

基于APOS理论的数学史融入教学设计案例

——以“椭圆及其标准方程”为例

徐嘉怡, 吴小涛*

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2026年4月28日; 录用日期: 2026年7月2日; 发布日期: 2026年7月13日

摘要

椭圆的发现与发展是人类探索几何规律的重要历程, 每一次理论突破都是对原有认知的革新与完善。经过漫长历史的积淀, 椭圆的相关知识形成了系统且稳定的理论体系。本文以“椭圆及其标准方程”为研究对象进行教学设计, 立足学生已有的几何认知经验, 深入分析学情与教学内容, 设计了一系列层层递进的教学活动。教学过程中充分凸显学生的主体地位, 注重逻辑思维的引导与训练, 让学生亲历椭圆概念的发生、发展全过程, 挖掘几何知识的本质内涵, 自主构建椭圆相关知识的网络体系。同时, 让学生在知识传递中感受数学文化的浸润, 领略数学史的教育价值与文化内涵, 构建一套完整的示范案例, 为今后数学史融入几何概念课堂教学提供参考样例与实施方案。

关键词

数学史与数学教育, APOS理论, 椭圆及其标准方程, 教学设计

A Case Study of Teaching Design for Integrating the History of Mathematics Based on APOS Theory

—Taking the “Ellipse and Its Standard Equation” as an Example

Jiayi Xu, Xiaotao Wu*

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: April 28, 2026; accepted: July 2, 2026; published: July 13, 2026

*通讯作者。

文章引用: 徐嘉怡, 吴小涛. 基于 APOS 理论的数学史融入教学设计案例[J]. 创新教育研究, 2026, 14(7): 10-20.
DOI: 10.12677/ces.2026.147483

Abstract

The discovery and development of the ellipse represent a pivotal chapter in humanity's exploration of geometric principles, with each theoretical breakthrough representing an innovation and refinement of prior understanding. Through centuries of historical accumulation, knowledge about ellipses has evolved into a systematic and robust theoretical framework. This paper presents a teaching design centered on the "Ellipse and Its Standard Equation", building upon students' existing geometric knowledge and conducting an in-depth analysis of learning contexts and instructional content to develop a series of progressively structured teaching activities. The instructional approach fully emphasizes student-centered learning, prioritizes the guidance and cultivation of logical thinking, and enables students to witness firsthand the emergence and evolution of the ellipse concept. This approach helps students uncover the essential nature of geometric knowledge and independently construct a coherent knowledge network related to ellipses. Additionally, students are immersed in mathematical culture during knowledge transmission, appreciate the educational and cultural value of mathematical history, and benefit from a comprehensive set of exemplary cases that serve as reference models and implementation guidelines for integrating mathematical history into geometry classroom instruction.

Keywords

History and Pedagogy of Mathematics (HPM), APOS Theory, Ellipse and Its Standard Equation, Instructional Design

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

APOS 理论是美国学者杜宾斯基等人提出的基于建构主义的数学概念教学理论, 该理论深入剖析了学生对数学知识的解构与建构过程, 将数学概念的习得划分为“操作(Action)、过程(Process)、对象(Object)、图式(Schema)”四个相互衔接、层层递进的阶段, 充分彰显了以生为本的教育理念[1]。而 HPM 作为数学史与数学教育相融合的教学方法, 强调重构历史、回归自然, 注重让学生重演数学知识的发现过程, 与 APOS 理论所倡导的“学生主动建构知识”的核心思想高度契合[2]。从古希腊阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中通过平面截圆锥得到椭圆并系统研究其几何性质, 到 17 世纪笛卡尔用解析几何方法将椭圆转化为代数方程, 再到开普勒发现行星运动轨迹是椭圆, 椭圆的每一次发展都推动着数学与自然科学的进步。椭圆是我们向学生系统介绍的第一种圆锥曲线, 讲清楚它从何而来, 有何应用, 将为学生后续学习双曲线、抛物线提供类比的对象[3]。通过数学史的渗透, 发现三种圆锥曲线是一个有机的整体, 有利于帮助学生理解其数学本质。

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》(以下简称《课标(2017 年版)》)将椭圆相关内容纳入选择性必修课程, 作为解析几何的重要组成部分, 要求学生理解椭圆的定义、掌握椭圆的标准方程, 并能运用相关知识解决实际问题[4]。然而, 当前椭圆教学中存在一些问题: 数学史的融入多停留在表面, 多以点缀式呈现, 未能与教学过程深度融合, 无法有效帮助学生构建完整的知识体系; 椭圆概念抽象、标准方程推导复杂, 学生容易陷入机械记忆, 难以理解知识的本质内涵。

