

数学分析启发式教学的探索与实践

——以级数的敛散性为例

黄木根*, 梅 鹏

广东财经大学统计与数据科学学院, 广东 广州

收稿日期: 2026年4月7日; 录用日期: 2026年6月1日; 发布日期: 2026年6月11日

摘 要

作为连接初等数学与高等数学的桥梁, 数学分析是数学思维训练的基石, 变化与逼近的哲学, 具有高度抽象性, 对初学者并不友好。启发式教学强调以学生为主体, 通过创设情境、设置障碍、类比引导等方式激发学生的学习动机。启发式教学思想在我国具有悠久的历史。文章以级数的敛散性为例, 探讨在数学分析中应用启发式教学方法。通过还原知识的生成过程, 设计富有层次的问题链, 将知识的历史发展脉络、逻辑推演的过程融入到教学环节中。实践表明, 启发式教学不仅能降低学生的认知困难, 更能引导其洞察知识的本质, 实现逻辑思维与创新能力的协同发展。

关键词

启发式教学, 数项级数, 敛散性, 认知冲突

Exploration and Practice of Heuristic Teaching in Mathematical Analysis

—A Case Study on the Convergence and Divergence of Series

Mugen Huang*, Peng Mei

School of Statistics and Data Science, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: April 7, 2026; accepted: June 1, 2026; published: June 11, 2026

Abstract

As a bridge connecting elementary mathematics and advanced mathematics, mathematical analysis

*通讯作者。

文章引用: 黄木根, 梅鹏. 数学分析启发式教学的探索与实践[J]. 创新教育研究, 2026, 14(6): 57-63.

DOI: 10.12677/ces.2026.146403

is a cornerstone for training mathematical thinking, and a philosophy for change and approximation. It is highly abstract and thus unfriendly to beginners. Heuristic teaching is a kind of special teaching model, which is characterized by student-centered. This approach is focus on stimulating students' motivation by creating situations, setting question circumstances, and using analogies as guidance. The philosophy of heuristic teaching has a long history in China. Taking the convergence and divergence of series as an example, this paper explores the application of heuristic teaching method in mathematical analysis. By constructing a four-level heuristic framework "cognitive conflict, intuitive perception, logical construction, and transfer-creation", the purpose of heuristic teaching is to guide students' autonomous learning and to reconstruct the process of knowledge generation. A well-designed, hierarchical chain of questions is developed, integrating the historical development and logical deduction of knowledge into the teaching process. The teaching practice of several years shows that the heuristic teaching not only reduces students' cognitive difficulties but also helps them gain insight into the essence of knowledge, thereby achieving the synergistic development of logical thinking and innovative ability.

Keywords

Heuristic Teaching Method, Series, Convergence and Divergence, Cognitive Conflict

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

数学分析是高等院校数学类专业及相关学科的一门核心主干课程,其内容涵盖实数理论、极限理论、微积分学以及级数论等板块,承担着培养学生严谨的逻辑思维能力、推理论证能力以及运用数学方法解决实际问题能力的重要使命[1][2]。我国数学分析的教学长期沿用以欧洲大陆讲授法为主体的模式,普遍采用“定义-定理-例题”的线性教学流程[3]。这种模式追求严谨的数学概念,强调系统的逻辑性,主张数学分析应从极限的 $\varepsilon-\delta$ 语言开始学习,导致课程教学面临着一系列结构性困境。这种强调系统地传递数学知识体系的教学模式逐渐显现出过度强调推理过程,以及对应用理解关注不足的倾向[3]。这种教学模式注重理论推导和逻辑推理,容易导致学生出现“入门难、理解难、坚持难”的现象,使初学者难以建立起完整的数学建模思维体系,影响后继课程的学习[1][3]。系统审视并创新数学分析教学方法,有助于提升数学学科人才培养质量,也是深化高等教育改革的题中之义。将课程教学方法由“知识中心”逐步转向“育人中心”是宏观演进趋势[1][3]。

