

人工智能技术在“将军饮马”问题教学中的应用

钱妙妙

黄冈师范学院数学与统计学院, 湖北 黄冈

收稿日期: 2026年4月29日; 录用日期: 2026年7月13日; 发布日期: 2026年7月22日

摘要

“将军饮马”问题是数学中经典的最短路径问题, 涉及轴对称、平移和全等变换等核心几何概念。通过GeoGebra的动态演示功能, 展示了三种常见的解题方法: 对称、平移和全等变换, 并结合具体例题进行讲解, 以帮助学生更好地理解并解决此类问题。文章还探讨了人工智能在辅助教学中的应用, 为信息技术与数学教学的深度融合提供了新的思路。

关键词

将军饮马, 人工智能技术, GeoGebra

The Application of Artificial Intelligence Technology in Teaching the “General’s Horse Watering” Problem

Miaomiao Qian

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: April 29, 2026; accepted: July 13, 2026; published: July 22, 2026

Abstract

The “General’s Horse Drinking” problem, a classic shortest path problem in mathematics, involves core geometric concepts such as axis symmetry, translation, and congruent transformations. Through the dynamic demonstration function of GeoGebra, three common problem-solving methods are

demonstrated: symmetry, translation, and congruent transformations, and are explained with specific examples to help students better understand and solve such problems. The article also discusses the application of artificial intelligence in assisting teaching, providing new ideas for the deep integration of information technology and mathematics teaching.

Keywords

General's Horse Drinking, Artificial Intelligence Technology, GeoGebra

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 问题提出

当前教育正处于数字化转型的关键阶段，信息技术与数学教学的整合从探索性实践逐步走向常态化应用。一方面，《教育强国建设规划纲要（2024—2035 年）》提出¹，需探索人工智能与教育场景的适配路径，优化教师教学支持体系，推动智能教育工具的应用创新[1]。另一方面，《义务教育数学课程标准（2022 年版）》²（以下简称《新课标》）指出，要促进信息技术与数学课堂融合，合理利用现代信息技术，促进数学教学方式方法的变革[2]。作为教育信息化的核心技术，人工智能正深刻改变数学教学模式，还集成了丰富的教育信息，为师生获取信息资源开辟了新途径，从而提升教学效率并增强学生的学习成效[3]。将人工智能技术与初中数学教学相结合也是践行《新课标》的要求，这种结合既是教育信息化进程中的必然趋势，又是提高数学教育成效、促进学生关键能力发展的有效途径。

“将军饮马”问题是初中数学最短路径问题的核心载体，涉及轴对称、平移、全等变换等关键几何知识。中学生感到这类问题具有挑战性的主要原因在于他们难以抽象地理解几何概念，如何更好地进行几何直观教学一直是数学教育工作者重点研究的课题[4]。现有相关研究多聚焦解题方法梳理与优化，例如，王晓隽系统归纳了不同类型问题的解题思路[5]；丁力则侧重引导学生运用模型解决实际问题[6]。然而，这些研究较少结合信息技术设计系统性教学方案，未能充分发挥动态演示、智能评估对几何直观教学的赋能作用。

基于此，本研究旨在：探索人工智能技术与“将军饮马”问题教学的结合，具体包括三方面，一是借助 AI 生成一体化的备课资源，提升教师教学效率；二是结合 GeoGebra 与 AI 的交互功能，帮助学生直观理解几何变换原理；三是通过 AI 智能批改与错误归因系统，针对解决学生的常见错误。

2. “将军饮马”问题简介

“将军饮马”问题在中考以及各类数学竞赛中经常出现，是几何部分的重要考点，核心是利用轴对称性质求最短路径。“白日登山望烽火，黄昏饮马傍交河”，这是《古从军行》里的一句诗，其中隐藏着一个有趣的数学问题：将军从 A 点出发，到河边饮马后再到 B 点宿营，将军带着马在哪个位置饮水，才能使得总路程最短？如图 1，这就是著名的“将军饮马”问题[7]。