基于此, 本文选取《普通高中教科书 数学 A 版 选择性必修 第一册》第三章第一节下的第一小节“椭

圆及其标准方程”为例, 依据教科书的内容安排, 充分考虑学生的认知特点, 尝试基于 APOS 理论从数学史融入角度设计教学过程, 挖掘椭圆教学的内在规律, 训练学生的几何直观与逻辑推理能力, 促进学生构建完善的椭圆知识认知结构, 实现数学史与教学过程的有机融合, 为数学史融入几何概念教学提供实践参考。

2. APOS 视角下数学史与 HPM 深度融合的理论探讨

APOS 理论作为一种建构主义的学习理论, 强调学生在与环境的互动中主动建构认知结构[5]。而 HPM 则主张通过重构历史, 立于曾经的数学家的视野下重新探索数学疑难, 以促进学生的理解能力和探究能力的提升, 帮助学生感受数学文化和数学价值, 形成正确的数学价值观[6]。二者都反对知识的机械灌输, 重视学生的主动参与, 这是其融合的根本基础。然而, 要实现二者的深度融合, 不仅要看到其契合点, 更要正视其潜在差异, 并寻求协调策略。

2.1. 契合点

2.1.1. 建构主义认识论基础

两者均认为知识不是被动接受的, 而是学习者在已有经验基础上主动建构的。APOS 强调通过活动、反思和内化形成概念; HPM 主张让学生重演历史发现过程, 本质上是引导学生进行“再创造”。

2.1.2. 过程导向的教学观

APOS 强调从操作到图式的渐进性; HPM 通过历史脉络展现概念的形成与演变。两者都反对直接给出定义 - 证明 - 应用的灌输式教学。

2.1.3. 认知障碍的历史相似性

历史上数学家遇到的困难, 如椭圆定义从几何到代数的转变、对根号方程的化简, 往往与当代学生的认知障碍具有同构性。这为教学诊断和支架设计提供了历史参照。

2.2. 潜在差异

2.2.1. 历史顺序与认知顺序的错位

数学史是漫长、曲折甚至充满迂回的真实过程, 而 APOS 理论是理想化、线性的认知路径。例如, 椭圆焦点的性质在阿波罗尼奥斯时代已有研究, 但“焦点”这一名称及系统应用却晚得多。若完全遵循历史, 可能会干扰学生核心概念的建构。

2.2.2. 几何传统与代数传统的张力

古希腊几何学侧重演绎与综合, 而笛卡尔解析几何则侧重坐标与计算。APOS 理论中, 从“过程”到“对象”的“封装”往往依赖于代数化。完全用几何方法处理椭圆, 学生难以达到“对象”阶段的形式化要求。

2.3. 协调策略

2.3.1. 顺应教学逻辑和认知规律

教师不应是历史的搬运工, 而应是历史的“编剧”。在过程阶段, 我们采用“绳套法”史料, 但将其蕴含的“两定点”直接称为“焦点”, 这虽不完全符合史实, 但顺应了教学逻辑和认知规律。这种基于教学目标的史料重构是协调差异的核心策略。

2.3.2. 明确阶段侧重, 实现优势互补

在操作与过程阶段, 应充分利用几何史料, 发展学生的几何直观与空间想象能力。进入对象阶段, 则果断引入解析几何思想, 完成从几何到代数的跨越。在不同阶段发挥不同史料的优势, 并用 APOS 理

论作为整合的框架, 指导何时侧重何种方法。

3. 史料的选取与融入

3.1. 遵循史料适切性原则选取教学素材

在史料选取方面, 应该严格遵循史料适切性原则, 依据汪晓勤教授提倡的“趣味性、科学性、有效性、可学性和新颖性”等五项原则, 贴合教材内容和课标要求选取适宜初中生知识建构的历史素材[7]。