启发式教学(Heuristic Teaching)以启发学生思维为核心,是引导学生积极主动地掌握知识的各种具体教学方法的统称。其核心特征是强调学生的主体地位,以教师的引导与启发为前提,注重培养学生的独立思考能力与创新精神,具有灵活性和开放性,不拘泥于固定模式的特点[4]-[6]。启发式教学强调在教学中以学生为主体,问题为导向,教师通过创设情境、设置障碍、类比引导等方式,激发学生内在的学习动机,促使学生通过独立思考、合作探究来“再发现”知识,而非被动接受现成结论[5]-[7]。启发式教学模式与在国际科学类课程教学中广泛应用的5E教学模式具有很多相似之处。例如,两者都强调教学中学生的主体地位。20世纪80年代末期提出的5E教学模式,将教学分成吸引(Engagement)、探究(Exploration)、解释(Explanation)、迁移(Elaboration)和评价(Evaluation)五个环节[8][9]。该模式基于建构主义学习理论,以学生为中心,鼓励学生主动探究、积极思考,激发学生的探究意识,让学生在合作交流中发现问题、

分析问题和解决问题。5E 教学模式不仅有助于提高学生的学习效果和学习兴趣, 还有助于培养学生的批判性思维和终身学习能力[9][10]。5E 教学模式是具有明确的操作流程, 认为学生学习过程就是知识主动建构的过程, 强调探究式学习和形成性评价, 是当代重要的探究教学模式和概念转变教学模式[11][12]。另一方面, 启发式教学属于教学思想的层面, 是指导教师进行教学活动的一种总体原则和指导思想, 具有高度的抽象性与普遍适用性。启发式教学反映了教学的基本规律, 可适用于任何学科的课堂教学[4]-[6]。而 5E 教学模式则属于教学方法的层面, 是建立在特定理论(建构主义、概念转变理论)基础上的、具有明确操作流程的具体教学模式。近年来, 5E 教学模式被逐渐应用于非科学类课程的课程教学。例如, 宋媛媛基于教学评一体化视角, 将 5E 教学模式应用于初中英语阅读的课程教学中。发现在 5E 英语阅读教学模式下, 各教学环节紧密相扣, 能够充分发挥学生的主观能动性, 逐步提升学生的思维能力与核心素养[13]。

2. 我国启发式教学思想的历史

我国是一个历史悠久、文化灿烂的国家, 非常注重知识传承, 涌现了一大批教育家和思想家。在知识传播的过程中, 总结出很多教育思想。启发式教学方法就是其中之一, 其在我国教学中的应用有着悠久的历史。孔子在《论语·述而》中提出启发式教学的原则: 不愤不启, 不悱不发。举一隅不以三隅反, 则不复也[4]。孔子强调学生自主学习的重要性和必要性: 不到苦思冥想仍想不通的时候, 不要去开导他; 不到想说却说不出来的时候, 不要去启发他。老师告诉学生一个方面, 学生不能由此推知其他三个方面, 就不再重复教他了。孔子的这句名言道出了教育的真谛, 强调学生自主学习在知识获取与能力提升中的不可替代性作用。朱熹继承并发扬了孔子的教学思想, 对孔子的启发教学思想进行了系统阐释。朱熹在《论语集注》中对孔子的“不愤不启, 不悱不发”教育思想作如下注释: 愤者, 心求通而未得之意; 悱者, 口欲言而未能之貌。启, 谓开其意, 发, 谓达其辞[4]。大意是学生内心苦求通达而未得, 口中欲言而未能, 教师此时予以开导和启发。“愤”指学生想要尽快解决却又弄不明白的心理状态, 而“悱”是想表达却又说不出口的心理状态。朱熹强调启发式教学的时机: 不待愤悱而发, 则知之不能坚固; 待其愤悱而后发, 则沛然矣。旗帜鲜明的指出自主学习对学生深入理解与掌握知识的重要性。只有当学生对问题进行深入思考, 达到“愤悱而发”的程度, 其对知识的理解才能深刻。老师的作用就是当学生自主学习, 达到“愤悱”的状态后, 进行引导和讲解, 让学生知其然也知其所以然, 达到举一反三的目的。

