Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(6), 311-317
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.146433

多维叠加隐喻在积分概念教学中的构建与应用

梅 鹏*，黄木根，郑丽璇

广东财经大学统计与数据科学学院，广东 广州

收稿日期：2026年5月6日；录用日期：2026年6月15日；发布日期：2026年6月24日

摘 要

针对积分教学中维度跃升抽象、累次积分理解困难等问题，文章以概念隐喻理论为基础，构建了以“串珠缀线－梭织成面－叠纸为书”为主干的多维叠加隐喻体系，将定积分、二重积分、三重积分的核心概念映射到层层堆叠的生活经验之上。文章阐述了该体系的设计原则、映射结构与课堂实施方案，并结合辩证唯物主义认识论与刘徽“割圆术”进行了课程思政融合。初步教学观察表明，该隐喻体系有助于化解学生的认知障碍，强化概念性理解。

关键词

积分教学，多维叠加隐喻，织布机比喻，概念性理解

Construction and Application of Multi-Dimensional Accumulation Metaphors in Integral Concept Teaching

Peng Mei*, Mugen Huang, Lixuan Zheng

School of Statistics and Data Science, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou Guangdong

Received: May 6, 2026; accepted: June 15, 2026; published: June 24, 2026

Abstract

To address the challenges of abstract dimensional leaps and iterated integrals in integral teaching, this paper constructs a multi-dimensional accumulation metaphor system centered on “beading threads - weaving fabric - stacking pages,” based on conceptual metaphor theory. This system maps the core concepts of definite, double, and triple integrals onto embodied experiences of layered accumulation. The paper elaborates on its design principles, mapping structure, and classroom implementation, while integrating dialectical materialist epistemology and Liu Hui’s “circle-cutting”

*通讯作者。

文章引用: 梅鹏, 黄木根, 郑丽璇. 多维叠加隐喻在积分概念教学中的构建与应用[J]. 创新教育研究, 2026, 14(6): 311-317. DOI: 10.12677/ces.2026.146433

method. Preliminary teaching observations indicate that this metaphor system may help reduce cognitive barriers and strengthen conceptual understanding.

Keywords

Integral Teaching, Multi-Dimensional Accumulation Metaphor, Loom Metaphor, Conceptual Understanding

1. 引言

在高等数学的教学体系中，积分概念的构筑堪称一座分水岭。当课程从定积分推演至二重积分、三重积分时，学生往往面临着两道认知鸿沟：其一，如何理解“在平面区域上的累积”与“沿数轴区间的累积”之间的异同；其二，如何在大脑中构建累次积分的投影与截面，并灵活地交换积分次序。传统的教学路径多由 Riemann 和的极限出发，经由“分割－近似－求和－取极限”的步骤给出严格定义，这在《数学分析》教材中有明确而系统地呈现[1]。这种方法捍卫了数学的严谨性，却常常使积分沦为一种冰冷的运算程序，而非一个“活”的概念意象。当学生面对 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，脑海中涌动的常常是积分符号的机械拆解，而非一片布匹在织机上一寸一寸成形的生动画面。

近年来，隐喻与类比在数学教育中的应用已引起广泛关注。Çöl (2018)对 100 名数学教师进行了微积分概念的隐喻认知调查，收集到 66 种不同的隐喻表达，其中“水”“迷宫”“魔方”等是最常见的意象，但并未出现“织布机”或“编织”相关的隐喻，亦未形成从一维到多维的统一隐喻体系[2]。Richland 等人(2007)在 *Science* 上撰文指出，数学课堂中的类比教学需要特定的认知支持策略，包括将源域与目标域同时呈现、引导学生逐步比对映射关系等，这为本文教学实施方案中“空表填写”“横织竖织对比动画”等环节的设计提供了认知科学的理论依据[3]。在国内，张学润(2019)探讨了多重积分概念的横向类比教学方法，强调定积分、重积分、曲线积分和曲面积分在本质上共享“积零为整”的统一内核[4]。然而，该研究未深入到具体隐喻的系统建构层面，没有提供一个可供教师直接使用的、从一维连贯至三维的完整比喻框架。

