

面向数学师范生的《离散数学》课程设计与 教学实践

邹梦瑶, 杨超*

广东外语外贸大学数学与统计学院, 广东 广州

收稿日期: 2026年4月20日; 录用日期: 2026年6月4日; 发布日期: 2026年6月16日

摘要

文章分析了高校数学师范专业开设《离散数学》课程的必要性, 并结合外语类院校的特点制定了32课时的教学内容与大纲。在教学实践中, 课程内容覆盖计算理论的三大计算模型与时间复杂性, 并通过一个具有几何直观的多联骨牌的边界字符串的例子, 串联整个课程内容, 达到融会贯通的效果。

关键词

《离散数学》, 课程设计, 计算理论, 多联骨牌边界字符串

Course Design and Teaching Practice of the *Discrete Mathematics* Course for Mathematics Education Majors

Mengyao Zou, Chao Yang*

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: April 20, 2026; accepted: June 4, 2026; published: June 16, 2026

Abstract

In this paper, we analyze the necessity of offering the *Discrete Mathematics* course for mathematics education majors in universities, and design a teaching content and syllabus of 32 class hours for a university with foreign language characteristics. In teaching practice, the course covers the three major computational models of computation theory and time complexity. Moreover, by using a geometrically

*通讯作者。

intuitive example—the boundary string of polyominoes—to connect the entire course content, achieving an integrated and comprehensive understanding.

Keywords

Discrete Mathematics, Course Design, Theory of Computation, Boundary Strings of Polyominoes

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《离散数学》是高校多个本科专业的核心课程。蒋运承等《中国高校离散数学课程调研报告》[1]显示,《离散数学》课程在高校中的开设有以下特点。一是在计算机、信息、自动化、人工智能、电子电气、网络安全、数学和物理等方向的相关专业中广泛开设。二是基本是面向大一或大二的必修课,总学时以 48 学时或 64 学时居多。三是授课内容覆盖数理逻辑、集合论、代数结构、图论、数论、组合数学、计算理论等七个模块中的三到四个。这体现了《离散数学》是一门以数学为理论基础,在计算机科学、信息技术、人工智能与自动化等多个领域有重要应用的课程。同时,由于各专业的需求不同,课程的开设也呈现多样化,涵盖的内容模块也五花八门,不尽相同。本文作者所在高校广东外语外贸大学数学与统计学院从 2024 年起数学与应用数学专业增设师范方向。依照培养方案,数学师范 24 级学生在大二下学期开设《离散数学》课程。本文记录了我们在《离散数学》课程教学过程中的思考与实践。

本文结构安排如下。第 2 节论述《离散数学》课程开设的必要性。第 3 节结合学校与学院的特点,分析《离散数学》课程的教材与内容模块的选择。第 4 节详细阐述了教学实践中关于多联骨牌边界字符串的一个案例。第 5 节是对今后课程教学的展望。

2. 开设《离散数学》课程的必要性

广东外语外贸大学数学与应用数学专业创办于 2006 年,一直以数学与金融精算的结合为特色,《离散数学》虽列在专业培养方案中,但由于总学分的限制,实际开课次数较少。自 2024 年增设师范方向后,有必要面向数学师范方向的本科生开设《离散数学》课程,主要有以下几方面的考虑。

2018 年版《普通高等学校本科专业类教学质量国家标准》[2]把《离散数学》列为数学与应用数学专业的专业主干课。国家标准把数学与应用数学课程体系中的核心课程分为两类,即专业基础课和专业主干课。专业基础课包括《数学分析》《高等代数》等必须开设。专业主干课要求在 3 组 15 门课程中开设至少 6 门,而《离散数学》是 3 组课程中的其中一门。开设《离散数学》课程是专业建设达到国家标准的有力的支撑。

为实现教育强国[3],在数学师范生的培养中,全面提升学生的数学素养是关键的一环。现代数学所涵盖的领域非常丰富,从 4 年一届的国际数学家大会的分组类别中,可以比较全面地体现国际数学界对数学内涵的共识。我国最早参加国际数学家大会并留下比较详细的记录的学者是李达。他于 1932 年参加了在瑞士苏黎世举办的国际数学家大会,并写了会议记录发表在《科学世界》和《世界旬刊》[4][5]。根据李达的记录,1932 年的国际数学家大会按内容分为代数与数论、分析、几何、概率统计与精算、数学技术与天文、力学与数学物理、数学哲学与数学史、数学教育等共 8 个组。而在 2026 年国际数学家大会,则分为 20 个组,分别是:逻辑、代数、数论、代数几何与复几何、几何、拓扑、李理论及其推广、分析、