将该问题抽象为数学问题，如图 2，平面内两个定点 A、B，一条定直线 l，在 l 上找动点 P，使 $PA + PB$ 的长度最小。解题关键在于需要将折线路径 $PA + PB$ 转化为直线段进行分析。由于七年级学生已掌握“两点间直线距离最短”、“垂线段最短”等基本几何知识，并具备平移变换和轴对称的基础概念，因此可以通过几何变换的方法实现这种转化。

¹https://www.gov.cn/gongbao/2025/issue_11846/202502/content_7002799.html

²<https://www.pep.com.cn/ebook/2022yjkbz/sx/mobile/index.html>

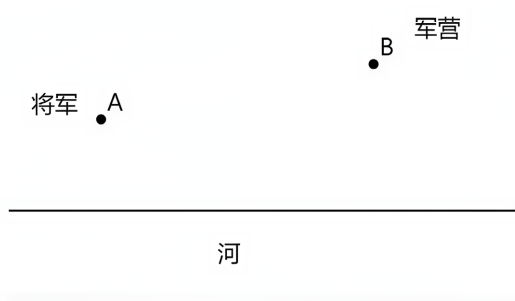


Figure 1. Problem scenario diagram

图 1. 问题情景图

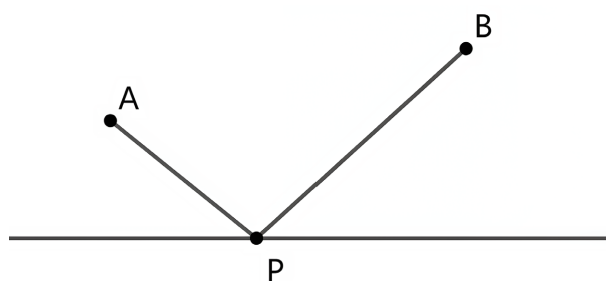


Figure 2. Mathematical model diagram

图 2. 数学模型图

3. “将军饮马”问题讲解

“将军饮马”问题类型多样，命题形式各异。本研究将探讨三种解题方法：利用对称、平移和全等变换，并结合 GeoGebra 软件开展教学活动。

3.1. 对称

3.1.1. 两点之间线段最短

例题 1 如图 3， $\triangle ABC$ 是等边三角形，边长为 12，AD 是 BC 边上的高，E 是 AC 的中点，P 是 AD 上的一个动点，则 $PC + PE$ 的最小值为多少？