3.1.1. 操作阶段

本阶段强调创设合理的问题情境, 让学生亲身体验, 感悟椭圆的几何生成, 形成初步认知。约公元前 262~190 年, 阿波罗尼奥斯的八卷本《圆锥曲线论》, 系统阐述了圆锥截线的性质。用平面截割对顶圆锥, 根据截面角度不同得到三类曲线: 截面平行于圆锥母线得到抛物线, 也叫作“齐曲线”; 截面与轴线夹角小于母线与轴线夹角得到椭圆, 别名“亏曲线”; 截面与轴线夹角大于母线与轴线夹角得到双曲线, 也可叫作“超曲线”。推导了大量几何性质, 例如椭圆上任一点到两焦点的距离之和为常数, 但阿波罗尼奥斯并未使用“焦点”这一名称, 焦点性质由帕波斯 later 补充。《圆锥曲线论》几乎囊括了 19 世纪之前关于圆锥曲线的所有知识, 为开普勒、笛卡尔等人的研究提供了几何基础。内容以几何操作为主, 符合学生动手实践认知的基础, 且能对接椭圆生成条件这一教学重点。

3.1.2. 过程阶段

本阶段在学生感悟圆锥曲线几何生成的基础上, 不断加强对圆锥曲线的内化理解, 从中抽象出椭圆定义。“绳套法”是 17 世纪数学家在探索曲线性质时常用的物理模型或思想实验, 即固定两定点, 用长度大于两定点距离的无弹性绳子, 拉紧移动铅笔可画出椭圆, 对接史料逻辑提出“绳子长度与两定点距离有何关系? 若绳长等于或小于两定点距离, 会画出什么图形?”等问题。通过这种顺应教学逻辑的史料调整, 引导学生重演“绳套法”操作, 在实践中感知“椭圆上任意一点到两定点距离之和为常数”的核心特征, 最终抽象出椭圆的严格定义。该流程简单易懂, 无需复杂工具, 匹配学生的动手能力, 且能够支撑“椭圆定义抽象”这一教学难点, 通过史料中的“两定点”“绳长”等关键要素, 为定义抽象提供抓手。

3.1.3. 对象阶段

主要是注重揭示概念本质, 结合教材和史料逐步将几何对象转化为代数方程, 实现对象固化的认知目标。采用笛卡尔《几何学》中的解析几何的核心观点, 引入坐标系, 可以是直角坐标系也可以是倾斜坐标系, 将几何点与 (x, y) 对应, 则几何曲线可用含 x, y 的方程表示, 方程的次数对应曲线的类型, 进而可以通过代数运算解决几何问题, 强调“问题转化”的一般方法, 即将几何问题转化为代数方程, 用代数技巧求解, 再翻译回几何, 更注重用方程分类曲线。史料蕴含的“数形结合”“坐标系构建”思路, 能直接破解“标准方程推导”的教学难点, 且符合学生已掌握的“坐标系”、“距离公式”等知识基础。

3.1.4. 图式阶段

关键在于将所学概念纳入知识体系, 能与旧知建立内在联系, 也能为新知学习提供生长点。椭圆及其标准方程为后续学习双曲线、抛物线奠定基础, 也为解决实际问题提供了数学工具, 因此, 本阶段聚焦椭圆的实际应用, 适当融入开普勒发现“行星运动轨迹是椭圆”, 这是将椭圆与天文学现象联系, 打破数学概念的抽象壁垒, 且能够支撑“椭圆知识应用”与“知识体系整合”两大教学重点, 帮助学生理解椭圆的实用价值。

3.2. 落实多元化方式融入数学素材

以《普通高中教科书 数学 A 版 选择性必修 第一册》第三章第一节下的第一小节“椭圆及其标准方

程”为例，基于 APOS 理论的特点，梳理了与每一阶段相对应的椭圆及其标准方程史料，但还需结合高中生的认知水平及生活经验设计史料的融入方式。附加式、复制式、顺应式和重构式是目前最为常见的数学史融入数学教学的方式[8][9]，在充分考虑每种方式的作用及特点后设计如下史料融入方式，见表 1。

Table 1. Selection and integration methods of historical materials on ellipses and their standard equations
表 1. 椭圆及其标准方程史料选取及融入方式

教学阶段	数学史料	融入方式
操作阶段	阿波罗尼奥斯“平面截圆锥”	附加式
过程阶段	“绳套法”画椭圆	顺应式
对象阶段	笛卡尔解析几何的思想	重构式
图式阶段	开普勒发现“行星运动轨迹是椭圆”	附加式

