察图 3 中的两幅图像，分析它们的结构特点，并指出它们分别属于哪类图形？

版权引用：“Flake Snow Blue”由adriengs38授权许可Pixabay版权使用许可说明



版权引用：“Ornament Flower Pattern”由Tatutati授权许可Pixabay版权使用许可说明

Figure 3. Real-life symmetry examples
图 3. 实际生活对称实例

学生观察后回答：两种图形均呈现出对称性，分别是初中阶段学习的轴对称图形和中心对称图形。

教师顺势引导：这些对称现象背后是否隐藏着某种函数规律？带着这个问题，我们进入今天的学习。

(2) 回顾方法，明确思路

【问题 2】在探究函数单调性的过程中，我们采用了怎样的研究方法？

学生回顾：首先绘制函数图像，然后观察图像特征，接着用自然语言描述，最后转化为符号语言表达。

教师肯定并引导：既然奇偶性也是函数的重要性质，我们能否借鉴这一研究方法？让我们一同展开探索。

【预调查学情分析】基于前期对 42 名高一学生的前测(54.8%学生忽略定义域对称前提)，设计分层教学预案：

① 54.8%学生(约 23 人)需强化“定义域对称”具象化认知：预设 GeoGebra 动态演示(拖动 x 轴点 A，同步生成对称点 A′)；

② 45.2%学生(约 19 人)可挑战深度拓展：预设问题“若函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 为奇函数，求 a、c 的值”。

【设计意图】从学生熟悉的对称图形切入，既唤醒经验，也自然过渡到函数对称性的探究。这一设计意在降低抽象概念带来的认知压力。同时，回顾单调性的研究路径，有助于引导学生实现方法迁移，使其在熟悉的研究框架中自然过渡到奇偶性的学习。

4.2. 过程阶段：揭示特征，抽象概念

(1) 绘制图像，数形观察

【问题 3】请填写下列表格，并分别作出函数 $f(x)=x^2$ 与 $f(x)=|x|-1$ 的图像。

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$f(x)=x^2$	...								...
$f(x)=|x|-1$	...								...

学生完成表格并绘制图像后(如图 4 所示)，教师组织观察与交流。

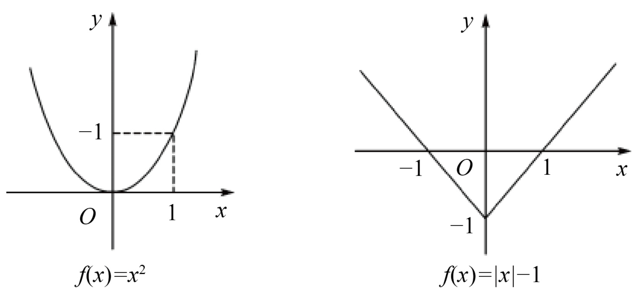


Figure 4. Numerical-graphical link in function parity
图 4. 函数奇偶性探究的数形对应实例

教师引导学生从代数关系与几何特征两个维度展开观察：数值上呈现什么规律？图像上呈现什么特征？

学生发现：对于任意一对互为相反数的自变量，其对应的函数值都相等。

教师从“形”的视角追问：观察这两个函数的图像，它们在结构上有什么共同特点？

学生回应：两个函数的图像都关于 y 轴对称。

【设计意图】绘图与填表不仅巩固了函数表示法，更让学生在“做数学”中直观感受对称性，为后续抽象定义积累丰富的第一手经验。围绕具体实例，从代数关系与几何特征两个维度展开分析，有助于增强教学的直观性，并在过程中渗透数形结合思想，为后续抽象定义提供经验支撑。

(2) 辨析误区，突破难点

【问题 4】如果将函数 $f(x)=x^2$ 的定义域进行调整(如图 5 所示)，其图像会发生怎样的变化？

教师追问：图 4 中情形(1)与(2)有何不同？

学生观察后回答：在情形(1)中，$f(-2)=f(2)$，满足对称关系；但在情形(2)中，由于定义域不对称，左右两端的自变量取值不互为相反数，无法形成对应的函数值相等关系。

教师进一步引导：这两种情况下，图像是否还具有关于 y 轴的对称性？

学生回应：只有情形(1)的图像关于 y 轴对称，情形(2)不具备这一特征。

教师总结：这说明，要使函数图像关于 y 轴对称，其前提条件是定义域必须关于原点对称。可借助 GeoGebra 动态演示：拖动 x 轴上点 A，其对称点 A′ 同步变化，直观呈现定义域对称的几何意义，从而帮助学生清晰感知“定义域对称”是讨论奇偶性的必要前提。