此外，近年来基于动态可视化的软件工具也常被用于辅助多重积分教学，例如借助动态几何软件展示积分区域、截面变化与积分限调整。与这类技术可视化方法相比，本文的隐喻体系更强调从学生已有生活经验出发，帮助其建立“微元－叠加－整体”的概念意象；二者并非相互替代，而是可以在课堂中形成互补。

本文正是在这一背景下展开，我们取日常生活中“层层堆叠、逐渐成形”的丰富经验作为源域，设计了“串珠缀线”“梭织成面”“叠纸为书”“切片吐司”等彼此呼应的系列比喻，使其精准映射积分概念中“微元累积”“累次迭代”“维度跃升”等重要特征，最终构建出一个“多维叠加隐喻”的积分概念认知框架。

2. 理论基石

2.1. 概念隐喻的认知机理与教学价值

在认知语言学中，隐喻绝非修辞学教科书中的一种表达，而是思维本身运作的基本方式。概念隐喻

理论的奠基者 Lakoff 与 Johnson 在其经典著作 *Metaphors We Live By* 中揭示，人类的概念系统在本质上是隐喻性的：我们总是通过一个熟悉的、具体的、可触摸的源域，来理解和体验另一个陌生的、抽象的目标域[5]。譬如日常话语中“时间就是金钱”这一表述，并非仅仅在做文学性的比拟，而是将管理金钱的那一整套逻辑——可以花费、可以节省、可以浪费、可以投资——投射到了时间的体验之上。Oehrtman (2002)的博士论文发现，学生在学习极限概念时会自发地使用“维度的崩塌”“物理的局限”“渐进的趋近”等五大隐喻簇来进行推理，证实了隐喻在学生微积分认知结构中不可替代的地位[6]。

积分概念的困难，恰在于它的目标域——连续无穷小量的无限累积——远远逸出了人类日常经验的范畴。我们从未用肉眼看见过一个“微元”，也从未用双手感知过“极限过程”。然而，“织布”“装订书籍”“切片面包”等手工劳动，却天然蕴含着“微小的重复单元经由持续性累积、最终构造出全新几何维度的事物”这一核心结构。一根纬线是纤细的、微不足道的，但千万根纬线并排压实，便从“线”跃升为“面”——布匹由此诞生；一页纸薄如蝉翼，但千百页纸叠压装订，便从“面”垒砌为“体”——书册因此成形。这种从低维到高维的诞生过程，与积分概念中“点积成线、线积成面、面积成体”的维度攀升逻辑，存在着深刻的认知同构。同时，我国魏晋时期数学家刘徽的“割圆术”以“割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”的朴素表述，揭示了离散叠加逼近连续整体的数学思想，为叠加隐喻提供了来自本民族文化传统的深厚支撑。

2.2. 数学教学隐喻的设计原则

隐喻之用于教学，既可能成为启迪智慧的灵光，也可能沦为遮蔽真相的迷雾。为扬其长而避其短，本文在多维叠加隐喻的设计中严格遵循四项原则，这些原则的提炼部分借鉴了 Richland 等人(2007)关于类比教学的认知支持策略[3]。

其一，结构对应原则。源域的要素与关系必须系统地、逐项地映射目标域的核心概念与操作。隐喻不是“有点像”的模糊联想，而是需要逐项建立精确对应的认知映射。织布机上的经线对应积分变量 y 的坐标轴方向，纬线对应固定 y 时对 x 积分所得的截面，梭子的往复穿梭对应内层积分变量 x 在区间上的移动——每一个要素都有其无可替代的数学对应物。这一原则与 Richland 等人所强调的“同时呈现源域与目标域并进行结构比对”的认知支持策略高度契合。

