Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(6), 606-617
Published Online June 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.146466

基于差异分析的方程构建策略研究

刘立文[1]，覃孟龙[2]

[1]湘西土家族苗族自治州溶江中学，湖南 吉首
[2]湘西土家族苗族自治州民族中学，湖南 吉首

收稿日期：2026年4月13日；录用日期：2026年6月19日；发布日期：2026年6月30日

摘 要

高中数学有关解三角形、立体几何及圆锥曲线的问题，通常具有条件隐含且逻辑路径非显性的特征，解答者面临如何从条件中抽离出代数关系，进而构建有效目标方程的逻辑困境。如果方程构建策略不科学，解答过程便会陷入低效的经验主义试错，缺乏逻辑导向的思维困境。针对这一困境，文章提出了一种“基于差异、建立等式”的方程构建策略。该策略突破了依赖大量重复训练以形成“解题直觉”的传统，致力于建立一套具有可操作性与可迁移性的认知模型。核心逻辑在于确定“桥梁”对象(即长度、角度、面积、体积)，用不同路径求解同一个“桥梁”对象，最终基于同一“桥梁”对象的不变性建立等量关系。文章分别从解三角形、立体几何、圆锥曲线各选取一个典型例题，对所提出的基于差异分析的方程构建策略进行阐释。基于差异分析的方程构建策略可高效构建目标方程，规避无效试探过程，同时能引导学习者快速挖掘问题的多种求解路径，并实现最优解法的筛选。基于差异分析的方程构建策略有效突破了传统解题中的思维局限，将零散的解题经验提炼、升华为结构化的理论方法。基于差异分析的方程构建策略不仅对上述板块的目标方程构建具有重要价值，其思想还可迁移至函数、数列等其他知识板块，对培养学习者的数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养具有重要且深远的意义。

关键词

桥梁，长度，角度，面积，体积

Research on Equation Construction Strategies Based on Differential Analysis

Liwen Liu[1], Menglong Qin[2]

[1]Xiangxi Tujia and Miao Autonomous Prefecture Rongjiang Middle School, Jishou Hunan
[2]Xiangxi Tujia and Miao Autonomous Prefecture Ethnic Middle School, Jishou Hunan

Received: April 13, 2026; accepted: June 19, 2026; published: June 30, 2026

文章引用: 刘立文, 覃孟龙. 基于差异分析的方程构建策略研究[J]. 创新教育研究, 2026, 14(6): 606-617.
DOI: 10.12677/ces.2026.146466

Abstract

Problems related to triangle solving, solid geometry, and conic sections in senior high school mathematics are usually characterized by implicit conditions and non-explicit logical paths. Solvers are confronted with the logical dilemma of how to extract algebraic relations from the conditions and then construct effective target equations. If the strategy of equation construction is unscientific, the solving process will fall into the inefficient empiricism of trial and error, lacking a logic-oriented thinking framework. To address this dilemma, this paper proposes an equation construction strategy of "identifying differences and establishing equalities". Breaking away from the traditional approach that relies on extensive repetitive training to form "problem-solving intuition", this strategy aims to establish an operational and transferable cognitive model. The core logic lies in identifying the "bridge" objects (*i.e.*, length, angle, area, volume), calculating the same "bridge" object through different paths, and finally establishing an equivalence relation based on the invariance of this "bridge" object. In this paper, one typical example is selected respectively from triangle solving, solid geometry and conic sections to illustrate the proposed equation construction strategy based on difference analysis. This strategy can efficiently construct target equations, avoid the process of invalid trial and error, and at the same time guide learners to quickly explore multiple solution paths for a problem and select the optimal solution. The equation construction strategy based on difference analysis effectively breaks through the thinking limitations in traditional problem-solving, and refines and elevates scattered problem-solving experiences into a structured theoretical method. This strategy is not only of great value for constructing target equations in the above-mentioned modules, but also its ideas can be transferred to other knowledge modules such as functions and sequences. It has important and far-reaching significance for cultivating learners' core mathematical competencies, including mathematical abstraction, logical reasoning, and mathematical modeling.