3.3. 教学背景分析

3.3.1. 教学内容分析

本节内容位于《普通高中教科书 数学 A 版 选择性必修 第一册》第三章第一节，是解析几何中二次曲线的开篇内容。在学生已掌握直线与圆的方程、平面向量等知识的基础上，通过对椭圆的研究，为后续双曲线、抛物线的学习奠定方法基础与认知框架。

其核心内容包括椭圆的定义、椭圆的标准方程及其推导过程。椭圆的定义源于几何直观，是后续推导标准方程的逻辑基础；标准方程的推导过程融合了数形结合、转化与化归等重要数学思想，是训练学生代数运算与逻辑推理能力的重要载体。教学内容既注重几何本质的揭示，又强调代数方法的应用，实现了几何与代数的有机统一。

3.3.2. 学情分析

从知识基础来看，学生已经掌握了直线、圆的方程推导方法，熟悉坐标系、两点间距离公式等基础知识，具备了一定的数形结合思想，为椭圆标准方程的推导提供了知识铺垫；从思维特点来看，高中生正处于从具体形象思维向抽象逻辑思维过渡的关键阶段，具备一定的动手操作与探究能力，但对于椭圆这种抽象的二次曲线，在理解定义的本质、掌握方程推导的逻辑过程等方面仍存在困难；从认知障碍来看，学生容易将椭圆与圆的概念混淆，在标准方程推导过程中，对坐标系的建立、根号的化简等步骤存在畏难情绪，且对数学史中蕴含的思想方法缺乏深入理解，难以将历史发展与自身认知过程相结合。

3.3.3. 教学目标

- (1) 通过重演椭圆的历史发现过程，了解椭圆的发展脉络，感受数学史的魅力，体会椭圆产生的实际意义与科学价值，提高学生的数学文化素养。
- (2) 经历“操作 - 抽象 - 推导 - 应用”的过程，理解椭圆的定义，掌握椭圆的标准方程，能根据条件求椭圆的标准方程，明确椭圆标准方程中 a 、 b 、 c 的几何意义及相互关系，提升逻辑推理与代数运算能力。
- (3) 在教学过程中体会数形结合、转化与化归等数学思想，培养学生的动手实践能力与自主探究意识，构建完整的椭圆知识认知结构，增强应用数学知识解决实际问题的能力。

3.3.4. 教学设计

- (一) 操作阶段：创设情境，重演历史生成

【活动 1】

师：同学们，我们已经学习了直线和圆的相关知识，在平面几何中，还有一类重要的曲线广泛存在于自然界和生活中，比如行星的运行轨道、汽车的后视镜、橄榄球的截面等。大家想知道这类曲线是如何被发现的吗？接下来我们一起观看一段视频，探寻椭圆的起源。

学生观看视频，了解椭圆的历史发展：公元前 3 世纪，阿波罗尼奥斯在《圆锥曲线论》中通过平面截割对顶圆锥，根据截面角度的不同得到了椭圆、抛物线、双曲线；17 世纪，笛卡尔用解析几何方法将椭圆转化为代数方程；开普勒发现行星运动轨迹是椭圆，将椭圆的应用推向自然科学领域。

师：通过视频，相信大家对圆锥曲线的形成和发展有了一定的了解，那么视频中提到了用平面截圆锥，可以得到不同的截面曲线，有椭圆、双曲线、抛物线，接下来利用信息技术来观察是如何得到的？假设圆锥的轴与平面的夹角为 θ ，圆锥的轴截面顶角为 α 。

学生分组操作，教师巡视指导。通过操作，学生发现：当 $\theta=90^\circ$ 时，他的截面曲线是圆，如图 1；改变 θ 和的大小，当 $\alpha < \theta < 90^\circ$ ，形成的截面曲线是椭圆，可以观察到平面与圆锥的母线不平行且不过顶点，如图 2；继续改变角度的大小，当 $\theta = \alpha$ 时，截口的曲线是抛物线，且平面与圆锥的母线平行，如图 3；当 $0^\circ < \theta < \alpha$ ，此时得到的是双曲线，如图 4；