其二，维度可扩展原则。单个隐喻必须能够以同一种“叠加”的理念自然地延伸至更高维度，而非每遇见一个新概念便要另起炉灶、重新寻找比喻。从定积分到三重积分，学生应当始终在同一个“编织–装订”的叙事框架中游走，感受叠加逻辑随着维度攀升而展现的递进之美，而不是在不同的比喻碎片间疲于跳跃。

其三，可破性原则。隐喻的边界必须被清晰地标示。实际织布时，纬线之间存在着物理缝隙，而积分微元之间是紧贴到极限的紧密连续体；书页拥有真实的厚度，而数学中的截面切片厚度为严格的零。这些差异绝非隐喻的缺陷，恰恰相反，它们构成了教学中的宝贵资源——教师应当在恰当的时机引导学生有意识地“破喻”，比较源域与目标域的差异，由此将直观意象升华为严谨概念的弹性理解。

其四，文化嵌入原则。隐喻的选材应当择取学生熟悉的、具有文化亲和力的日常生活经验，而非引进另一套同样陌生的专业术语。织布、装订、切面包——这些活动因其植根于人类普遍的具身经验而具有跨文化的可理解性，同时又能自然衔接到刘徽“割圆术”所蕴含的无穷累积思想，为课程思政的融入预留了天然接口。

3. 多维叠加隐喻体系的建构

循着“点 → 线 → 面 → 体”的维度递升脉络，我们为每一种积分操作匹配一幅鲜明的生活图像，

并将它们串联进统一的“编织－装订”叙事链条。整个体系的映射关系如表 1 所示。

Table 1. Multidimensional overlay metaphorical mapping of integral concept
表 1. 积分概念的多维叠加隐喻映射

积分类型	目标域(数学操作)	源域(生活类比)
定积分分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$	将无数矩形微元沿 X 轴相加形成面积	**串珠缀线：**珠子沿中轴紧密排列成项链
二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$	先沿 X 积得截面曲线，再沿 Y 累积成体积	**织布成锦：**梭子带纬线穿梭，层层叠加成布匹
三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V$	用截面法得面状微元，再沿 Z 轴累加	**叠纸成书/切片吐司：**书页叠成册，面包片累成条

3.1. 一维奠基：“串珠缀线”与定积分

定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是学生进入积分殿堂的第一道门，其几何意义是曲边梯形的面积，物理意义可以是变密度细杆的总质量。教材中通常以 Riemann 和的极限给出其严格定义，即 $\lim_{\lambda\to 0}\sum f(\xi_i)\Delta x_i$ 。

我们在此引入“串珠缀线”之喻：想象一串项链，每一颗珠子代表一个微小的质量单元 $f(x)\mathrm{d}x$ ，将这一颗颗珠子一个挨一个、紧密地排列成行，全部珠子的总质量便是整串项链的重量。这个比喻虽简单，却直击定积分概念的两个要害：其一，“微元求和”是积分不可化约的核心动作，积分不是神秘的反导数魔术，而是一种精细的累积工艺；其二，“把无数微小部分凝结为一个整体”这一意象，为学生即将面对的高维积分埋下了伏笔——如果我们将“串珠”的每一颗珠子想象得细到极致，它本身就趋近于一条线，而许多条这样的线并排紧贴，便水到渠成地引向二重积分的“织布”意象。

3.2. 二维中心：“织布成锦”与二重积分

二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 在教材中通常讲解为曲顶柱体的体积。在化为累次积分时，其表达形式为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ 。内层积分对于每一个固定的 y 沿 X 方向累加，得到“横截面积函数” $A(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ ；外层积分则将这些无穷无尽的截面在 Y 方向逐条并排、累积，最终堆出一个完整的立体。

这一过程与手工织布的工序可谓天作之合。表 2 给出了“织布机”隐喻从源域到目标域的完整映射结构。

Table 2. Mapping structure of the metaphor of “weaving machine”
表 2. “织布机”隐喻的映射结构