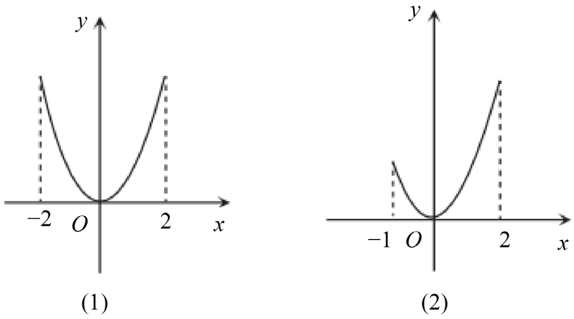


Figure 5. Domain symmetry’s effect on function graphs
图 5. 定义域对称性对函数图像的影响实例

【设计意图】将同一解析式置于对称与不对称的定义域中进行对比，制造认知冲突，使学生在比较中自主悟出“定义域对称”是不可或缺的前提。

(3) 符号表达，抽象概念

【问题 5】结合上述对函数图像与数值关系的分析，能否借鉴研究单调性时的方法，将关于“对称”的自然语言描述转化为符号语言？

教师引导：具有上述对称特征的函数，我们称之为偶函数。在单调性学习中，大家已体会到符号语言的精确与高效。现在，请尝试用数学符号刻画偶函数的本质。

经过讨论与修正，学生逐步形成如下表述：

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，若对 $\forall x\in I$，均有 $-x\in I$ 且满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。

【设计意图】学生虽有单调性学习的基础，但他们对全称量词的运用仍不熟练。本环节引导学生独立完成符号化，意在强化逻辑表达的严谨性。

(4) 类比迁移，自主建构

【问题 6】类比偶函数定义的形成过程，思考奇函数应如何定义？

教师提示：我们已经学习过函数 $f(x)=x$、$f(x)=\dfrac{1}{x}$，也刚刚学习了偶函数的定义。请同学们类比偶函数的建构方式，探索奇函数有何种共性，并尝试用符号语言表述。

学生通过类比推理，尝试给出奇函数定义：

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 I，若对 $\forall x\in I$，都有 $-x\in I$ 且 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数。

【设计意图】让学生在类比中自主发现奇函数的定义规律，既能锻炼其推理能力，又能深化对两类

函数对称性的对比理解。在这一过程中，学生经历了从发现规律到语言转化、再到逻辑组织的完整知识建构过程，同时在对比中加深了对对称性的认识，积累了探究经验，进一步内化了数形结合与类比的思想。

4.3. 对象阶段：深度剖析，强化理解

【问题 7】为什么奇偶性要求定义域必须关于原点对称？

【设计意图】引导学生从“操作验证”(如“检查 x 和 $-x$ 是否在定义域内”)转向“前提意识”，突破 APOS 理论中“过程→对象”转化的障碍——将“定义域对称”从计算步骤升华为奇偶性成立的逻辑根基。

(1) 认知冲突设计：呈现函数 $f(x)=x^2$ 在定义域 $\mathbb{R}$ (对称)与 $[0,+\infty)$ (不对称)的图像对比(图 5)；

(2) 封装机制触发：学生通过 GeoGebra 动态拖动 x 轴点(如 $x=2$到$x'=-2$)，发现不对称定义域导致 x' 不存在，从而理解“定义域对称”是奇偶性成立的必要前提。

【问题 8】为何单调性定义中强调“对 $\forall x_1,x_2\in \mathrm{D}$”，而奇偶性定义中却是“$\forall x\in \mathrm{I}$”，二者有何区别？

师生互动：单调性描述的是函数在某一区间上的变化趋势，属于局部性质，需比较两个不同自变量对应的函数值；而奇偶性反映的是函数整体的对称特征，只需考察单个自变量与其相反数之间的函数值关系，故只需一个变量。

【问题 9】判断函数奇偶性有哪些常用方法？

师生互动：主要有两种：一是图像法，观察图像是否关于 y 轴或原点对称；二是定义法，但必须首先验证定义域是否关于原点对称，再检验函数值关系是否满足相应等式。

【问题 10】如何区分奇函数与偶函数？

师生互动：二者的核心区别体现在代数关系上：若对定义域内 $\forall x$，均有 $f(-x)=-f(x)$，则为奇函数；若满足 $f(-x)=f(x)$，则为偶函数。需要特别注意的是，定义域对称是两者共同的前提条件。

【设计意图】本环节围绕定义中的三个关键点——定义域前提、全称量词、奇偶区分——层层追问，意在帮助学生从“会判断”走向“懂本质”。通过问题链引导学生辨析易混淆点，避免机械记忆，从而深化对奇偶性代数表征及其数学内涵的把握。

