

培育直观想象素养的高中方程教学

——基于GeoGebra的数形结合实践

滕霜¹, 陈月², 桑海风^{1*}

¹北华大学数学与统计学院, 吉林 吉林

²吉林市第五十五中学, 吉林 吉林

收稿日期: 2026年4月17日; 录用日期: 2026年7月14日; 发布日期: 2026年7月23日

摘要

数形结合思想是数学方法论的重要组成部分, 在高中方程教学中具有突出的认知价值。本文立足当前课堂教学实际, 系统梳理数形结合思想的发展脉络与教育意义, 分析学生在方程学习中存在的思维障碍及其成因, 阐释几何直观与代数运算在方程问题中的相互联系与转化规律, 并构建“直观感知-量化分析-融合创新”的三阶递进教学框架。同时, 从教材开发、课堂实施、技术融合、评价改革等方面提出可操作的教学建议, 为培养学生数学抽象与直观想象核心素养提供实践参考, 推动高中方程教学从技能训练向满足未来社会发展需求的人才培养转变。

关键词

数形结合, 几何直观, 代数运算, 核心素养

High School Equation Teaching for Cultivating Intuitive Imagination Literacy

—A Practice Based on GeoGebra for Integrating Numerical and Geometric Concepts

Shuang Teng¹, Yue Chen², Haifeng Sang^{1*}

¹School of Mathematics and Statistics, Beihua University, Jilin Jilin

²Jilin No.55 Middle School, Jilin Jilin

Received: April 17, 2026; accepted: July 14, 2026; published: July 23, 2026

*通讯作者。

文章引用: 滕霜, 陈月, 桑海风. 培育直观想象素养的高中方程教学[J]. 创新教育研究, 2026, 14(7): 437-443.
DOI: 10.12677/ces.2026.147534

Abstract

Combining numbers and graphs is an important mathematical method that helps students understand equations better in senior high school. Based on real classroom teaching, this paper studies the background and educational value of the method. It discusses the difficulties students meet in learning equations and how to connect geometric intuition with algebraic calculation. We also build a three-level teaching model: intuitive perception, quantitative analysis, and creative integration. Moreover, we put forward practical suggestions on teaching materials, classroom teaching, technology use and teaching evaluation to improve students' core literacy in mathematical abstraction and intuitive imagination. This research is expected to change equation teaching from mechanical practice to thinking development.

Keywords

Integrating Numerical and Geometric, Geometric Intuition, Algebraic Operations, Core Competencies

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

方程知识构成了高中代数体系的骨架，其应用横跨函数、不等式、解析几何、数列等诸多板块，是连接初等数学与高等数学的重要桥梁。随着《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》的深入实施，数学教育愈发强调学科核心素养的培育，而数形结合正是联通形象思维与抽象思维、促进直观想象与数学运算素养协同发展的重要媒介[1]。课程标准明确指出，数学教学应注重数学知识与实际生活的联系，注重数学思维方法的渗透，注重学生数学学科核心素养的发展。在这一背景下，传统的方程教学模式——侧重于代数变形技巧的算法练习——已难以满足未来社会发展需求的人才培养的需求。如何在方程教学中有效融入数形结合思想，帮助学生建立代数与几何的双重表征，成为当前数学教育改革的重要议题。通过对多所高中课堂的观察与师生访谈发现，学生解决方程问题时普遍依赖符号运算，习惯通过因式分解、公式套用、代数变形等方式求解。这种单一思路在处理一次方程、二次方程等常规问题时较为有效，但面对超越方程、含参数讨论、根的分布等复杂问题时，容易出现思路受阻、推理不清的情况。主要表现为：面对无法直接求解的方程，学生缺乏转化意识，长期停留在代数尝试中；部分学生虽能想到借助函数图像，但作图不规范、关键信息缺失，难以发挥图像的辅助作用；还有学生将图像与代数运算割裂，画图仅为形式化步骤，未能真正服务于解题分析。这些问题反映出数形结合思想在方程教学中落实不到位，亟需构建系统化的改进方案。

2. 核心概念阐释与学理依据

2.1. 数形结合思想的历史溯源与内涵界定

数形结合思想历史悠久，在中国传统数学中已有充分体现。刘徽割圆术以几何直观逼近圆周率，赵爽弦图以面积关系证明勾股定理，均体现了数与形的统一。近代笛卡尔创立解析几何，通过坐标系实现几何问题代数化，为数形结合奠定了系统的方法论基础。从现代数学教育角度看，数形结合包含两个相辅相成的方向：一是以几何直观辅助代数理解，将抽象数量关系转化为直观图形，借助图形的整体性、