Keywords

Bridge Object, Length, Angle, Area, Volume

1. 引言

解三角形、立体几何及圆锥曲线是高中数学的核心知识。在解决有关解三角形、立体几何及圆锥曲线需自主挖掘隐含条件以构建方程的问题时，往往面临逻辑路径不明确的困境，难以依据已知条件建立有效的代数关系，解题过程多依赖于经验主义的盲目试探，试图形成一种机械性的“解题直觉”[1]。然而，即便构建出方程，也常因缺乏逻辑导向，化简后得到“$0=0$”这类恒等式，无法提供求解所需的有效信息。

国内外学者对数学解题策略与问题解决模型已开展大量研究。波利亚在《怎样解题》中提出理解题目、拟定方案、执行方案、回顾反思的四阶段模型，强调启发式思考在解题中的核心作用[2]；国内学者罗增儒构建数学解题学理论体系，提出解题分析、解题反思、解题迁移的完整框架[3]；李建才指出函数与方程思想是高中数学解题核心，需强化等量关系构建的教学渗透[4]；张奠宙、宋乃庆强调数学核心素养导向下，解题教学应从刷题转向思维方法提炼[5]。

现有解题研究多聚焦通用思维流程，针对几何板块方程构建的专项、可操作策略较少；部分研究提及“桥梁法”，但仅将其作为零散解题技巧，未形成差异分析－桥梁选定－等式建立的完整理论体系，缺乏对桥梁选择原则、适用边界、实证效果的系统论证[6]。

本文立足于解三角形、立体几何及圆锥曲线问题的共性思维结构，提出基于差异分析的方程构建策略，该策略以长度、角度、面积、体积等为桥梁，通过“基于差异、建立等式”的逻辑路径，实现目标方程的高效构建。基于差异分析的方程构建策略不仅有助于突破思维瓶颈，更提供了一套可量化、可复制的方法体系，对于解决此类数学问题具有重要的价值，构建策略所蕴含的思想具有良好的迁移性，可推广至其他数学知识板块。

2. 核心概念阐释

为系统阐释基于差异分析的方程构建策略理论内核与应用逻辑，先对本文构建的核心内容进行前置说明。

2.1. 桥梁

有关解三角形、立体几何、圆锥曲线需要自主挖掘隐含条件构建方程的问题，经常以长度、角度、面积、体积等这些载体把不同的方法间建立联系，我们称长度、角度、面积、体积等这些载体为桥梁。

2.2. 基于差异、建立等式

设桥梁为 T，可通过两种不同的方法求 T，并分别得到结果 A 与 B，由于 A 和 B 均为同一目标对象 T 的解，必有 $A=B$，此过程可形式化为：若 $A=T$ 且 $B=T$，则 $A=B$。我们将这种通过分析同一目标对象在不同路径下的解，其结果相等来构建方程的方法，称为基于差异、建立等式。

3. 问题探究，深化概念

基于差异分析的方程构建策略，下文分别从解三角形、立体几何、圆锥曲线各选取一个典型例题，依托“基于差异、建立等式”方法展开具体剖析。

3.1. 解三角形中的应用

如图 1，$\angle CAD=15^{\circ}$，$\angle CBD=45^{\circ}$，$AB=100$，$CD=50$，$\angle AEC=90^{\circ}$ 求 $\cos\angle DAE$

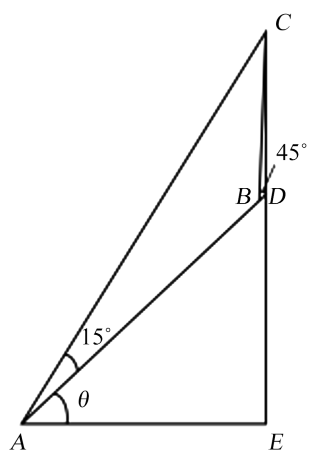

Figure 1. Right triangle diagram
图 1. 直角三角形图

方法一(桥梁选取对象为长度，求线段 BC)

令 $\angle DAE=\theta$，则 $\angle CDB=\theta+90^{\circ}$。

在 ΔBCD 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BC}{\sin\angle CDB}$，

$$\therefore BC=\frac{CD\sin\angle CDB}{\sin\angle CBD}=\frac{50\sin\left(\theta+90^{\circ}\right)}{\sin 45^{\circ}} \tag{1}$$

在 ΔABC 中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，

$$\therefore BC=\frac{AB\sin\angle CAB}{\sin\angle ACB}=\frac{100\sin 15^{\circ}}{\sin 30^{\circ}} \tag{2}$$