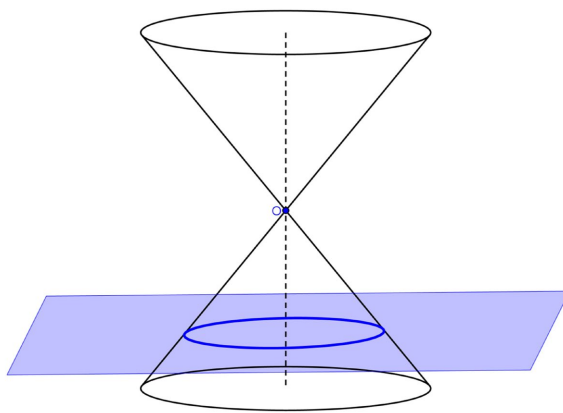


Figure 1. Circle
图 1. 圆

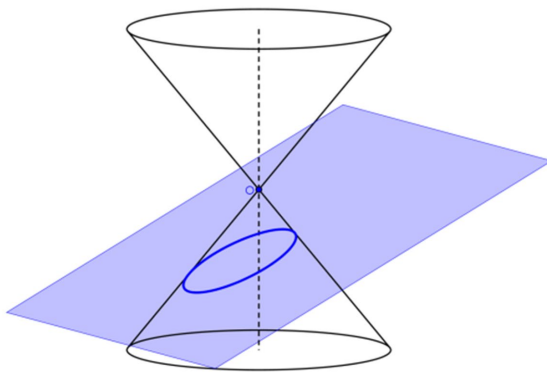


Figure 2. Ellipse
图 2. 椭圆

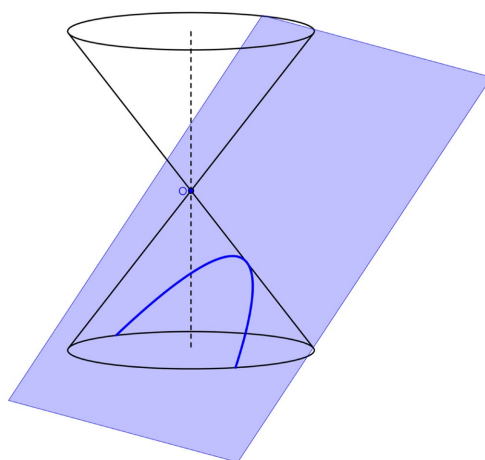


Figure 3. Parabola
图 3. 抛物线

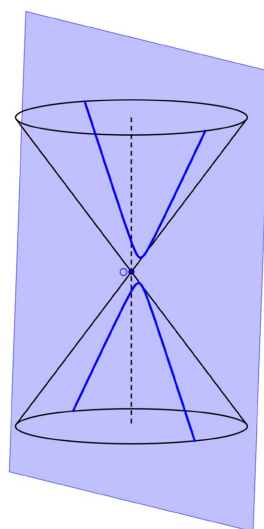


Figure 4. Hyperbole
图 4. 双曲线

生 1 代表预设: 我们小组发现, 截面的角度不同, 得到的曲线形状也不同, 当截面倾斜程度适中时, 得到的就是椭圆。

生 2 代表预设: 我们注意到椭圆和圆看起来有相似之处, 但椭圆比圆“扁”, 它的形状由截面的倾斜角度决定。

【设计意图】当前教学视频已成为学生日常学习过程中不可或缺的数字学习资源, 是学生与知识建立联系的纽带, 经过精心设计和组织的视频内容, 在吸引学生注意力、引发学生积极思考等方面发挥着重要作用[10]。通过视频展示椭圆的历史发展, 结合信息技术重演阿波罗尼奥斯发现椭圆的过程, 让学生直观感受椭圆的几何生成, 激发学生的学习兴趣与探究欲望。融入数学史的学习, 可以让学生的学习系统的数学知识的同时, 对数学知识的产生过程有一个比较清晰的认识, 从而培养学生正确的数学思维方式[11]。这种基于历史的操作活动, 既符合 APOS 理论的操作阶段要求, 又能让学生在实践中初步建立椭

圆的直观认知, 为后续概念的抽象奠定基础。

(二) 过程阶段: 抽象概括, 形成椭圆定义

【活动 2】

师: 通过平面截圆锥我们得到了椭圆, 那么还有其它方法可以画出椭圆吗? 在 17 世纪, 数学家们常用“绳套法”来画椭圆。接下来请大家按照以下步骤进行操作: 在纸板上固定两个图钉, 将无弹性的绳子两端固定在图钉上, 使绳子长度大于两图钉间的距离, 用铅笔拉紧绳子移动, 观察画出的图形。

学生动手操作, 画出椭圆。教师提出问题引导学生思考:

- (1) 操作过程中, 哪些量是不变的? 哪些量是变化的?
- (2) 如果绳子长度等于两图钉间的距离, 能画出椭圆吗? 得到的是什么图形?
- (3) 如果绳子长度小于两图钉间的距离, 又能得到什么结果?