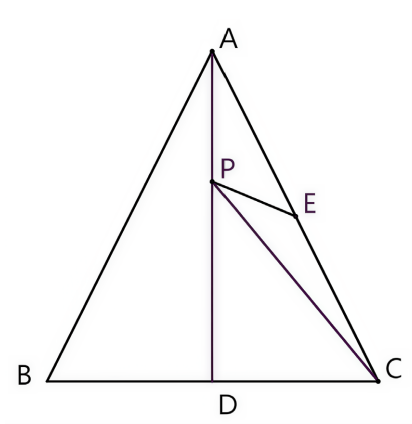


Figure 3. Original image of the question

图 3. 题目原图

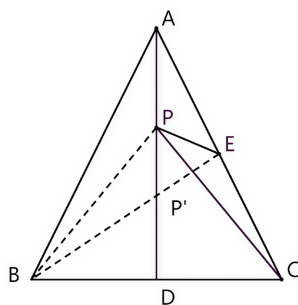


Figure 4. Transformed image
图 4. 变换后图

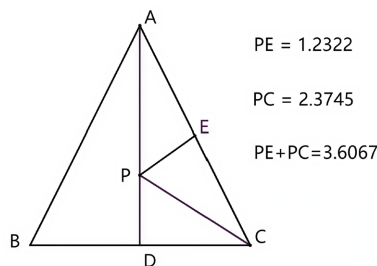


Figure 5. Plot of minimum values
图 5. 最小值位置图

通过直接观察很难看出最小值是多少，对于求最值类的题目，首先要考虑做对称点，本题中，做点 E 或点 C 的对称点均可，解题方法相同，这里以做点 C 的对称点为例讲解，借助 GeoGebra 软件的变换功能，作 C 点关于线段 AD 的对称点，见图 4，由轴对称的性质可知， $PC = PB$ ，此时转换成了求 $PE + PB$ 的最小值。由 GeoGebra 软件的测量功能也可以发现，不管动点 P 运动到哪个位置，都有 $PE + PC = PE + PB$ 。由两点之间线段最短这一知识点可得出当 B、P、E 三点共线的时候，此时为最小值，所以 $PE + PB$ 的最小值即为线段 BE 的长度，从而实现了线段的“化曲为直”。

接下来通过 GeoGebra 软件动态演示验证这一结果，借助 GeoGebra 软件的度量功能，显示 PE 和 PC 的长度，在线段 AD 上拖动动点 P 的位置。展示 $PE + PC$ 的动态变化值，直观展现 $PE + PC$ 的值会随 P 的变化而变化。可以发现，当 P 处于如图 5 所示位置时， $PE + PC$ 的值最小，从而验证了刚刚通过分析得到的结果。教师演示完之后，可让学生亲自体验、动手操作，通过实践，学生不仅能观察到数学规律，还能了解建立数学模型和发现数学的过程，进而对数学知识有更深入的理解。

3.1.2. 垂线段最短

例题 2 如图 6，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = 6$ ， $BC = 8$ ，AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，若点 P，Q 分别是 AD 和 AC 上的动点，则 $PC + PQ$ 的最小值为多少？

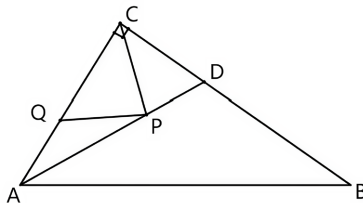


Figure 6. Original image of the question
图 6. 题目原图

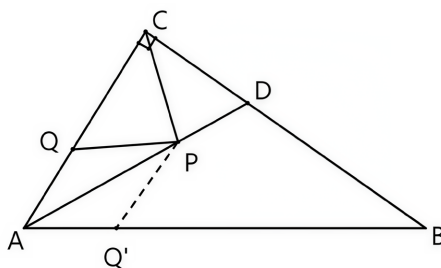


Figure 7. Transformed image
图 7. 变换后图

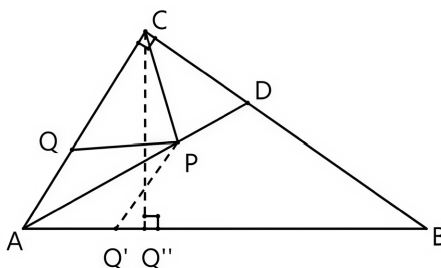


Figure 8. Plot of minimum value locations
图 8. 最小值位置图

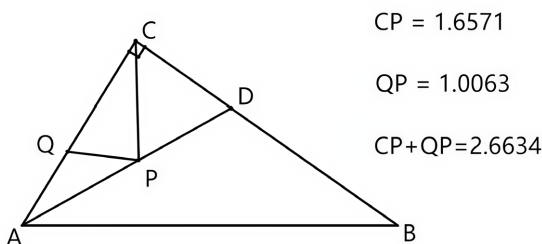


Figure 9. Verification diagram of minimum value position
图 9. 最小值位置验证图

同样，先借助 GeoGebra 软件的变换功能。作对称点 Q' ，如图 7 所示，由对称的性质可知， $PQ = PQ'$ ，所以转换成了求 $PC + PQ'$ 的最小值，但是这道题和例题 1 的解法不完全一样，线段 CQ' 并非最小值，由于点 Q 和点 P 都是动点，对于 $PC + PQ'$ ，可以理解为：无论点 P 在 AD 上如何移动，点 Q' 始终在 AB 上，那么 $PC + PQ'$ 的最小值实际上就是垂线段的长度，过点 C 作线段 AB 的垂线，如图 8 所示，垂足即为点 Q'' ，此时的垂线段长 CQ'' 即为 $PC + PQ$ 的最小值。