对称性与变化趋势把握问题本质,降低理解难度,寻找解题路径;在方程教学中,主要体现为将解方程转化为分析函数图像交点、零点位置或曲线位置关系。二是以代数运算精确刻画几何特征,用符号与运算对图形性质进行严谨表述与定量分析,保证数学结论的准确性。高中方程教学更侧重前者,即通过构建函数、绘制图像,以几何直观引导代数分析,再以运算验证直观判断,实现两种思维方式的互补融合。

2.2. 支撑理论的多维分析

认知负荷理论[2]:个体工作记忆容量有限,教学设计应减少不必要的外在认知负荷,优化有效认知负荷,使学生集中精力理解学习内容。在方程教学中,恰当的图形表征可将复杂代数关系转化为直观特征,减轻记忆负担,帮助学生聚焦关系理解与方法选择。

多元表征理论[3]:数学概念的深度理解依赖语言、数值、符号、图形、情境等多种表征方式的灵活转换与整合。方程的解既可以用符号表示,也可以对应函数图像上的点,还可以解释实际问题的结果。数形结合正是实现代数表征与几何表征相互转化的重要途径。

APOS 理论[4]:Dubinsky 提出的 APOS 理论描述了数学概念建构的四个层次:操作(Action)、过程(Process)、对象(Object)、图式(Scheme)。在方程学习中,学生首先进行具体的代数运算操作,随后将操作序列内化为心理过程,进而将方程的解视为可以整体把握的对象,最终形成包含多种解法的认知图式。几何直观在对象化阶段发挥关键作用,帮助学生将抽象的解具体化为图像上的可见点。

双重编码理论[5]:信息可通过言语符号与视觉表象两种方式编码存储,双重编码的信息更易于记忆与提取。在数形结合思想指导下学习方程,可同时激活符号加工与视觉加工,形成更牢固的认知联结,促进理解与保持。

3. 当前教学困境的系统诊断

3.1. 教学现状分析

当前方程教学存在过度依赖符号操作、思维固化的问题。课堂大量时间用于因式分解、求根公式、判别式等技巧训练,对方程与函数、图像的联系重视不足。教材虽涉及方程的图像解法,但多作为拓展内容简单呈现,考试中相关题目占比不高,导致师生更倾向于代数解法。学生常将方程视为孤立的符号式子,缺少从函数视角整体看待方程的意识。同时,学生普遍存在表征整合困难、数形割裂的问题。即便教师提示作图,很多学生仍“图算分离”:画完图像后继续用纯代数方法解题,图像沦为形式;或能画出图像,但无法将交点位置、区间关系、斜率特征等几何信息转化为代数条件,直观与运算之间缺少有效衔接。此外,信息技术的支持作用未充分发挥。GeoGebra、几何画板等动态工具在方程探究中的优势没有得到体现,受课时、技术能力、设备条件限制,课堂仍以静态纸笔作图为主,难以展示参数连续变化时图像的动态演变,学生对含参方程解的变化规律缺乏直观感受,影响深层理解。