在两个不同的三角形中分别求出 BC，两种方法得到的结果相等，

基于差异、建立等式，由(1) (2)得 $\dfrac{50\sin\left(\theta+90^{\circ}\right)}{\sin 45^{\circ}}=\dfrac{100\sin 15^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}$，

$$\sin\left(\theta+90^{\circ}\right)=\frac{100\sin 45^{\circ}\sin 15^{\circ}}{50\sin 30^{\circ}}=\sqrt{3}-1$$

$$\therefore \cos\theta=\sqrt{3}-1$$

方法二(桥梁选取对象为长度，求线段 AC)

令 $\angle DAE=\theta$，则 $\angle CDA=\theta+90^{\circ}$。

在 ΔACD 中，$\dfrac{AC}{\sin\angle CDA}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$，

$$\therefore AC=\frac{CD\sin\angle CDA}{\sin\angle CAD}=\frac{50\sin\left(\theta+90^{\circ}\right)}{\sin 15^{\circ}} \tag{3}$$

在 ΔABC 中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，

$$\therefore AC=\frac{AB\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}=\frac{100\sin 135^{\circ}}{\sin 30^{\circ}} \tag{4}$$

在两个不同的三角形中分别求出 AC，两种方法得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(3) (4)得

$$\frac{50\sin\left(\theta+90^{\circ}\right)}{\sin 15^{\circ}}=\frac{100\sin 135^{\circ}}{\sin 30^{\circ}},\quad \sin\left(\theta+90^{\circ}\right)=\frac{100\sin 15^{\circ}\sin 135^{\circ}}{50\sin 30^{\circ}}=\sqrt{3}-1\quad \therefore \cos\theta=\sqrt{3}-1$$

方法三(桥梁选取对象为长度，求线段 CD)

令 $\angle DAE=\theta$，则 $\angle CDA=\theta+90^{\circ}$。

在 ΔABC 中，$\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，$\therefore BC=\dfrac{AB\sin\angle CAB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{100\sin 15^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

在 ΔBCD 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BC}{\sin\angle CDA}$，

$$\therefore CD=\frac{BC\sin\angle CBD}{\sin\angle CDA}=\frac{50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin 45^{\circ}}{\sin\left(90^{\circ}+\theta\right)} \tag{5}$$

由已知条件知

$$CD=50 \tag{6}$$

在两个不同的三角形中分别求出 CD，两种方法得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(5) (6)得

$$50=\frac{50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin 45^{\circ}}{\sin\left(90^{\circ}+\theta\right)},\quad \sin\left(\theta+90^{\circ}\right)=\frac{50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin 45^{\circ}}{50}=\sqrt{3}-1\quad \therefore \cos\theta=\sqrt{3}-1\text{。}$$

方法四(桥梁选取对象为长度，求线段 AD)

令 $\angle DAE=\theta$，则 $\angle BCD=45^{\circ}-\theta,\angle ACD=75^{\circ}-\theta$。

在 ΔABC 中，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，$\therefore AC=\dfrac{AB\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}=\dfrac{100\sin 135^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=100\sqrt{2}$，

$\therefore BC=\dfrac{AB\sin\angle CAB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{100\sin 15^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$。

在 ΔBCD 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BD}{\sin\angle BCD}$，$\therefore BD=\dfrac{CD\sin\angle BCD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{50\sin\left(45^{\circ}-\theta\right)}{\sin 45^{\circ}}$，则

$$AD=AB+BD=100+\frac{50\sin\left(45^{\circ}-\theta\right)}{\sin 45^{\circ}}\tag{7}$$

在 ΔACD 中，$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAB}$，

$$\therefore AD=\frac{CD\sin\angle ACD}{\sin\angle CAB}=\frac{50\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)}{\sin 15^{\circ}}\tag{8}$$