动力系统、偏微分方程、数学物理、概率论、组合、计算机科学中的数学、数值分析和科学计算、控制论与优化、统计(含机器学习、图像与信号处理)、随机和微分模型、数学教育和数学普及、数学史[6]。对比1932年和2026年两届时隔近百年的国际数学家大会的分组,一个明显的变化是电子计算机自20世纪下半叶被发明以来,与计算机科学密切相关的数学理论分支从1932年的尚不存在发展到2026年的占据了20个组别中的组合、计算机科学中的数学、数值分析和科学计算等3个组。这些分支都是《离散数学》课程所涵盖的主要内容。为培养数学师范生全面的现代数学的基本认识,开设《离散数学》课程必不可少。

进入21世纪以来,国家高度重视高科技对国民经济和社会发展的战略引领作用。“十五五”规划[7]强调要加强原创性引领性科技攻关,瞄准人工智能、量子信息等前沿领域,实施一批具有前瞻性、战略性的国家重大科技项目。人工智能、量子信息这两大前沿领域的数学理论基础之一都是计算理论。开设《离散数学》课程,是从教育层面为国家的科技发展战略培养储备人才的必要举措。

综上所述,从遵循专业国家标准、提升学生数学素养和支撑国家科技战略等三个方面看,《离散数学》课程是面向数学师范生的人才培养计划中不可或缺的一个重要组成部分。

3. 内容模块与教材的选择

由于培养计划总学分的限制,我校数学与应用数学(师范)专业的《离散数学》课程设置为2个学分,总学时32学时,少于国内大部分高校采用的48学时或64学时。《离散数学》所涵盖的七大模块中的数论、代数结构和图论等三部分内容,在我校数学与应用数学(师范)专业的培养方案中,都已经分别单独开设课程《初等数论》《抽象代数》和《图论》;集合论中核心内容也在《实变函数》课程中被覆盖。我校具有外语学科与多学科交叉融合、协同发展的学科格局,而计算语言学中经典的乔姆斯基的四个语言层级和《离散数学》中计算理论这一模块密切相关,与学校的发展特色高度一致。综合以上因素,《离散数学》课程在有限的学时内聚焦计算理论这单一模块。

确定内容模块后,我们参考林亚南教授对于高校教材使用的一般性建议[8],选定了麻省理工学院西普塞教授编著的《计算理论导引(第3版)》的中文翻译版作为教材[9]。此教材国内也出版了英文影印版[10],可供有余力的同学对照学习。西普塞的教材具有内容体系完备,关键定理的证明深入浅出,利用较多的篇幅和例子来解释证明的直观理解,同时配备丰富的习题,是公认的计算理论的经典教材。

即便我们在《离散数学》课程中只讲授计算理论一个模块,32个学时也是无法覆盖西普塞教材中的全部内容。32个总学时除去2个学时的总结复习或机动学时,新授课的内容可分为15讲,每讲2学时。参考汪芳庭教授对数学课程体系的思考[11],我们对课程的具体内容安排如表1所示。

Table 1. Course content outline

表 1. 课程大纲

讲数	内容
1	绪论、字符串和形式语言的基本定义
2	有穷自动机的定义、正则语言与正则运算
3	非确定型有穷自动机的定义
4	确定型与非确定型有穷自动机的等价、正则语言对正则运算的封闭性
5	正则表达式与有穷自动机的等价、正则语言的泵引理
6	上下文无关文法的定义
7	下推自动机的定义、下推自动机与上下文无关文法的等价

续表

8	上下文无关语言的泵引理、上下文有关语言
9	图灵机的定义、递归可枚举语言、图灵可判定语言
10	图灵机的变形、王浩机, 线性界限自动机与黑田定理
11	计算的本质、图灵丘奇论题、希尔伯特第十问题的历史
12	可判定、不可判定与不可识别的问题
13	不可判定性、问题的归约、王浩铺砖问题
14	时间复杂性、P 与 NP
15	NP 完全性、SAT 问题与库克定理

表 1 的教学内容主要涵盖了西普塞的教材《计算理论导引(第 3 版)》的第 1 章至第 5 章以及第 7 章, 包括有穷自动机、下推自动机、图灵机和计算复杂性四部分内容。我们对教材内容的处理方式是有减也有增。其中, 受到课时限制, 《计算理论导引(第 3 版)》教材第 2 章的上下文无关文法的歧义性与乔姆斯基范式、确定型上下文无关语言等部分内容略去不讲。另一方面, 针对数学师范专业的特点和广东外语外贸大学的特色, 精选穿插了若干教材外的内容。如补充介绍线性界限自动机的黑田定理, 使得课程内容较为完整和系统地讲授了乔姆斯基的语言四层级。另外, 增加一个多联骨牌边界字符串的例子, 贯穿有穷自动机、下推自动机、图灵机三大计算模型, 并联系计算复杂性, 强化加深学生对计算理论在具体几何问题中应用的理解。下一节将详细介绍多联骨牌边界字符串的例子在课堂上的具体实践方案。