学生分组讨论, 交流思考结果。

生 3 预设: 操作过程中, 两图钉的位置是固定的, 绳子的长度是不变的, 变化的是铅笔的位置以及铅笔到两个图钉的距离。

生 4 预设: 当绳子长度等于两图钉间的距离时, 画出的是一条线段; 当绳子长度小于两图钉间的距离时, 无法画出图形。

师: 大家观察得非常仔细。我们把两个图钉所在的点叫做焦点, 两焦点间的距离叫做焦距。结合操作过程和讨论结果, 大家能尝试给椭圆下一个定义吗?

学生尝试概括, 教师引导补充, 最终得出椭圆的定义: 平面内与两个定点 F_1 、 F_2 的距离之和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆。两个定点 F_1 、 F_2 叫做椭圆的焦点, 两焦点间的距离 $|F_1F_2|$ 叫做椭圆的焦距。

【设计意图】通过“绳套法”操作, 让学生在实践中感知椭圆的核心特征, 即“到两定点距离之和为常数”。结合历史上数学家的研究方法, 引导学生从具体操作抽象出椭圆的定义, 符合 APOS 理论的过程阶段要求, 帮助学生实现从直观体验到抽象概念的过渡。

(三) 对象阶段: 演绎推理, 推导标准方程

【活动 3】

师: 我们已经掌握了椭圆的定义, 接下来需要像推导圆的方程那样, 建立椭圆的代数方程, 实现几何图形与代数表达式的统一。大家回忆一下, 推导圆的标准方程经历了哪些步骤?

生 5 预设: 建系、设点、列式、化简。

师: 非常好。我们可以类比圆的方程推导方法来推导椭圆的标准方程。首先是建立坐标系, 为了使方程形式简洁, 我们应该如何建立合适的平面直角坐标系呢?

学生讨论后提出方案: 将两个焦点 F_1 、 F_2 放在 x 轴上, 且关于原点对称。

师: 这个方案很合理。我们具体设定: 以 F_1 、 F_2 所在直线为 x 轴, 线段 F_1F_2 的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系; 设 $|F_1F_2| = 2c$ ($c > 0$), 则 $F_1(-c, 0)$ 、 $F_2(c, 0)$; 设椭圆上任意一点 $P(x, y)$, 且 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ($a > c > 0$), 其中 $2a$ 是椭圆上任意一点到两焦点距离之和。

师: 根据椭圆的定义, 我们可以列出几何关系式: $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 。请大家结合两点间距离公式, 将这个几何关系式转化为代数表达式。学生动手转化, 得到: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ 。

师: 这个表达式含有两个根号, 需要进行化简。大家思考一下, 如何化简这个方程? 学生尝试化简, 教师巡视指导, 强调化简的关键步骤: 先移项, 将其中一个根号移到等号右边, 再平方消去根号, 重复操作直至消除所有根号。

化简过程如下：移项得 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ ，两边同时平方得到代数式 $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$ ，整理等式得到代数式 $a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$ ，还存在根号，因此需要再次平方，得到代数式 $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ 。

师：为了使方程形式更简洁，我们令 $b^2 = a^2 - c^2 (b > 0)$ ，代入上式可得： $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ，两边同时除以 a^2b^2 ，得到： $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 (a > b > 0)$ 。这个方程就是椭圆的标准方程，它表示焦点在 x 轴上的椭圆。

师：如果我们将两个焦点放在 y 轴上，椭圆的标准方程会发生什么变化呢？大家可以类比焦点在 x 轴上的情况，尝试推导焦点在 y 轴上的椭圆标准方程。

学生自主推导，教师引导总结：焦点在 y 轴上的椭圆标准方程为 $y^2/a^2 + x^2/b^2 = 1 (a > b > 0)$ ，其中焦点坐标为 $F_1(0, -c)$ 、 $F_2(0, c)$ ，且满足 $b^2 = a^2 - c^2$ 。