接下来通过 GeoGebra 软件动态演示来向学生展示这一结果，验证以上解答过程。借助 GeoGebra 软件对动点 Q 和动点 P 启动动画，同时展示 CP 、 QP 、 $CP + QP$ 的动态变化值，可以发现当动点 Q 和 P 处于如图 9 所示位置时， $CP + QP$ 的值最小，且此时动点 Q 和 P 的位置与图 8 分析结果一致。考虑软件测量的精确性，可验证前面的分析是正确的。使用 GeoGebra 软件的动态演示功能，学生能直观地感受到数值随动点变化的过程。

3.2. 平移

例题 3 如图 10，在矩形 $ABCD$ 中， $AD = 4$ ， $AB = 2$ ， P ， Q 为 BC 上两点，且 $PQ = 1$ ，则四边形 $APQD$ 周长的最小值为多少？

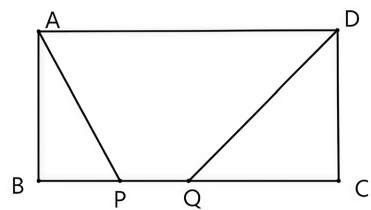


Figure 10. Original image of the question
图 10. 题目原图

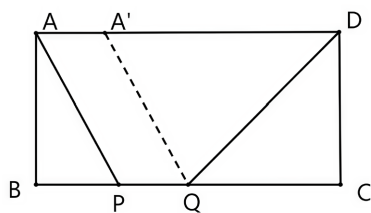


Figure 11. Transformed figure
图 11. 变换后图

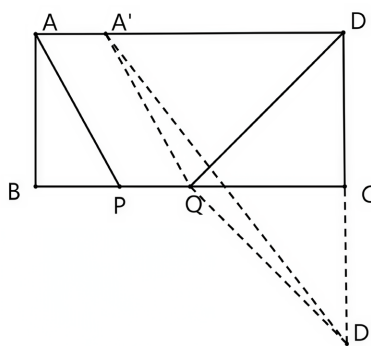


Figure 12. Plot of minimum values figure
图 12. 最小值位置图

$AP = 2.706 \quad QD = 2.7461$

$APQD \text{ 周长} = 10.4521$

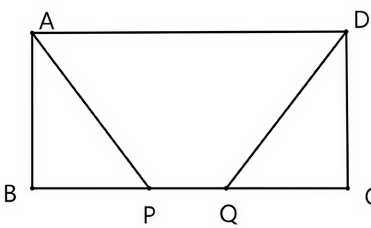


Figure 13. Verification diagram of minimum value position
图 13. 最小值位置验证图

考虑线段 AD 、 PQ 为定值，故只要求 $AP + QD$ 的最小值即可。由于线段 AP 和 QD 之间没有公共点，不利于直接求解，为了将分散的线段 AP 和 QD 转化为有公共端点的线段，便于利用“将军饮马”类问题的方法求解，可将 AP 平移至 $A'Q$ ，如图 11 所示，这样最小值就转化为求 $A'Q + QD$ 的最小值。通过平移就将复杂的问题转化为标准的“将军饮马”问题，与例 1 本质一致。故借助“将军饮马”问题的解题

方法，作对称点 D' ，如图 12 所示， $A'Q + QD$ 的最小值也就是线段 $A'D'$ 的长。四边形 $APQD$ 周长的最小值也就是 $AD + PQ + A'D'$ 。

借助 GeoGebra 软件对动点 P 和动点 Q 启动动画，同时展示线段 AP 、 QD 以及四边形 $APQD$ 的周长动态变化值。由于线段 PQ 的长度是定值，所以动点 P 和 Q 在线段 BC 上的运动过程实际上是同频的。通过动画演示，学生可以直观地发现，当动点 P 和 Q 运动到如图 13 所示位置时，四边形 $APQD$ 的周长值最小。从而验证了上述的解答过程。