4. 一个案例——多联骨牌的边界字符串

教材《计算理论导引(第 3 版)》中的例子以在计算机程序设计中直接应用的为主, 如经典的括号匹配问题、简单的编程语言语法等。面向数学专业的学生, 我们增加数学领域的实例。在整个课程中, 第 1 讲、第 5 讲、第 8 讲、第 10 讲和第 14 讲都可以结合多联骨牌边界字符串这一具有几何直观的例子, 帮助学生理解相应的概念、定理和思想方法。

4.1. 多联骨牌的边界字符串

多联骨牌(Polyomino)是指由若干等大小的单位正方形通过边对边连接而成的单连通几何图形。若用字母表 $\Sigma = \{u, d, l, r\}$ 中的符号 u, d, l, r 分别表示向上、向下、向左或向右移动一个单位, 则从多联骨牌的某个顶点逆时针绕一圈, 依次记录每一步的方向, 可自然得到一个边界字符串。如图 1 的多联骨牌的一个边界字符串为 $rrurullld$ 。所有多联骨牌的边界字符串的全体可构成一个语言。在第 1 讲绪言介绍形式语言的基本概念时, 即可举此例。通过此例和其它例子, 学生可认识到形式语言是一个抽象的数学概念, 可用于描述或表达几何、数论等数学各领域的问题。



Figure 1. A polyomino
图 1. 一个多联骨牌

4.2. 多联骨牌的边界字符串不是正则语言

运用正则语言的泵引理结合反证法来证明一个语言不是正则语言是一种典型的数学思想方法。在第 5 讲中, 用这一方法可证多联骨牌的边界字符串全体构成的语言 L 不是正则语言。反设 L 是正则语言, 则存在泵长度 p , 使得任一长度大于或等于 p 的字符串 $s \in L$, 都有 s 可分为三段 $s = xyz$, 满足 $|xy| \leq p$, $|y| > 0$, 且对任意自然数 i , 都有 $xy^i z \in L$ 。若取 $s = r^p u^p d^p$, 则分段后字符串 y 必然全由符号 r 组成, 从而 $xyyz$ 中 r 的数目比 1 多, 不可能作为边界字符串, 矛盾。

4.3. 多联骨牌的边界字符串不是上下文无关语言

上下文无关语言也有泵引理, 与正则语言的泵引理在细节上有不同之处, 运用时要注意区别。在第 8 讲中, 用泵引理证明多联骨牌的边界字符串全体构成的语言 L 也不是上下文无关语言。反设 L 是上下文无关语言, 则存在泵长度 p , 使得任一长度大于或等于 p 的字符串 $s \in L$, 都有 s 可分为五段 $s = uvxyz$, 满足 $|vxy| \leq p$, $|vy| > 0$, 且对任意自然数 i , 都有 $uv^i xy^i z \in L$ 。若取 $s = r^p u^p d^p$, 则分段后字符串 v 和 y 最多只含 s 中相邻的两种不同的符号, 不妨设是 r 和 u 。于是 $uvvxyyz$ 中 r 的数目比 1 多, 不可能作为边界字符串, 矛盾。课程中对有显著几何直观特点的多联骨牌的边界字符串先后证明其既不是正则语言, 也不是上下文无关语言, 引起学生对内容的兴趣和好奇。学生自然会思索, 多联骨牌的边界字符串究竟在乔姆斯基的语言层级中位于哪一层? 由此激发学生在整个课程中保持较高的投入度。

4.4. 多联骨牌的边界字符串是上下文有关语言

讲授完图灵机的基本概念和原理以及图灵机的限制变形线性界限自动机后, 在第 10 讲可以给出多联骨牌的边界字符串全体构成的语言 L 是上下文有关语言的一个高层次描述。由于上下文有关文法与线性界限自动机等价, 故只需给出一个判定字符串是否为某一多联骨牌的边界的一个线性空间算法。算法的核心思路是根据边界字符串依次计算出边界经过的整点。若经过的整点没有重复, 并且回到起点, 则围成一个单连通的多联骨牌; 否则不是多联骨牌的边界字符串。具体地, 可设起点为 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 。若第 i 个整点记作 (x_i, y_i) 且边界字符串的第 i 个符号为 u, d, l 或 r , 则经过第 $i+1$ 个整点分别为 $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i, y_i + 1)$, $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i, y_i - 1)$, $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i - 1, y_i)$ 和 $(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + 1, y_i)$ 。这一算法需要记录中间经过的所有整点, 用于比较判断是否有重复。而整点的个数和字符串的长度相等, 因此需要的空间和输入字符串是线性关系, 算法可由线性界限自动机实现。