两种方法分别求出 AD，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(7) (8)得

$$100+\frac{50\sin\left(45^{\circ}-\theta\right)}{\sin 45^{\circ}}=\frac{50\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)}{\sin 15^{\circ}},\quad 100+50\sqrt{2}\sin\left(45^{\circ}-\theta\right)=\frac{200}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)$$

$$100+50\sqrt{2}\left(\sin 45^{\circ}\cos\theta-\cos 45^{\circ}\sin\theta\right)=\frac{200}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\left(\sin 75^{\circ}\cos\theta-\cos 75^{\circ}\sin\theta\right)$$

$$100+50\cos\theta-50\sin\theta=25\left(4+2\sqrt{3}\right)\cos\theta-50\sin\theta,\quad 4+2\cos\theta=\left(4+2\sqrt{3}\right)\cos\theta$$

$$2=\left(1+\sqrt{3}\right)\cos\theta,\quad \therefore \cos\theta=\sqrt{3}-1$$

桥梁的选取对象为长度时，载体还可以是 AE，CE，DE 等，基于差异、建立等式的思想方法和上面方法一到方法四是一致的。

方法五(桥梁选取对象为角度，求 $\angle CDA$)

令 $\angle DAE=\theta$，在 ΔABC 中，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，

$$\therefore AC=\frac{AB\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}=\frac{100\sin 135^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=100\sqrt{2}$$

$$\therefore BC=\frac{AB\sin\angle CAB}{\sin\angle ACB}=\frac{100\sin 15^{\circ}}{\sin 30^{\circ}}=50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

在 ΔBCD 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BC}{\sin\angle CDA}$，

$$\therefore \sin\angle CDA=\frac{BC\sin\angle CBD}{CD}=\frac{50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin 45^{\circ}}{50}\tag{9}$$

$\because \angle DAC=\theta$ 则 $\angle CDA=180^{\circ}-\angle ADE=180^{\circ}-\left(90^{\circ}-\theta\right)=90^{\circ}+\theta$，

DOI: 10.12677/ces.2026.146466

$$\therefore \sin\angle CDA=\sin\left(90^\circ+\theta\right) \tag{10}$$

两种方法分别求出 $\sin\angle CDA$，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(9) (10)得

$$\sin\left(90^\circ+\theta\right)=\frac{50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin 45^\circ}{50}\text{，}\quad\therefore \cos\theta=\sqrt{3}-1$$

桥梁的选取对象为角度时，载体还可以是 $\angle ACE,\angle CAE$ 等，基于差异、建立等式的思想方法和上面方法五是一致的。

方法六(桥梁选取对象为面积，求 ΔACD 的面积)

令 $\angle DAE=\theta$，在 ΔABC 中，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}=\dfrac{BC}{\sin\angle CAB}$，

$$\therefore AC=\frac{AB\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}=\frac{100\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}=100\sqrt{2}$$

$$\therefore BC=\frac{AB\sin\angle CAB}{\sin\angle ACB}=\frac{100\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ}=50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right).$$

$$S_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot CA\cdot CD\sin\angle ACD=\frac{1}{2}\times 100\sqrt{2}\times 50\sin\left(75^\circ-\theta\right)=2500\sqrt{2}\sin\left(75^\circ-\theta\right) \tag{11}$$

$$\begin{aligned}S_{ACD}=S_{ACB}+S_{BCD}&=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC\cdot\sin\angle ACB+\frac{1}{2}\cdot CB\cdot CD\cdot\sin\angle BCD\\&=\frac{1}{2}\times 100\sqrt{2}\times 50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\times\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\times 50\times 50\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\times\sin\left(45^\circ-\theta\right)\\&=2500\left(\sqrt{3}-1\right)+1250\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin\left(45^\circ-\theta\right)\end{aligned} \tag{12}$$

两种方法分别求出 S_{ACD}，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(11) (12)得

$$2500\sqrt{2}\sin\left(75^\circ-\theta\right)=2500\left(\sqrt{3}-1\right)+1250\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\sin\left(45^\circ-\theta\right)$$

$$2\sin\left(75^\circ-\theta\right)=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\left(45^\circ-\theta\right)$$

$$2\left(\sin 75^\circ\cos\theta-\cos 75^\circ\sin\theta\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{2}+\sin 45^\circ\cos\theta-\cos 45^\circ\sin\theta\right)$$

$$2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos\theta-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\sin\theta\right)=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\right)$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\theta-\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\theta=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(2+\cos\theta-\sin\theta\right)$$

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\cos\theta-\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\theta=2\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)\cos\theta-\left(\sqrt{3}-1\right)\sin\theta$$

$$2\cos\theta=2\left(\sqrt{3}-1\right),\quad\therefore\cos\theta=\sqrt{3}-1$$

方法七(桥梁选取对象为面积，求 ΔACE 的面积)