3.3. 全等变换

例题 4 如图 14，正方形 $ABCD$ 的边长为 4， E 、 F 分别是边 AB 和 BC 上的动点且始终满足 $AE = BF$ ，连结 DE 、 DF ，则 $DE + DF$ 的最小值为多少？

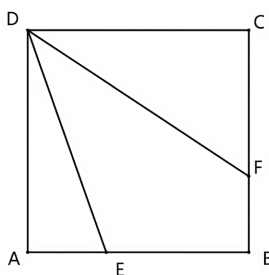


Figure 14. Original image of the question

图 14. 题目原图

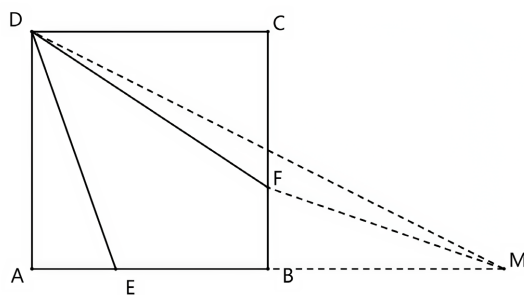


Figure 15. Minimum value position diagram

图 15. 最小值位置图

$$DF = 4.4721 \quad DE = 4.4721$$

$$DF + DE = 8.9442$$

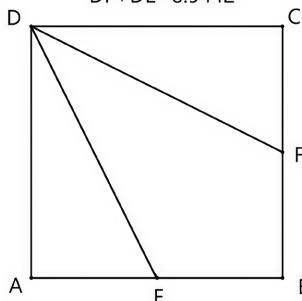


Figure 16. Verification diagram of minimum value position

图 16. 最小值位置验证图

考虑到已知条件 $AE = BF$ ，所以动点 E 和动点 F 运动轨迹是同频的，分别在线段 AB、BC 上运动。此时若采用前面几道例题所采用的方法，作点关于线段的对称点，是行不通的。为了实现线段 DE 和 DF 的转化，尝试构造全等三角形。延长 AB 至点 M，使得 $AD = BM$ ，连接 FM、DM，构造 $\triangle BFM$ 全等于 $\triangle AED$ ，如图 15 所示，此时 $DE = FM$ ，最小值也就转化为线段 DM 的长，这样就将问题转化为与前面类似的“两点之间线段最短”问题来求解。

同样可以利用 GeoGebra 软件的动态演示功能，对前述结论进行可视化验证。步骤同上，可以发现当动点 E、F 运动到如图 16 所示位置时， $DE + DF$ 的值最小，由此验证了上述结果。

4. 人工智能辅助教学的具体应用

4.1. 课前备课辅助

教师可以使用人工智能技术辅助备课，进行“将军饮马”相关问题资料的收集和整理。例如，教师使用 deepseek，输入具体需求，如图 17 所示。AI 自动生成文化背景解析、分层例题、板书设计、GeoGebra 操作脚本，将备课时间从 2 小时缩短至 20 分钟，教师可结合学情微调，提升备课针对性。教师可以根据生成的资源，再结合自己的经验以及学生的学情进行微调，提升备课针对性。