启发性原则这种强调引导学生主动思考而非强行灌输的教学思想是我国古代教育思想的重要原则, 受到广泛的应用。比如, 在《礼记·学记》中关于启发性教学原则有如下的论述: 君子之教喻也, 道而弗牵, 强而弗抑, 开而弗达[4]。大意为教师教育学生, 要引导学生自己学习而不是强制学生学习, 要鼓励学生自己学习而不是压抑学生的学习热情, 要启发学生思考而不是直接告诉学生答案。“道而弗牵”的教育原则主张教师在教学过程中应引导学生主动思考而非强行灌输, 强调通过启发式教学激发学生的自主性。这一思想与“强而弗抑”(鼓励而非压抑)、“开而弗达”(启发而非告知答案)共同构成了启发性教学的核心, 体现了对学生心理发展规律的尊重。现代教育心理学研究指出, 其理念与建构主义学习理论有高度契合之处。

针对我国近代教育以考取功名为目的, 脱离实践的现象, 陶行知先生强调教育要启发学生追求真理、做真实的人。其倡导的“生活教育”理念与启发式教学的宗旨高度契合。陶行知毕生致力于教育改革, 创立了以“生活即教育”、“社会即学校”、“教学做合一”为核心的生活教育理论[4]。主张教育应与生活和社会紧密结合。另外, 叶圣陶先生也提出“教是为了不教”的教育理念: “所谓教是为了不教, 就是要使学生自己掌握学习的方法, 提高创新的能力[14]。只有这样, 他们才可以离开教师, 才可以超过教师, 才可以成为人才。”启发式教学这种强调教育的真谛在于点燃学生求知的欲望, 引导学生自主学习的教学理念, 在我国现代中小学教学中也得到广泛的应用[14]。

3. 启发式教学在数学分析课程教学中的主要作用

作为专业基础课, 数学分析在数学各专业中扮演着核心思维训练的基石角色。它不仅仅是微积分的严格化, 更是连接初等数学与现代高等数学的桥梁[1]-[3]。数学分析的作用主要体现在以下四个维度。首先, 重塑学生对数学的认知。数学专业的学生需要从知其然转变为知其所以然, 从“计算”转向“证明”[1]。例如, 掌握函数确界的概念, 理解确界与最值的区别, 并用确界原理证明数列及函数的单调有界定理。又如, 掌握连续与一致连续概念的区别, 理解为什么闭区间上的连续函数一定一致连续, 等等[2]。在数学分析的学习过程中要注重消除直觉与错觉导致理解偏差。用一些特殊构造的反例, 如狄利克雷函数、黎曼函数、锯齿波等等, 培养学生用精确的数学语言描述模糊概念的能力。通过严格的逻辑训练, 为后续更高阶更抽象的课程, 如实变函数、泛函分析、拓扑学等等打好基础。其次, 奠定后续核心课程的基础。数学分析几乎是数学专业所有分支的基础, 支撑后续更高阶更抽象的课程的深入学习。比如, 实分析是将数学分析的有限维、具体空间的分析推广到更一般的可测函数和积分理论, 而泛函分析则将其抽象到无穷维空间。复分析本质上是将数学分析中的极限、连续、微分、积分等等概念与理论移植到复数域, 并由此产生全纯性、共形映射等更优美的性质。另外, 数学分析中的开集、闭集、紧性、连通性等概念是点集拓扑的源头和具体模型。再次, 训练学生的数学核心素养。数学分析的学习过程, 本质上是对学生数学思维能力进行强化训练, 以掌握从事数学研究或理论应用的基本功。通过刻苦学习, 学生需在抽象思维能力和逻辑思维链条上有大的提高, 完成从具体的数字运算过渡到对函数空间、算子、结构的操控, 学会构建严谨的证明。比如, 确界原理、单调有界定理、柯西收敛准则等等基本定理的推导与证明。最后, 长远的隐形价值。数学分析对学生抽象思维和逻辑推理的训练, 培养学生在严格框架下进行创造性构造的思维习惯, 这种习惯在算法设计、模型论证中至关重要[3][5][15]。使学生自然地形成解决问题的基本思路与逻辑链条。