令 $\angle DAE=\theta$，在 ΔABC 中，$\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{AB}{\sin\angle ACB}$，$\therefore AC=\dfrac{AB\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}=\dfrac{100\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ}=100\sqrt{2}$，

在 ΔACE 中，$CE=AC\sin\angle CAE=100\sqrt{2}\sin\left(\theta+15^\circ\right)$，$AE=AC\sin\angle ACE=100\sqrt{2}\sin\left(75^\circ-\theta\right)$

$$\begin{aligned}S_{ACE}&=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot CE=\frac{1}{2}\times 100\sqrt{2}\sin\left(75^\circ-\theta\right)\times 100\sqrt{2}\sin\left(\theta+15^\circ\right)\\&=10000\sin\left(75^\circ-\theta\right)\sin\left(\theta+15^\circ\right)\end{aligned} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
S_{ACE} &= S_{ACD}+S_{ADE}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\frac{1}{2}\cdot AE\cdot DE \\
&=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\frac{1}{2}\cdot AE\cdot\left(CE-CD\right) \\
&=\frac{1}{2}\times100\sqrt{2}\times50\times\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)+\frac{1}{2}\times100\sqrt{2}\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)\times\left[100\sqrt{2}\sin\left(15^{\circ}+\theta\right)-50\right]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

两种方法分别求出 S_{ACE}，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(13) (14)得

$$
\begin{aligned}
&10000\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)\sin\left(\theta+15^{\circ}\right) \\
&=\frac{1}{2}\times100\sqrt{2}\times50\times\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)+\frac{1}{2}\times100\sqrt{2}\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)\times\left[100\sqrt{2}\sin\left(15^{\circ}+\theta\right)-50\right]
\end{aligned}
$$

$$4\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)\sin\left(\theta+15^{\circ}\right)=\sqrt{2}\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)+\sqrt{2}\sin\left(75^{\circ}-\theta\right)\left[2\sqrt{2}\sin\left(15^{\circ}+\theta\right)-1\right]$$

$$4\sin\left(\theta+15^{\circ}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\left[2\sqrt{2}\sin\left(\theta+15^{\circ}\right)-1\right]\text{ 即 }2\sqrt{2}\sin\left(\theta+15^{\circ}\right)=1+2\sqrt{2}\sin\left(\theta+15^{\circ}\right)-1$$

$$2\sqrt{2}\sin\left(\theta+15^{\circ}\right)=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+15^{\circ}\right)$$

上式是一个没有差异的恒等式，不能求出 $\cos\theta$，此方法无效，提醒我们选取恰当桥梁的重要性。

桥梁的选取对象为面积时，载体还可以是 S_{ABC},S_{ADE} 等，基于差异、建立等式的思想方法和上面方法六到方法七是一致的。

在解三角形典型例题解答中，展现的七种解题方法(方法七化简后得到“$0=0$”这类恒等式，无法提供求解所需的有效信息)很好的诠释了“基于差异、建立等式”的方程构建策略。尽管选取的“桥梁”对象各不相同，但其核心逻辑高度统一，用不同路径求解同一个“桥梁”对象，最终基于同一“桥梁”对象的不变性建立等量关系。方法一至四选取线段长度为“桥梁”；方法五选取角度为“桥梁”；方法六和七则选取面积为“桥梁”，展示了基于差异分析的方程构建策略能快速挖掘出多种求解路径。同时，所有方法均遵循“确定桥梁 T → 通过两种不同的方法求 T → 分别得到结果 A 与 B → $A=B$”的步骤，体现了逻辑一致性。还能在上述七种方法中选定最优解法为方法三。

3.2. 立体几何中的应用

如图 2，四面体 $ABCD$ 中，$AB=BD=2$，$\angle ACB=60^{\circ}$，$AD\perp CD$，$AD=CD$，$\angle ADB=\angle BDC$，E 为 AC 的中点，点 F 在 BD 上，当 ΔAFC 的面积最小时，求 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值。