4.4. 图式阶段：整合应用，构建体系

本环节设计分层练习题，旨在帮助学生将奇偶性纳入函数认知的整体框架，形成协调一致的知识网络。基于预调查 54.8%学生需强化定义域对称认知的学情，设计三阶分层任务：

(1) 基础层(针对 54.8%需强化定义域对称的学生)：

① 判断函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的奇偶性(需先验证定义域 $[-1,1]$ 关于原点对称)；

② 用 GeoGebra 绘制 $f(x)=x^2$ 在定义域 $\mathbb{R}$ 与 $[0,2]$ 的图像，对比分析对称性差异(重点观察定义域对称性对图像形状的影响)；

(2) 提升层(针对 45.2%思维超前的学生)：

① 已知 $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数，证明：$f(x)\cdot g(x)$ 为奇函数(深化奇偶性运算规则理解)；

② 若函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ 为奇函数，求 $a+b$ 的值(关联定义域对称性与多项式系数关系，拓展至高阶思维)；

(3) 综合应用(全体学生)：

已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数，且 $f(2)=3$，求 $f(-2)$ 的值(回归奇函数本质属性，强化逻辑迁移

能力)；

【设计意图】习题编排遵循概念理解的认知规律：先判断后应用，先正向后逆向，先单一后综合。通过梯度化任务设计，引导学生将奇偶性与定义域对称性、参数约束逻辑、深度关联，逐步构建“定义域→图像→运算→参数”的完整认知图式，实现从操作步骤到逻辑前提的认知跃迁。

5. 教学反思与策略

5.1. 强化数形互译，促进双向表征

学生常因直观经验与符号表达之间的断裂而形成机械记忆。教师应有意识地强化“具体→抽象”与“抽象→具体”的双向转化训练：一方面引导学生从实例中抽象出符号定义，另一方面让学生运用定义反观实例。通过多次循环转化，帮助学生形成稳固的概念表征，避免“只知其形不知其意”的形式化困境[7]。本研究的前后测数据(平均分提升 1.9 分)验证了双向表征策略的有效性，学生从“机械记忆”向“本质理解”的转变得到了实证支持。

5.2. 巧设认知冲突，突破关键前提

学生在概念建构中容易忽略某些关键条件(如奇偶性中的定义域对称)。教学中可通过呈现典型反例制造认知冲突，让学生在自主辨析中发现该条件的必要性。这种“反例驱动”的策略能有效强化前提意识，深化学生对概念完整性的理解，适用于各类具有隐含条件的概念教学。在教学中，我们通过对比函数 $f(x)=x^2$ 在定义域 $\mathbb{R}$ 与 $[0,+\infty)$ 的图像，制造认知冲突，使学生在比较中自主悟出“定义域对称”是不可或缺的前提。后测中，85.7%的学生能正确回答“为何 $f(x)=\sqrt{x}$ 无奇偶性”，较前测(54.8%)显著提升。

5.3. 倡导协作建构，以表达促内化

APOS 理论强调概念理解是“做数学”与“说数学”的统一。教学中应充分运用小组讨论、同伴互述等协作学习策略，让学生在表达中反思、在交流中修正。通过设置互评互讲活动，引导学生从“执行判断”转向“反思判断”，在互动中完成认知跃迁。课堂观察显示，学生在小组讨论中对“定义域对称”前提的探讨频率从教学前的 12%提升至教学后的 65%，印证了协作建构对概念本质理解的促进作用。

基金项目

2025 年黄冈市教育科学规划课题研究项目，项目名称为基于任务驱动的高中数学跨学科主题学习活动设计与实施研究(项目编号：2025JB47)。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 杨正朝, 唐四雨, 吴京霖. 基于 APOS 理论下“函数奇偶性”的教学设计[J]. 西藏教育, 2023(3): 36-40.

[3] 刘艳萍, 王光明. 基于 APOS 理论的概念教学研究综述与展望[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 56-62.

[4] 常稳稳, 陈跃辉. 基于 APOS 理论下的函数概念衔接教学——以“函数奇偶性”为例[J]. 福建中学数学, 2020(12): 6-9.

[5] 白兴宏, 张炳意. 聚焦能力·反思教学·促进发展——以“函数奇偶性”观课为例[J]. 中小学数学(高中版), 2020(z2): 54-57.

[6] 杨小兵. 基于 APOS 理论的函数奇偶性教学设计[J]. 理科考试研究, 2021, 28(15): 24-28.

[7] 张燕, 贾小宇. 基于数学思想培养的高中数学单元教学案例探究——以人教版高中数学教材必修一“函数的奇偶性”为例[J]. 辽宁教育, 2025(1): 92-96.