简而言之, 数学分析提供变化与逼近的哲学, 是衡量一个学生是否真正进入了数学专业思维体系的试金石[6][7]。数学分析课程的高度抽象性, 对初学者比较不友好, 易使学生产生学习困难。在数学分析的教学过程中, 启发式教学具有不可替代的作用。首先, 激发学生的认知主动性。启发式教学强调引导学生主动思考而非灌输的教学思想将枯燥的概念转化为待解决的问题, 促使学生从“要我学”转变为“我要学”。其次, 促进学生对理论体系的深入理解。通过揭示概念背后的直觉与逻辑必然性, 帮助学生建立稳固的认知结构, 避免死记硬背。比如, 数列极限定义的本质是当 n 充分大时, 数列的项都挤某一常数的一个任意小的邻域内, 当然导致 n 充分大时数列的项都挤在一起, 从而可引出数列的柯西收敛准则[2]。再次, 培养学生数学思维。启发式教学强调学生的自主学习, 在“猜想 - 反驳 - 修正”的过程中, 训练学生的批判性思维与严谨论证能力[6][7]。比如, 考虑函数 $1/x$ 在区间 $(0,1)$ 上的连续性时, 根据连续的概念, 对 $(0,1)$ 上的一个固定点 x_0 , 考虑 $1/x$ 在点 x_0 的连续性。先限制 $x_0/2 < x < 3x_0/2$ 。对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = x_0^2\varepsilon/2 > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x - x_0}{x_0 x} \right| < \frac{2}{x_0^2} |x - x_0| < \varepsilon.$$

引导学生发现 δ 不仅与 ε 有关, 而且与点 x_0 也有关。学生自然会提出疑问: 是否存在公共的 δ , 只与 ε 有关, 与点 x_0 无关呢? 就可以自然地引出一致连续性的概念。利用函数 $1/x$ 在区间 $(0,1)$ 上连续, 但不一致连续, 引导学生较好的理解连续和一致连续两个概念[2]。最后, 通过实例引导可降低学生的抽象焦虑。启发式教学以直观的实例为跳板, 为抽象概念搭建框架, 可缓解学生对严格数学分析的畏难情绪[15]。

4. 启发式教学在数项级数中的教学实践

学习数项级数时, 学生往往容易陷入“死记判别法”的误区, 忽略级数的和本质上是“部分和数列的极限”这一核心。启发式教学的核心在于通过精心设计的问题链、认知冲突和类比迁移, 引导学生“重新发现”数学知识, 从而建立深刻的理解结构[1][3]。级数的敛散性是级数部分的第一章, 是整个级数部分的基础[2]。主要介绍数项级数收敛与发散的概念, 以及级数收敛的判别法则。可通过《庄子·杂篇·天下》提到的“一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”例子[2]。将每天截下那一部分的长度加起来就引出求无穷多个数相加的和

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

显然所有截下的木棒长度之和为 1。抛出如下问题: 为什么这无穷多个数之和为 1。引导学生思考前 n 天截下的木棒长度之和为 $1 - 1/2^n$, 余下的木棒长度为 $1/2^n$ 。从而引导学生利用前 n 项部分和数列的极限来定义级数的和与收敛性。

在教学过程中, 可构建“认知冲突 - 直观感知 - 逻辑建构 - 迁移创造”四级启发式框架引导学生自主学习[6][7]。首先, 创设认知冲突, 制造“为什么”的求知饥渴感。级数教学最大的难点在于“无限和”与“有限和”的本质区别。传统的直接讲授无法消除学生“通项趋于 0 就应该收敛”的认识误区。可以应用如下启发策略, 通过反直觉的问题或历史悖论(如芝诺悖论、无穷级数的“流浪者”问题), 让学生在“矛盾”中意识到有限思维无法处理无限问题, 从而激发探究欲望。比如可提出以下例子: 假设有一根长 1 米的可无限拉伸的橡皮筋, 第一次拉长 $1/2$ 米, 第二次拉长 $1/3$ 米, 第 n 次拉长 $1/(n+1)$ 米。显然, 橡皮筋的最终长度可表示为

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

请问这根橡皮筋最终会被拉长到无穷远, 还是会趋近于某个固定的长度?