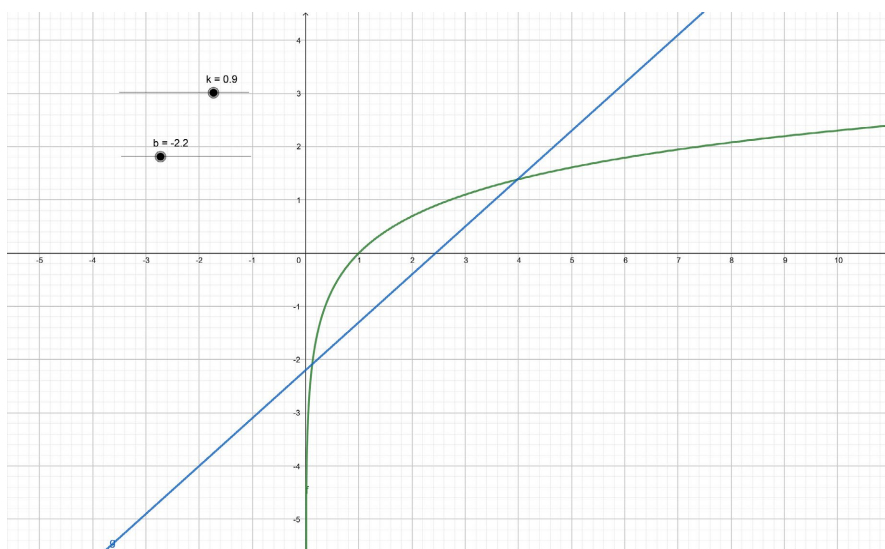
3.2. 典型迷思概念的个案分析

任务情境:判定自然对数函数与一次函数的交点个数,即分析对数曲线与直线的位置关系(如图 1)。

常见迷思类型:第一类是过度依赖代数运算:学生一直用代数变形尝试解题,想把方程化成可解的多项式形式,发现求不出精确解后就不知所措,没有及时改用图像分析。第二类是图像绘制与误读错误:学生虽然想到画图,但草图不规范,比如把对数曲线画成直线或抛物线,没有标出关键位置,仅凭感觉判断交点个数,容易漏掉隐藏的交点。第三类是数形转化不规范:学生能画出正确图像并看出交点数量,但不会把图像观察到的结果写成严谨的数学表达,常常忽略定义域限制,或错误描述交点所在区间。

成因分析:上述迷思的根源在于数形结合意识的薄弱与转化能力的缺失。学生未能建立方程的解即

函数图像交点的稳定联系, 缺乏规范的可视化分析流程训练, 也缺少将几何语言转译为代数语言的充分练习。借助 GeoGebra 动态图像可直观呈现交点变化规律, 有效纠正学生图像认知偏差, 强化数形转化意识。



注: 图中展示了当参数 $k = 0.9$ 、 $b = -0.9$ 时, 自然对数函数 $y = \ln x$ 与一次函数 $y = kx + b$ 的图像位置关系, 可直观观察二者交点数量与位置特征, 为分析含参对数方程的解的情况提供几何直观支撑。

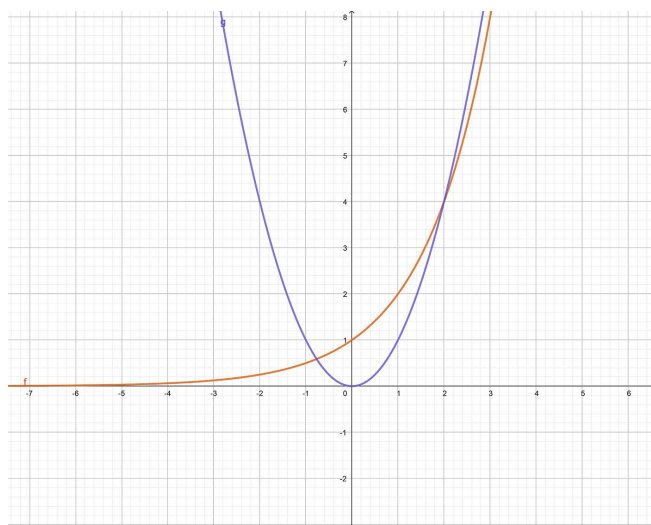
Figure 1. Dynamic analysis of intersection points between $y = \ln x$ and the moving line $y = kx + b$ based on GeoGebra

图 1. 基于 GeoGebra 的 $y = \ln x$ 与动直线 $y = kx + b$ 交点动态分析

4. 教学策略的多维展开与课例分析

4.1. 超越方程的可视化求解路径

针对指数函数、对数函数、三角函数、幂函数等的复杂方程, 教学应引导学生构建对应的函数模型。



注: 本图为指数函数与幂函数构成的超越方程在 GeoGebra 软件中的可视化呈现, 清晰展示了两个函数图像的三处交点, 直观反映出对应超越方程存在三个实数解, 为超越方程解的个数判定提供直接的几何依据。

Figure 2. Visual analysis of equation $2^x = x^2$ solutions based on GeoGebra

图 2. 基于 GeoGebra 的方程 $2^x = x^2$ 解的可视化分析

课例：探究指数函数与幂函数的交点分布(如图 2)。

教学目标：理解方程解的个数与函数图像交点的对应关系，掌握利用图像分析超越方程解的一般方法，培养转化意识与满足未来社会发展需求的人才培养。

实施流程(如表 1)：

Table 1. Flowchart of Inquiry-Based teaching combining numerical and geometric methods
表 1. 数形结合探究式教学流程表