4.5. 课外探索问题

讲授完第 11 讲的图灵丘奇论题后, 研究对象的重点从形式语言转移到更一般的判定问题。而多联骨牌的边界字符串也能延伸出许多有趣的问题, 可在课堂中提出, 留给学生在课外探索。在第 14 讲给出了 P 问题的概念后, 向学生提出如下判断边界字符串的围绕方向的问题。上一小节中提出的判断字符串是否为某多联骨牌的边界的线性空间算法并不能判断边界字符串是顺时针还是逆时针的。于是, 是否有算法判断边界方向是逆时针还是顺时针? 若有, 算法是多项式时间算法吗(即问题是否属于 P 问题类)? 学生通过思考和文献搜索, 发现可由多联骨牌的顶点通过鞋带公式(Shoelace Formula)计算其围成的面积[12], 若面积为正, 顶点顺序为逆时针; 若面积为负, 顶点顺序为顺时针。并且鞋带公式可由前序课程《数学分析》中关于积分的格林定理推导得出。至此, 多联骨牌的边界字符串这一例子不仅把本课程的全部关键知识点串联起来, 而且还与数学与应用数学(师范)专业整体培养方案中的其它课程相互照应, 形成系统化的培养体系。

5. 总结与展望

本文介绍作为外语类院校中的数学与应用数学(师范)专业的《离散数学》课程的设计与实践。在内容安排上,围绕计算的本质,从简单到复杂讲授了有穷自动机、下推自动机和图灵机三个计算的模型,并延伸初步阐释计算时间复杂性中的 P 和 NP 等经典理论,同时与之平行地系统讲授了人工智能和自然语言处理的经典成果之一:乔姆斯基的形式语言四层级理论。随着大语言模型的应用日益广泛,数学师范生的培养计划也要与前沿科技发展相适应。通过《离散数学》课程的开设,让学生掌握当代计算理论的基本原理,拓宽学生的数学视野,提升学生的数学素养,为师范生毕业后在基础数学教育中与大语言模型等新一代人工智能的融合做好知识储备。我们的《离散数学》课程方案与实践,仅用 32 课时便完整讲授了计算理论的核心概念与思想,其编排可供高校数学类专业直接使用或改造后采用。在今后的教学迭代中,我们将继续优化课程设计,在实践中继续探索《离散数学》课程如何在数学师范生的培养体系中发挥更大的作用。

基金项目

校级质量工程项目“数学与应用数学专项人才培养计划”(2024XJZLGC026)。

参考文献

- [1] 蒋运承, 张家琳, 吴志林, 曹永知. 中国高校离散数学课程调研报告[C]//大湾区大学离散数学教学研讨会论文集. 2025. https://mp.weixin.qq.com/s/95zgPr4_Ipmhi5a2l2vpAA
- [2] 教育部高等学校教学指导委员会. 普通高等学校本科专业类教学质量国家标准[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [3] 教育强国建设规划纲要(2024—2035 年) [EB/OL]. 2025-01-20. http://www.moe.gov.cn/jyb_xxgk/moe_1777/moe_1778/202501/t20250119_1176193.html, 2026-04-12.
- [4] 李达. 世界数学家会议记录[J]. 科学世界(南京), 1932, 1(1): 69-73.
- [5] 李达. 通讯: 世界数学家会议记录[J]. 世界旬刊, 1932(21): 17-22.
- [6] Tao, T., Nakajima, H., Anantharaman, N., Buffa, A., *et al.* (2023) 2023 Report of the ICM Structure Committee. https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Publications/CircularLetters/2023/IMU%20AO%20CL%208_2023_StructureCommitteeReport2023.pdf
- [7] 中华人民共和国国务院. 中华人民共和国国民经济和社会发展第十五个五年规划纲要[EB/OL]. 2026-03-13. https://www.gov.cn/yaowen/liebiao/202603/content_7062633.htm, 2026-03-28.
- [8] 林亚南. 讲授课程的几点体会[J]. 大学数学, 2025, 41(5): 1-7.
- [9] 迈克尔·西普塞. 计算理论导引[M]. 第 3 版. 段磊, 唐常杰, 译. 北京: 机械工业出版社, 2015.
- [10] Sipser, M. (2018) Introduction to the Theory of Computation. 3rd Edition, China Machine Press.
- [11] 汪芳庭. 数学系课程体系改革的一项尝试——谈数学基础课程设置的目的是和意义[J]. 教育与现代化, 1998, 46(1): 46-49.
- [12] 黄绍龙, 芮璋现. 鞋带算法及程序实现[J]. 电脑知识与技术, 2020, 16(11): 243-244.