其次, 引导直观感知, 从数到形具象化。可通过数形结合(如面积堆积、数轴上的跳跃等等方式), 让学生在视觉上建立“部分和数列”的直观印象。例如, 在数轴上动态演示级数 $\sum 1/2^n$ 部分和 $1 - 1/2^n$ 的变化趋势。引导学生观察: 通项 $1/2^n$ 只是每次增加的大小, 而级数的敛散性取决于部分和 $1 - 1/2^n$ 是否会无限地接近某一常数。再次, 从特殊到一般构建逻辑框架。让学生从易于理解的实例出发, 总结出级数收敛的概念。例如, 从级数 $\sum 1/2^n$ 的和 1, 引导学生得出级数的和是否存在可以由其前 n 项部分和数列的极限来定义。由此引出利用数列收敛的判别法则来判断级数的收敛性。比如, 让学生基于数列收敛的柯西准则写出级数收敛的柯西准则。对调和级数 $\sum 1/n$, 可计算其前 n 项部分和数列

$$S_5 = 2.28333, S_{10} = 2.92897, S_{10^2} = 5.18738,$$

$$S_{10^3} = 7.48547, S_{10^6} = 16.69531, S_{10^{12}} = 21.30048.$$

调和级数增长得非常慢, 在 100 亿次之后, 只能达到 21.30048, 之后增长速度越来越慢。那么, 它最终会去哪里? 它是“停”在某个具体的值上, 还是继续增长? 注意到虽然调和级数 $\sum 1/n$ 的前 n 项部分和数列增长速度很慢, 但确实一直在增长, 并没有停下。雅各布·伯努利在 1689 年发表的论文《论无穷级数及其有限和》中利用逐项累加法给出了一个证明其发散的创新性方法[15]。要判断它是否趋向无穷, 我们需要找到一个比它更小的、且明显发散的级数作比较。比如

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

如此下去, 引导学生总结出

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$$

从而引导学生发现调和级数 $\sum 1/n$ 会一直在增长到无穷大。学生从经历计算的繁琐与迷茫, 到找好参照物的自然提炼, 思考中完成从具体到抽象的思维跃迁。

最后, 回归本质, 从判别法回到极限定义。启发式教学要防止学生沦为“判别法机器”。引导学生意识到, 所有判别法的根源都是部分和数列的极限。在收敛概念的基础上, 引导学生基于柯西准则, 给出级数发散的第二个定义, 并由此定义证明调和级数 $\sum 1/n$ 的发散性。引导学生理解, 通项趋于 0, 只是收敛的必要条件, 而非充分条件。调和级数就是那个经典的反例。级数的敛散性这一节是级数理论的开端, 从此学生从有限和进入无穷和的全新领域, 初学的学生会产生很多疑问。要引导学生理解级数收敛和部分数列收敛的等价性, 体会“万变不离其宗”的数学思想。

启发式教学方法相比数学分析传统的“定义-定理-例题-练习”的教学模式具有明显的优势与特点。启发式教学变“被动接受”为“主动建构”, 强调让学生经历“猜想-验证-修正-证明”的完整过程[1][6][7]。学生由被动学习者转化为主动参与创造的探索者。这种训练对于培养具备创新能力的数学人才至关重要。比如, 在讨论调和级数的敛散性的时候, 我们并不直接告知学生“调和级数发散”, 而是引导同学通过分组放缩的方法, 自己发现了调和级数中包含无数多个 $1/2$ 。这种“发现感”带来的成就感, 远胜于死记硬背“调和级数发散”这个结论。学生即使毕业多年, 也会记得“那个慢吞吞却奔向无穷的级数”。启发式教学变“技巧灌输”为“思想渗透”。学生将调和级数与发散的级数作比较, 得到调和级数的发散性, 引导出“找更小的参照物”策略, 掌握放缩和比较的思想。将“孤立知识点”联接成“认知网络”。调和级数 $\sum 1/n$ 虽然通项 $1/n$ 趋于零, 其发散性说明通项趋近 0 的速度还不够快, 要保证收敛, 通项趋于 0 的速度要更快。再与 p 级数 $\sum 1/n^p$ 作比较, 得出 p 级数当 $p > 1$ 时收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散[2]。这样可帮助学生建立了不同知识之间的联系, 并建立“极限-数列-部分和-级数”的知识链条, 为后续学习幂级数、傅里叶级数中“收敛性”的复杂性奠定了坚实的直觉基础。启发式教学可有效缓解了学生的“分析恐惧症”。部分大一新生, 会对数学分析严格的理论体系, 高度抽象的逻辑推理产生畏难情绪。启发式教学通过生动的问题情境、具身认知的实验活动(如手动计算部分和、分组重排), 让冰冷的知识变得生动有趣, 有效提升了学生的学习效能感与学习兴趣。