源域(织布机)	目标域(二重积分)
经线(纵向绷紧的线)	积分变量 y 的坐标轴方向
纬线(横向穿行的线)	固定 y 时对 x 积分的单次结果 $A(y)$
梭子带动纬线在经线间往复穿梭	内层积分变量 x 在区间 $[a,b]$ 上的连续移动
纬线逐条叠加并压实	外层积分 $\int_c^d A(y)\mathrm{d}y$ 对 y 的累积
布匹的幅面	积分区域 D
布匹的花纹、厚薄与质地	二元函数 $f(x,y)$ 赋予曲顶的高度变化与密度分布

这一意象的直观力量至少体现在三个方面。第一，它使累次积分的嵌套结构第一次变得可视——不是抽象地“先对 x 积分再对 y 积分”，而是“先织出一根完整的纬线，再逐行添加纬线，直到铺满整块布幅”。第二，积分次序的可交换性获得了一种近乎触觉化的解释：既可以横向一根一根地织纬线(先 x 后 y)，也可以纵向一排一排地织经线(先 y 后 x)，二者指向同一块布匹。第三，这种“编织感”将积分从一种静态的、被给定的公式，转化为一种动态的、由学生主体亲手构造的生成过程。

3.3. 三维收束：“叠纸成书”与“切片吐司”

三重积分 $\iiint_{\Omega} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}V$ 的截面法，通常写作 $\iiint_{\Omega} f\,\mathrm{d}V=\int_a^b\left(\iint_{D_z} f\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$。内层的二重积分扫出一个平面区域 D_z 上的累积总量，外层再沿 Z 轴将这些“面状累加结果”逐层叠压。这一“面堆积成体”的维度递升，可以借由两个极具画面感的比喻来锚定。

比喻一：一页页纸叠成书本。每一页纸代表垂直于 Z 轴的截面 D_z 上的积分结果——如果被积函数是密度，则该页纸的重量即是这一薄片的质量。无穷无尽的“书页”沿厚度方向紧密叠压、装订成册，便构成一本完整的书。若书中每页所印的墨量浓淡不一，全书的总墨量便是每页墨量的总和——这正是三重积分以密度函数为被积函数时的物理意义。

比喻二：切片吐司还原为整个面包。一整条吐司面包由许多面积极小的薄片构成，每片面包的面积乘以无限小的厚度 $\mathrm{d}z$，即是体积微元 $\mathrm{d}V$，逐片相加便是整条面包的体积。当被积函数不恒为 1 时，可想象每片面包中所含的葡萄干数量各不相同，从而赋予“被积函数”以鲜活的密度含义。

两个比喻从不同角度揭示了同一种思维方式：先沿某一方向将立体“切”成无穷多薄片，求出每一片上的累积量，再将所有薄片纵向累加。“叠纸成书”和“切片吐司”共同暗示了累积可以跨越维度——既可将二维面微元堆成三维体，也可以在四维及以上空间继续此类推，尽管高维空间本身不再可被视觉直观，但“不断叠加”这一算法逻辑却一脉相承。

3.4. 统一叙事：“编织—装订”隐喻群落

将上述比喻串联起来，形成一个完整的叙事：我们先串起一粒粒珠子，得到一根项链之线；将成千上万根线置于织布机上，一针一纬织成一匹锦缎；最后，将许多匹锦缎或一页页大幅纸张叠压装订，成为一本厚重如山的大书。这个叙事虽非数学证明，但它赋予学生的，是一把可以贯穿所有积分概念的认知钥匙。多重积分教学的难点之一恰在于不同积分概念之间的割裂感，而本文构建的统一叙事，正是对这一教学难点的一次系统性回应。