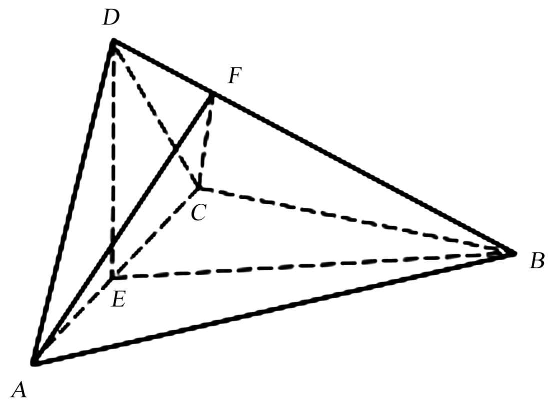

Figure 2. Tetrahedron diagram
图 2. 四面体图

解析：$\because \angle ADB=\angle BDC$，$AD=CD$，$BD=BD$，$\therefore \Delta ABD\cong\Delta CBD$ $\therefore AB=BC=2$。又$\angle ACB=60^{\circ}$，故ΔABC为正三角形，得$AC=2$。$\because AD=CD, AD\perp CD$，$\therefore AD=CD=\sqrt{2}$。$E$为$AC$的中点，得$BE=\sqrt{3}$，$DE=1$且$DE\perp AC$，$BE\perp AC$。$\angle DEB$为$D-AC-B$的二面角$\because DE^2+BE^2=BD^2$，$\therefore \angle DEB=90^{\circ}$，有$DE\perp$面$ABC$，$BE\perp$面$ADC$。

$$\because \angle ADB=\angle BDC, AD=CD, DF=DF，\therefore \Delta DAF\cong\Delta DCF$$

可得$AF=CF, EF\perp AC$。有$S_{AFC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot EF=EF$。由于$F$为$BD$上的动点，当$EF\perp BD$时$EF$最小，此时$S_{BDE}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot DE\cdot BE$，$EF=\frac{DE\cdot BE}{BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$DF=\sqrt{DE^2-EF^2}=\frac{1}{2}$，$AF=CF=\sqrt{AD^2-DF^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$。假设过点$C$作面$ABD$的垂线，垂足为$P$。令$CP=d$，$CF$与平面$ABD$所成的角为$\theta$。

方法一(桥梁选取对象为体积，求四面体$ABCD$的体积)

$$V_{C-ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABD}\cdot CP=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{2}\times d=\frac{\sqrt{7}}{6}d \tag{15}$$

$$V_{B-ACD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ACD}\cdot BE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3} \tag{16}$$

两种方法分别求出四面体$ABCD$的体积，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(15) (16)得

$$\frac{\sqrt{7}}{6}d=\frac{\sqrt{3}}{3}, d=\frac{2\sqrt{21}}{7}，\sin\theta=\frac{d}{CF}=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

方法二(桥梁选取对象为体积，求四面体$ABCD$的体积)

$$V_{C-ABD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABD}\cdot CP=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{14}}{2}\times\sqrt{2}\times d=\frac{\sqrt{7}}{6}d \tag{17}$$

$$V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot DE=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 2\times 1=\frac{\sqrt{3}}{3} \tag{18}$$

两种方法分别求出四面体$ABCD$的体积，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(17) (18)得

$$\frac{\sqrt{7}}{6}d=\frac{\sqrt{3}}{3}, d=\frac{2\sqrt{21}}{7}，\sin\theta=\frac{d}{CF}=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

方法三(桥梁选取对象为面积，求ΔACF的面积)

由于$AC\perp DE, AC\perp BE, DE\cap BE=E$，故有$AC\perp$面$BDE$。$\therefore BD\perp AC$，又$\because EF\perp BD$，$EF\cap AC=E$，$\therefore BD\perp$面$ACF$。过$C$作$AF$的高$CK$，有$BD\perp CK$，$\because CK\perp AF$，$AF\cap BD=F$，$CK\perp$面$ABD$。即$CK$为点$C$到面$ABD$的距离$d$。

$$S_{ACF}=\frac{1}{2}\cdot CK\cdot AF=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\times d=\frac{\sqrt{7}}{4}d \tag{19}$$

$$S_{ACF}=\frac{1}{2}\cdot EF\cdot AC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{20}$$

两种方法分别求出ΔACF的面积，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(19) (20)得

$$\frac{\sqrt{7}}{4}d=\frac{\sqrt{3}}{2}, d=\frac{2\sqrt{21}}{7}，\sin\theta=\frac{d}{CF}=\frac{4\sqrt{3}}{7}.$$