在数学分析的教学中灵活应用启发式教学, 关键在于教师要从“知识传授者”转变为“思维教练”。通过设计富有层次的问题链, 将历史发展的脉络、逻辑推演的过程融入到教学环节中, 让学生在“困而求知”中掌握判别法, 在“疑而思辨”中理解收敛的本质[6][7]。这样的课堂, 虽然前期铺垫比直接讲定理耗时, 但换来的却是学生理解深度的跃迁和数学思维的真正生长。启发式教学并非简单的课堂提问技巧, 而是一种以学生认知规律为基点的教学哲学。在数项级数乃至整个数学分析的教学中, 教师若能善用认知冲突、历史溯源、类比迁移等策略, 便能引导学生穿越抽象的迷雾, 真正步入分析数学的堂奥, 实现知识传授与思维启迪的双重目标[6][7]。

参考文献

- [1] 杨一浓, 王金环, 刘生全, 田更. 基于真实问题的数学分析课程教学改革[J]. 创新教育研究, 2025, 13(8): 191-196.
- [2] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 第 6 版. 北京: 高等教育出版社, 2025.
- [3] M·克莱因, 张理京, 张锦炎. 古今数学思想[M]. 江泽涵, 等, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 2014.
- [4] 肖健彬. 中国教育思想史[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [5] 张奠宙, 宋乃庆. 数学教育概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.

-
- [6] AD·科罗尔. 启发式教学: 对话与沉默[M]. 郭淑红, 译. 北京: 中国社会科学文献出版社, 2021.
- [7] HF·伍德. 基于问题导向的互动式、启发式与探究式课堂教学法[M]. 刘卓, 耿长昊, 译. 北京: 中国青年出版社, 2019.
- [8] Lawson, A.E. (1989) A Theory of Instruction: Using the Learning Cycle to Teach Science Concepts and Thinking Skills. *Cognitive Development*, **1**, 136.
- [9] Turan, S. and Matteson, S.M. (2021) Middle School Mathematics Classrooms Practice Based on 5E Instructional Model. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, **9**, 22-39. <https://doi.org/10.46328/ijemst.1041>
- [10] Joswick, C. and Hulings, M. (2024) A Systematic Review of BSCS 5E Instructional Model Evidence. *International Journal of Science and Mathematics Education*, **22**, 167-188. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10357-y>
- [11] Siregar, F.M.H., Zainul, R., Oktavia, B. and Lubis, A.P. (2023) Module Development on Basic Laws of Chemistry Based on the 5E Instructional Model to Improve Science Process Skills in Senior High School. *Jurnal Penelitian Pendidikan IPA*, **9**, 5420-5428. <https://doi.org/10.29303/jppipa.v9i7.4343>
- [12] 胡久华, 高冲. 5E 教学模式在我国的教学实践及其国外研究进展评析[J]. 化学教育, 2017, 38(1): 5-9.
- [13] 宋媛媛. 教学评一体化视域下 5E 教学模式在初中英语阅读教学设计中的应用[J]. 未来教育探索, 2025, 1(5): 41-46.
- [14] 叶圣陶, 刘未鸣, 韩淑芳. 先生归来兮: 叶圣陶: 教是为了不需要教[M]. 北京: 中国文史出版社, 2020.
- [15] 乔治·波利亚. 数学与猜想[M]. 北京: 科学出版社, 2011.