4. 教学实施方案设计

借鉴 Richland 等人提出的类比教学认知支持策略[3]，本文设计的实施方案分为四个环环相扣的阶段。

第一阶段：经验激活与概念萌芽。在正式进入积分概念之前，播放传统织布机梭子穿行的特写、印刷厂纸张叠压装订的流水线等短视频片段。随后抛出开放性问题：“这些影像中的工作有什么共同之处？”引导学生自主提炼出“微小的部分被反复堆叠，最终形成一件全新的事物”这一核心直觉，以此作为后续所有积分概念的定性前奏。

第二阶段：隐喻映射与概念建构。此阶段以二重积分为重心展开。教师先以“织布机”隐喻讲解固定 y 对 x 积分所得的“纬线”，并配合动态课件进行同步演示：一个半透明的曲顶柱体悬浮于屏幕中央，随着滑动条缓缓拖动，高亮显示出一条又一条彩色截面曲线；当滑动条连续移动，无数截面快速掠过，肉眼可见地“织满”了整个体积。

随后，将学生分为若干小组，每组发一张表 2 的空表(仅保留左侧“源域”列和右侧空白栏)，要求他们根据刚才的演示和讲解，自行填写源域与目标域之间的映射关系，并用“织布”的语言来解释矩形区

域与 II 型区域下积分限的确定规则。这一“空表填写”活动直接借鉴了 Richland 等人验证过的“逐步比对”策略——先呈现源域结构，再引导学生自行推导出目标域的对应结构。

紧接着，引入积分次序交换，播放“横织”与“竖织”两种编织方向的动画，使 Fubini 定理的直观基础在观看中悄然扎根。自然过渡至三重积分时，教师可拿出实物道具——一本厚书或一条吐司面包，当场“切一片，看面积，想象累积”，并展示球体、圆锥体的横截面切片动画。

在具体实施中，教师可将“织布”“叠纸”等隐喻与 GeoGebra 等动态可视化工具配合使用：先用隐喻帮助学生理解截面累积的总体图像，再用软件动态呈现积分区域、截面移动和积分次序交换，从而避免学生只停留在生活想象层面。

第三阶段：数学抽象与批判省思。隐喻是桥梁，而非终点。在完成隐喻建构之后，必须果断地导入极限语言：将“无限薄的纬线”“无限薄的书页”精确化为 $\Delta x \to 0$、$\Delta y \to 0$、$\Delta z \to 0$ 的极限记法，并郑重强调——只有取极限，近似的堆叠才能真正跃迁为精确的积分。

此后，启动批判性反思环节。教师可提出一系列“破喻”问题，如：“真实织布时线迹之间存在空隙，而积分微元之间是有空隙的吗？”“书页拥有真实的物理厚度，而数学截面的厚度是多少？”通过这些关键提问，引导学生识别隐喻的有限边界，将直观意象升华为严谨概念的弹性理解。

第四阶段：延伸与迁移。将“编织–装订”的叙事延伸至曲线积分和曲面积分：曲线积分可以想象为“沿蜿蜒丝线串珠”，曲面积分则可以想象为“在光滑布料上刺绣鳞片”。至此，学生将看到，全部积分概念不过是同一幅“多维叠加”织锦上的不同花纹——它们共享着同一个灵魂。

课程思政的融入。上述隐喻体系与思政教育存在天然的融合点。在讲解“量变到质变”的辩证唯物主义规律时，可以直指“织布”过程中纬线数量增加到布满整个幅面的那一跃迁——“布匹”这一新质的诞生，正是量变积累到一定程度的必然结果。同时，引入我国魏晋时期数学家刘徽的“割圆术”：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣”[7]。这恰恰是以离散的正多边形叠加趋近连续圆周的积分思想的先声。将这一数学史素材嵌入教学，既赋予“无限叠加”以本民族文化的历史纵深，也有助于增强学生的科学精神与文化自信。在教学处理上，刘徽“割圆术”不宜作为孤立的文化点缀，而应自然嵌入“分割–逼近–极限”的数学链条之中，使学生在理解积分思想的同时体会中国古代数学中朴素而深刻的极限观念。