师：我们已经得到了椭圆的两种标准方程，大家思考一下，如何根据椭圆的标准方程判断焦点所在的坐标轴？

生 6 预设：看标准方程中 x^2 和 y^2 项的分母大小，分母大的项对应的坐标轴就是焦点所在的坐标轴。

【设计意图】类比圆的方程推导方法，引导学生经历“建系、设点、列式、化简”的完整过程，推导椭圆的标准方程。在推导过程中，融入笛卡尔解析几何的思想方法，让学生体会数形结合的数学思想，实现从椭圆“过程”到“对象”的转化，帮助学生掌握椭圆的核心知识。其中数形结合思想是数学解题中常用的数学思想，华罗庚曾对数形结合思想有过精辟的论述：“数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞？数缺形时少直观，形少数时难入微”[12]。“数”抽象而形式化，“形”具体而形象化。“数”与“形”对应的思维是分析性思维和视觉化思维，这两种思维在数学解题中都是必需的。它们在数学中相互作用互为补充。

(四) 图式阶段：整合应用，构建知识体系

【活动 4】

师：我们已经学习了椭圆的定义和标准方程，接下来通过例题和练习巩固所学知识，将椭圆的相关知识纳入我们的数学知识体系。

例 1：已知椭圆的两个焦点坐标分别为 $F_1(-2, 0)$ 、 $F_2(2, 0)$ ，椭圆上一点 P 到两焦点的距离之和为 6，求椭圆的标准方程。

学生思考解答，教师板书过程：由题意知， $c = 2$ ， $2a = 6$ ，则 $a = 3$ 。根据 $b^2 = a^2 - c^2$ ，得 $b^2 = 9 - 4 = 5$ 。因为焦点在 x 轴上，所以椭圆的标准方程为 $x^2/9 + y^2/5 = 1$ 。

例 2：在天文学中，某行星绕太阳运行的轨道是椭圆，太阳位于椭圆的一个焦点上，已知椭圆的长半轴长 $a = 1.5 \times 10^8 \text{ km}$ ，焦距 $2c = 3 \times 10^6 \text{ km}$ ，求该行星运行轨道的标准方程。

学生分组解答，教师巡视指导，强调实际问题与数学模型的转化。

【活动 5】

师：请大家结合本节课的学习，思考椭圆与圆之间存在怎样的关系？椭圆的知识与我们之前学习的直线、圆的知识有什么联系？

生 7 预设：当椭圆的长半轴 a 和短半轴 b 相等时，椭圆的标准方程就转化为圆的方程 $x^2 + y^2 = a^2$ ，所以圆是椭圆的特殊情况。

生 8 预设：椭圆和圆都是平面内的封闭曲线，它们的方程推导都采用了建系、设点、列式、化简的方法，都体现了数形结合的思想。

师：大家总结得非常好。椭圆作为二次曲线的重要类型，与直线、圆等知识共同构成了解析几何的

基础体系。在今后的学习中, 我们还将学习双曲线、抛物线等二次曲线, 它们的研究方法与椭圆有许多相似之处, 大家可以继续运用今天所学的思想方法进行探究。

【设计意图】通过例题练习巩固椭圆的定义和标准方程, 结合实际问题让学生体会椭圆的应用价值; 通过引导学生梳理椭圆与圆、直线等知识的联系, 帮助学生构建完整的知识图式, 实现从“对象”到“图式”的升华, 促进学生知识的系统化与结构化。

(五) 梳理思路, 总结提升

【活动 6】

师: 本节课我们通过重演椭圆的历史发现过程, 学习了椭圆的定义和标准方程。请大家回顾一下, 本节课的学习经历了哪些阶段? 我们运用了哪些数学思想和方法?

学生自主总结, 教师补充完善: 通过平面截圆锥和绳套法操作, 直观感受椭圆的生成; 从操作中抽象出椭圆的定义, 把握其核心特征; 推导椭圆的标准方程, 明确其代数形式与几何意义; 整合椭圆与其他知识的联系, 构建知识体系。运用的数学思想方法: 数形结合思想、转化与化归思想、类比思想。

【设计意图】通过课堂总结, 帮助学生梳理本节课的学习脉络, 巩固核心知识与思想方法, 深化对椭圆知识的理解, 促进认知结构的完善。

(六) 拓展延伸, 自主探究

【活动 7】

师: 课后请大家完成以下任务:

1. 已知椭圆 $x^2/25 + y^2/16 = 1$, 求该椭圆的长轴长、短轴长、焦距、焦点坐标和离心率;
2. 思考: 在日常生活中, 还有哪些椭圆的应用实例? 如何运用椭圆的知识解决这些实际问题?