教学环节	学生活动	教师支持与关键提示
情境创设与认知冲突	尝试用代数方法求解，发现传统工具失效，产生认知失衡	当方程无法配方、无法因式分解时，我们还能怎么办？
数学建模与转化	创设两个函数，分别对应方程两边，建立交点与方程解的对应关系	方程的解对应着什么几何意义？ 能否转化为图像交点问题？
图像刻画与分析	在同一坐标系中呈现两条曲线的走势，标定关键点，分析趋势特征	定义域是什么？ 特殊点的坐标是多少？ 趋势是递增还是递减？ 增长速度如何比较？
综合判断与验证	确认三处交点，对应三个实数解，并用数值估算验证	超越方程求解的图像法步骤是什么？ 需要注意哪些易错点？

本探究式教学流程的设计，将满足未来社会发展需求的人才培养从隐性知识转化为显性的操作路径，借助 GeoGebra 动态可视化功能突破传统纸笔作图局限，使学生直观观察函数增长速率差异与交点分布规律，有助于学生在可视化探究中逐步内化数学思维方法[6]。

4.2. 根的分布问题的几何约束策略

对于一元二次方程根的区位限制问题——如两根都大于某数、一根在某区间内另一根在区间外、两根分居某数两侧等——传统教学往往要求学生记忆复杂的结论公式，导致机械套用、易混易错。数形结合视角下，应引导学生利用抛物线的几何特征建立不等式组，实现从结论记忆到原理解释的转变。操作框架与对应关系如下表所示(如表 2)：

Table 2. Correspondence between geometric characteristics and algebraic conditions
表 2. 几何特征与代数条件对应关系表

图像要素	几何意义	代数表达
开口方向	抛物线的朝向	二次项系数的正负符号
与横轴相交情况	实根的存在性	判别式的非负性
对称轴位置	极值点的水平位置	顶点横坐标的区间归属
区间边界函数值	曲线相对于横轴的位置	端点处函数值的正负

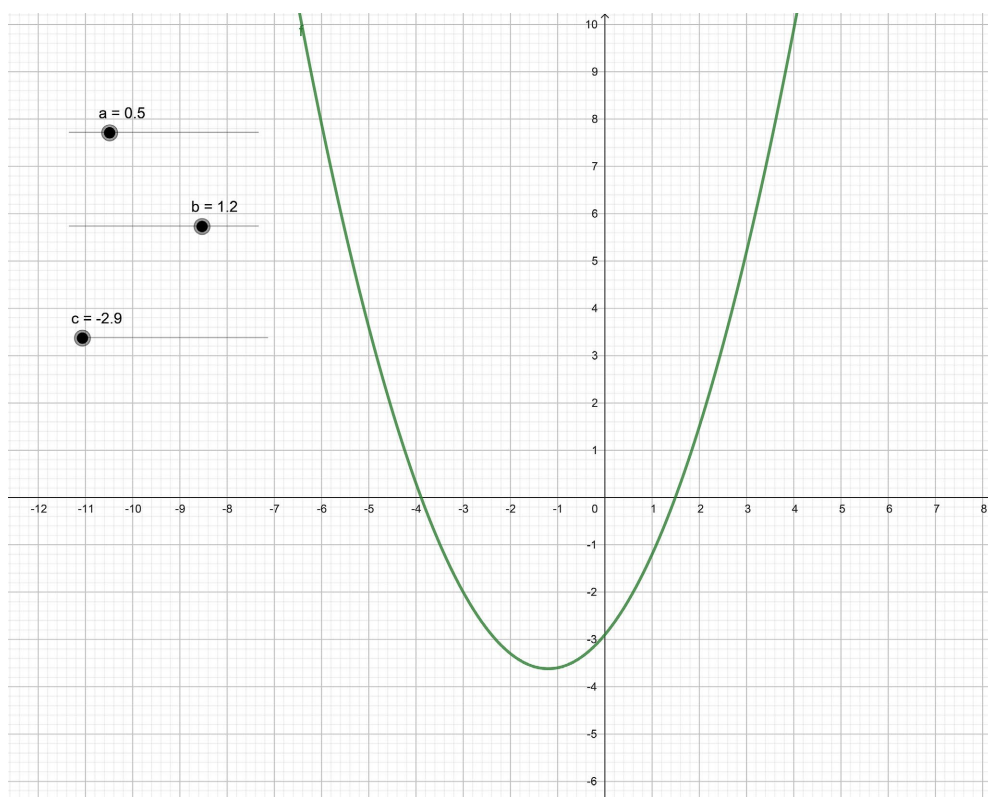
课例：含参二次方程两根均大于定值的条件探索(如图 3)。

问题情境：给定含参数的二次方程，探索其两根均大于某一特定数值时参数的取值范围。

在解决含参数一元二次方程根的分布问题时，学生往往直接套用结论，容易遗漏约束条件、混淆不等关系。本节以“两根都大于某一定值”为例，依托数形结合思路，引导学生先借助图像建立几何直观，再转化为严谨的代数不等式组，从“对公式的机械记忆而缺乏概念理解”转向“理解原理”，逐步掌握根