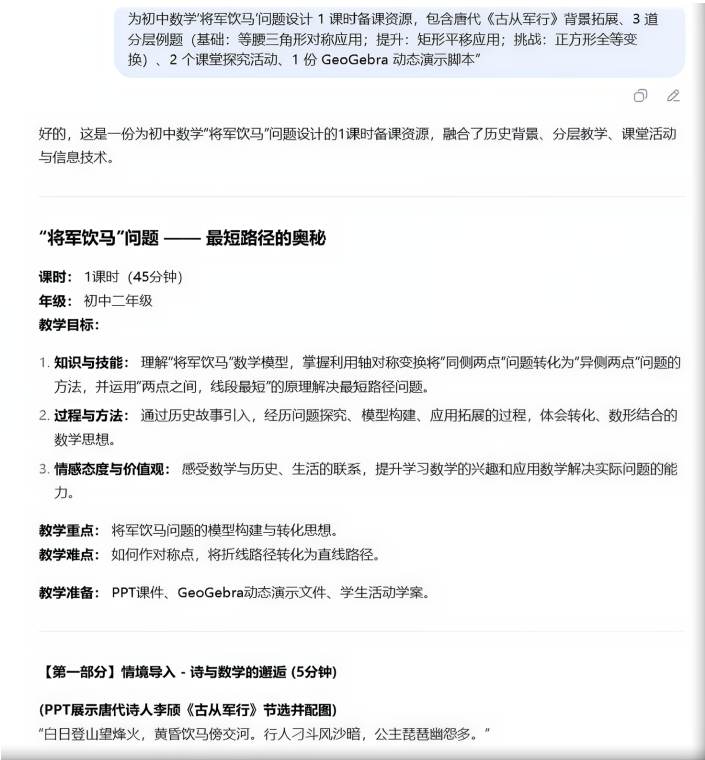


Figure 17. Schematic diagram of AI-generated teaching resources
图 17. 人工智能生成教学资源部分示意图

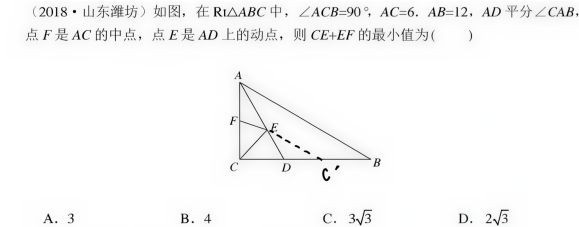
此外，人工智能技术可以根据学生的学情自动生成适合学生难度的题目，帮助教师设计教学内容，调整备课资源。这一智能化资源生成机制不仅能缩减备课时间，更能提高课堂效能。

4.2. 课后辅导与评估

传统课后作业中，教师需花费 1.5 小时批改 45 份“将军饮马”练习题，且仅能标注对/错，无法详细

分析学生错误原因，学生需等待次日才能获得反馈，错过即时纠错的最佳时机。教师可以利用人工智能技术的批改与反馈功能，对学生的作业进行评估，明确学生的薄弱环节，生成个性化学习建议，显著提升学生解题正确率[8]。

在批改作业时，教师可以将学生的课后作业发送给 deepseek，系统不仅能判断解题结果正确与否，还通过解题步骤识别，精准定位错误类型，并生成错误归因报告。例如学生在解决下图 18 题目时，误将“点 C 关于 AD 的对称点 C' 作在 BC 上”（正确应为作在 AB 上），系统通过图像识别技术，对比正确对称点位置与学生所作位置，在报告中标注错误类型、错误表现、错误原因、改进建议，如图 20 所示。



作点C关于线段AD的对称点C'
CE+EF的最小值为线段CF长
 $\because AC = \frac{1}{2}AB$ 且 $\angle ACB = 90^\circ$
 $\therefore \angle B = 30^\circ$
 $\therefore \angle CAD = 30^\circ$
 $\therefore CD = \frac{\sqrt{3}}{3}AC = 2\sqrt{3}$
 $\therefore CC' = 4\sqrt{3}$
对 $\triangle CCF'$ 用勾股定理
 $CF' = \sqrt{CF^2 + CC'^2} = \sqrt{57}$

Figure 18. Example of student homework
图 18. 学生课后作业示例图

判断这道题结果对错,如果错误请定位错误类型,生成错误归因报告并给出改进建议

分享

错误归因报告

一、结果判断

错误。

二、错误类型

角的度数推导与线段长度计算错误，对“将军饮马”模型中对称点的性质及几何图形的角度、边长关系理解与运用有误。

三、错误表现

1. 角度推导错误：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $AC = 6$ ， $AB = 12$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ，根据直角三角形中 30° 所对直角边是斜边的一半，应是 $\angle B = 30^\circ$ ，则 $\angle CAB = 60^\circ$ ，因为 AD 平分 $\angle CAB$ ，所以