【设计意图】通过课后任务, 让学生进一步了解椭圆的数学史, 巩固所学知识, 培养自主探究能力与应用意识, 实现课堂学习的延伸与拓展。

4. 结论与讨论

APOS 理论揭示了数学概念习得的渐进过程, 强调学生主动建构知识的重要性。本文以“椭圆及其标准方程”为例, 通过重演椭圆的历史发展过程, 让学生经历“操作 - 过程 - 对象 - 图式”的完整认知阶段, 深入理解椭圆的本质内涵。通过该案例的研究, 得到以下教学启示:

第一, 遵循认知规律, 设计阶梯式教学活动。椭圆概念抽象、方程推导复杂, 教学活动的设计应符合学生的认知发展规律, 从直观操作到抽象概括, 从理论推导到实际应用, 层层递进、逐步深入。教师需充分考虑学生的学情, 为学生搭建认知脚手架, 帮助学生突破学习难点, 实现知识的自主建构。

第二, 深化数学史融入, 挖掘历史教育价值。数学史不应仅作为教学导入的工具, 而应贯穿教学全过程, 与教学内容深度融合。通过重演数学家的探究过程, 让学生感受数学知识的形成历程, 体会其中蕴含的思想方法与探究精神, 实现数学文化的浸润与德育目标的达成。同时, 需对数学史素材进行合理筛选与重组, 确保其符合教学目标与学生认知水平。

第三, 注重思想方法渗透, 培养核心素养。在椭圆教学中, 应注重数形结合、转化与化归、类比等数学思想方法的渗透, 引导学生运用这些思想方法解决问题, 培养学生的逻辑推理、代数运算、直观想象等核心素养。同时, 通过动手操作、分组探究等活动, 增强学生的实践能力与合作意识, 促进学生全面发展。

第四, 加强案例实证研究, 优化教学实践。教学案例的设计与实施需要不断反思与完善。在实际教学中, 应关注学生的学习反馈, 根据学生的个体差异调整教学策略, 优化课堂教学过程; 同时, 加强不同教学案例的对比研究, 总结数学史与 APOS 理论融合的有效路径, 为高中数学教学提供更多优质的实

践参考。总之, HPM 视角下基于 APOS 理论的教学设计, 能够有效促进数学史与数学教学的深度融合, 符合学生的认知发展规律, 有助于学生构建完整的知识体系、提升核心素养。在今后的教学中, 应进一步探索该模式的应用范围与实施策略, 不断提升数学教学的质量与效果。

基金项目

2026 年黄冈师范学院研究生工作站课题(5032026032); 湖北省黄冈市教育科学规划课题(2024JB52); 黄冈师范学院 2025 年校级教学研究项目(2025CE32);

参考文献

- [1] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009.
- [2] 余庆纯, 汪晓勤. 中国 HPM 研究内容与方法[J]. 数学教育学报, 2022, 31(4): 49-55.
- [3] 罗德建, 伍春兰. 核心素养视域下的“椭圆及其标准方程”的教学改进[J]. 数学通报, 2019, 58(5): 40-44.
- [4] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2018: 8-34, 69, 82-83.
- [5] 乔连全. APOS: 一种建构主义的数学学习理论[J]. 全球教育展望, 2001, 30(3): 16-18.
- [6] 孙成成, 胡典顺. APOS 理论视角下数学史与数学教学的融合——以复数的教学为例[J]. 数学通讯, 2017(2): 1-5.
- [7] 沈中宇, 李霞, 汪晓勤. HPM 课例评价框架的建构——以“三角形中位线定理”为例[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2017(1): 35-41.
- [8] 汪晓勤. 法国初中数学教材中的数学史[J]. 数学通报, 2012, 51(3): 16-20, 23.
- [9] 汪晓勤. 基于数学史料的高中数学问题编制策略[J]. 数学通报, 2020, 59(5): 9-15.
- [10] 乔金秀, 穆肃, 黄向阳, 等. 教学视频角色表征对学习影响的多模态数据融合分析[J]. 现代教育技术, 2024, 34(5): 74-83.
- [11] 杨渭清. 对数学史在数学教学中作用的思考[J]. 数学通报, 2013, 52(9): 21-23, 26.
- [12] 李晶, 孙雪梅, 李德安. 一题之探——以数形结合思想为例[J]. 数学通报, 2019, 58(4): 60-63.