的分布问题的分析方法。

核心教学强调：许多学生急于代入公式计算，忽视了图像的整体分析，导致条件遗漏或多余。教学中应杜绝公式记忆的僵化应用，强调每一个代数条件都对应着明确的几何意义，借助 GeoGebra 动态可视化功能强化数形对应认知，实现真正的数形融合。



注：GeoGebra 动态演示一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 根的分布与参数关系图。通过拖动系数 a , b , c 滑动条，可观察抛物线形状变化，直观理解两个不等实根，两个相等实根，无实根三种情况。通过分析对应一元二次方程根的分布情况，实现几何特征向代数条件的转化。

Figure 3. Dynamic analysis of root distribution for quadratic equations based on GeoGebra

图 3. 基于 GeoGebra 的一元二次方程根的分布动态分析

4.3. 含参方程的动态分离与临界分析策略

含参数方程是高中数学的重点与难点，参数的变化导致方程解的情况发生复杂变化。参变分离技术将方程整理为函数等于参数的形态，其中一侧为确定的曲线，另一侧为可平行移动的直线，通过观察位置关系的变化规律确定参数范围，将静态问题动态化、复杂问题直观化。

5. 教学实施的系统建议

教学中应立足教材优化数形结合专题内容，依托 GeoGebra 强化动态可视化探究；课堂以认知冲突引导学生规范作图、实现数与形的有效转化；同时优化评价方式，注重数形转化过程与思维能力考查，推动方程教学向素养培育转型。

6. 结语与展望

方程教学长期以来偏重计算技巧的训练，学生习惯了配方、因式分解、套用求根公式，遇到复杂问

题便束手无策。实际上,很多方程难题换个角度看就会明朗许多——画出图像,观察曲线走势和交点位置,往往能找到突破口。这种“画图思考”的习惯,正是数形结合思想的核心所在。当前课堂的问题在于,学生要么想不到画图,要么画完图还是回到老办法硬算,图像成了摆设。改变这一状况,需要教师有意设计一些代数方法难以奏效的问题,让学生体会图像分析的价值;同时也要引导学生规范作图,真正把观察到的几何信息转化为解题条件。动态软件的使用让课堂有了更多可能,学生可以拖动参数看图像变化,这种体验是静态作图无法提供的。当然,工具只是辅助,关键还是学生思维方式的转变——从机械计算走向灵活分析,从单一视角走向多重表征。

后续研究可以在几个方面继续深入。一是把数形结合的做法推广到其他内容,比如立体几何中的空间关系、概率中的分布规律、导数中的极值问题,看看这种思想方法在不同领域如何落地。二是更关注学生的实际困难,同样的教学方法对不同学生效果差别很大,有的学生天生空间想象好,有的则需要更多帮助,如何照顾到这些差异还需要摸索。三是考试评价要跟上,需要研究怎么在试题中体现对学生直观分析能力的考查。四是技术怎么用得更好,现在多用软件做演示,将来能不能让学生自己动手搭建模型、验证想法,甚至根据每个学生的操作情况给出针对性建议,这些都有待尝试。

基金项目

吉林省高教科研课题(JGJX25D0391),北华大学研究生教育教学改革研究课题(JG[2024]001),吉林省基础教育教学研究课题(从“沃土”到“脱颖”:以数学建模为核心载体的中小学数学思维贯通培育实践研究)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[M]. 北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 王小明. 多媒体学习与多媒体设计:认知观点[J]. 全球教育展望,2008(2): 42-46.
- [3] 唐剑岚. 国外关于数学学习中多元外在表征的研究述评[J]. 数学教育学报,2008(1): 30-34.
- [4] 乔连全. APOS:一种建构主义的数学学习理论[J]. 全球教育展望,2001(3): 16-18.
- [5] 刘儒德,赵妍,柴松针,徐娟. 多媒体学习的认知机制[J]. 北京师范大学学报(社会科学版),2007(5): 22-27.
- [6] 郑毓信. “数学与思维”之深思[J]. 数学教育学报,2015,24(1): 1-5.