Figure 19. Partial example diagram of AI evaluation of homework
图 19. 人工智能评估课后作业部分示例图

还可以使用人工智能技术进行辅助生成练习题,不仅能够根据学生的学习情况生成个性化的练习题,帮助学生巩固课堂上的重点和难点知识,还能基于学生的错误归因,自动生成阶梯式补练题库,避免学生重复做已掌握的题目,聚焦薄弱环节,从而提升课后作业的实际效果,如图 19,图 20 所示。

针对上述“对称点位置错误”的学生,生成3道补练题



为了帮助学生巩固“对称点位置选择”这一关键点,特别是理解动点所在直线为对称轴时,如何正确选择定点的对称点,我设计了以下3道补练题。这些题由易到难,紧扣学生容易出错的环节。

补练题1 (基础巩固)

如图,在直线 l 同侧有两点 A 和 B 。点 P 是直线 l 上的一个动点,则 $AP + PB$ 的最小值是_____。

提示: 需要作其中一个定点关于直线 l 的对称点。

选项:

- A. 线段 AB 的长度
- B. 点 A 到直线 l 的距离
- C. 点 B 到直线 l 的距离
- D. 点 A 的对称点 A' 到点 B 的距离

答案与解析:

- 答案: D
- 解析: 这是“将军饮马”最基础的模型。作点 A 关于直线 l 的对称点 A' , 连接 $A'B$ 与 l 交于点 P , 此时 $AP + PB = A'P + PB = A'B$, 即为最小值。因此, 最小值是点 A 的对称点 A' 到点 B 的距离。

补练题2 (应用提升)

如图, $\angle MON = 30^\circ$, 点 A 在边 OM 上, $OA = 4$ 。点 P 是边 ON 上的一个动点, 则 AP 的最小值是_____。

提示: 点 P 在 ON 上运动, 求点 A 到动点 P 的最小值, 即点 A 到直线 ON 的垂线段长度。

Figure 20. Example diagram of AI-generated supplementary exercises
图 20. 人工智能生成补练题示例图

5. 小结

本研究为信息技术与数学教学的深度融合提供了新的思路,也为“将军饮马”问题的教学实践提供了有益参考。通过 GeoGebra 动态演示,系统阐述了“将军饮马”问题的三种解题方法,突出了信息技术在几何直观教学中的优势,学生不仅掌握了这类问题的基本原理和求解方法,对该问题的理解也更加深入。生成式 AI 在备课效率提升、几何直观构建、即时诊断反馈、个性化练习推送方面具有显著优势,可有效帮助学生掌握最短路径模型,提升几何问题解决能力。尽管人工智能技术在教育中的应用仍面临一些挑战,但其潜力巨大,未来研究可进一步探索 AI 与数学教学的深度融合路径,推动教育智能化发展。

参考文献

[1] 中共中央国务院印发《教育强国建设规划纲要(2024—2035年)》[N]. 人民日报, 2025-01-20(006).
[2] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
[3] 蒋蕾, 李伟. 生成式人工智能在学科教学中的应用探索[J]. 江苏教育, 2024(46): 33-36.

-
- [4] 刘晓, 郑生. 运用几何画板进行几何直观教学——以“将军饮马”为例[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2024(12): 19-21.
- [5] 王晓隼. 中考最值问题的几种模型及其解题策略[J]. 数学学习与研究, 2024(23): 158-160.
- [6] 丁力. 初中数学几何最值问题探究——以“将军饮马”问题模型的解题策略为例[J]. 数学教学通讯, 2020(14): 79-80.
- [7] 王络安, 多布杰. 模型思想在最值问题中的应用研究[J]. 理科考试研究, 2024, 31(16): 28-31.
- [8] 曾李瑾. ChatGPT 在县域中学课堂教学改革中的实践路径[J]. 语言与文化研究, 2025, 33(2): 121-124.