5. 教学观察、局限性与后续研究

经过两轮融入上述隐喻体系的教学实践，笔者通过课堂观察、即时提问与课后概念图收集等方式，对学生的学习效果进行了质性评估。在课堂上，不少学生被要求解释二重积分的计算步骤时，会使用“先织一条纬线”“再压成布”这样的比喻，并以手势比划积木般的堆积动作。在涉及积分次序交换的随堂提问中，相比往届学生普遍依赖口诀“画箭头、定限”的机械操作，此届学生在面对三角形、圆形等较复杂的积分区域时，能够脱离口诀说出“横着织还是竖着织”的理由，正确率有明显的主观感受性提升。

为进一步提高研究结论的可靠性，我们可设计小规模准实验研究：设置使用隐喻教学法的实验组和采用传统讲授法的对照组，在教学前后分别进行积分概念理解、计算迁移能力与学习态度测查，并辅以结构化课堂观察和深度访谈，以获得更全面的教学证据。

与此同时，我们也观察到一些需要审慎对待的问题。少数偏好纯形式运算的学生反映“比喻太多反而让人分心”，他们更希望直接操练计算技巧。这提示教师应当将隐喻教学作为弹性资源而非强制路径——比喻视频、图像可作为课前预习或课后复习的非强制辅助材料，在课堂讲授中适度控制比喻所占的篇幅和时间比例。此外，对于四维及以上空间的积分，尽管多维叠加隐喻能够清晰地指明算法类推的方向，但若过度具体化则容易引发“四维布匹”式的荒谬想象，教师在此处需要谨慎地提示隐喻的边界。

需要强调的是，多维叠加隐喻并不适用于所有教学情境。对于极坐标变换、复杂积分区域划分、曲线边界下的积分限确定等问题，织布或叠纸意象只能提供初始直观，不能代替严格的坐标分析和区域分解。教师应在“破喻”环节明确指出：隐喻的最后一公里是帮助学生跨越到符号化、形式化和可计算的数学模型，而不是停留在形象化理解本身。

6. 结语

本文提出的多维叠加隐喻体系，尝试将生活世界中“层层堆叠、逐渐成形”的经验，系统地、有机地投射到积分概念的教学中。透过“串珠”“织布”“叠纸”“切片”等具体情境的接力，学生在心中铺就了一条从一维连续累积通往多重积分的认知阶梯。这一设计植根于真实课堂的逻辑张力与直觉涌动之间，回应了“如何帮助学生理解”这一教改的核心关切。如果说极限是数学分析的基石，那么叠加就是积分概念的灵魂，而一个好的隐喻，恰是引领学生触碰那灵魂温度的一座桥梁。期待未来能有更多有效的教学隐喻被发掘与共享，使数学的课堂在严谨之外，更添一抹直观与温度。未来研究可在更大样本和更长周期的教学实践中，进一步检验该隐喻体系对学生概念理解、迁移能力和数学学习兴趣的持续影响。

参考文献

[1] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[2] Çöl, A. (2018) Metaphorical Perceptions of Prospective Elementary Mathematics Teachers towards the Concept of Calculus. *International Education & Research Journal*, **4**, Article 1493.

[3] Richland, L.E., Zur, O. and Holyoak, K.J. (2007) Cognitive Supports for Analogies in the Mathematics Classroom. *Science*, **316**, 1128-1129. https://doi.org/10.1126/science.1142103

[4] 张学润. 积分概念的横向教学研究[J]. 创新创业理论研究与实践, 2019, 2(24): 19-20.

[5] Lakoff, G. and Johnson, M. (1980) Metaphors We Live by. University of Chicago Press.

[6] Oehrtman, M. (2002) Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Student Metaphors for Limit Concepts: An Instrumentalist Investigation into Calculus Students' Spontaneous Reasoning. University of Texas at Austin.

[7] 钱宝琮. 中国数学史话[M]. 上海: 科学技术出版社, 2022.