桥梁的选取还可以是长度等，基于差异、建立等式的思想方法和上面方法一到方法三是一致的。

在立体几何典型例题解答中，展现的三种解题方法很好的诠释了“基于差异、建立等式”的方程构建策略。尽管选取的“桥梁”对象各不相同，但其核心逻辑高度统一，用不同路径求解同一个“桥梁”对象，最终基于同一“桥梁”对象的不变性建立等量关系。方法一至二选取体积为“桥梁”；方法三选取面积为“桥梁”，展示了基于差异分析的方程构建策略能快速挖掘出多种求解路径。同时，所有方法均遵循“确定桥梁 $T\to$ 通过两种不同的方法求 $T\to$ 分别得到结果 A 与 $B\to A=B$”的步骤，体现了逻辑一致性。还能在上述三种方法中选定最优解法为方法三。

3.3. 圆锥曲线中的应用

已知 F_1,F_2 为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左右焦点，以 F_1F_2 为直径的圆与双曲线右支的一个交点为 A，AF_1 与双曲线相交于点 B，且 $\left|AB\right|=3\left|BF_1\right|$，求该双曲线的离心率。

解析：令 $BF_1=x$，由 $AF_1=AB+BF_1=4x$，$AF_1-AF_2=2a$，得 $AF_2=4x-2a$。

由于 $BF_2-BF_1=2a$，得 $BF_2=x+2a$。因为 F_1F_2 为直径的圆与双曲线右支的一个交点为 A，所以有 $\angle F_1AF_2=90^\circ$。

方法一(桥梁选取对象为角度，求 $\angle F_1AF_2$)

在 ΔABF_2 中，$\cos\angle BAF_2=\dfrac{AB^2+AF_2^2-BF_2^2}{2AB\cdot AF_2}=\cos 90^\circ=0$，即 $\left(3x\right)^2+\left(4x-2a\right)^2=\left(x+2a\right)^2$，$x=0$ (舍)或 $x=\dfrac{5a}{6}$，故

$$x=\frac{5a}{6} \tag{21}$$

在 ΔAF_1F_2 中，$\cos\angle BAF_2=\dfrac{AF_1^2+AF_2^2-F_1F_2^2}{2AF_1\cdot AF_2}=\cos 90^\circ=0$，即

$$\left(4x\right)^2+\left(4x-2a\right)^2=\left(2c\right)^2 \tag{22}$$

通过基于差异、建立等式，由(21) (22)得

$$\left(\frac{10a}{3}\right)^2+\left(\frac{10a}{3}-2a\right)^2=\left(2c\right)^2,\quad e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{29}}{3}.$$

方法二(桥梁选取对象为角度，求 $\angle F_1$)

在 ΔAF_1F_2 中，

$$\cos\angle AF_1F_2=\frac{AF_1^2+F_1F_2^2-AF_2^2}{2AF_1\cdot F_1F_2}=\frac{\left(4x\right)^2+\left(2c\right)^2-\left(4x-2a\right)^2}{2\times 4x\times 2c} \tag{23}$$

在 ΔBF_1F_2 中，

$$\cos\angle BF_1F_2=\frac{BF_1^2+F_1F_2^2-BF_2^2}{2BF_1\cdot F_1F_2}=\frac{x^2+\left(2c\right)^2-\left(x+2a\right)^2}{2\times x\times 2c} \tag{24}$$

两种方法分别求出 $\cos\angle F_1$，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(23) (24)得

$$\frac{\left(4x\right)^2+\left(2c\right)^2-\left(4x-2a\right)^2}{2\times 4x\times 2c}=\frac{x^2+\left(2c\right)^2-\left(x+2a\right)^2}{2\times x\times 2c},\ \text{有}\ x=\frac{5a}{6}$$

由于 $\angle F_1AF_2=90^\circ$ ，可得 $AF_1^2+AF_2^2=F_1F_2^2$ ，即 $\left(\frac{10a}{3}\right)^2+\left(\frac{4a}{3}\right)^2=(2c)^2$ ， $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{29}}{3}$ 。

方法三(桥梁选取对象为角度，求 $\angle ABF_2$)

在 ΔABF_2 中，

$$\cos\angle ABF_2=\frac{AB^2+BF_2^2-AF_2^2}{2AB\cdot BF_2}=\frac{(3x)^2+(x+2a)^2-(4x-2a)^2}{2\times 3x\times(x+2a)} \tag{25}$$

在 ΔBF_1F_2 中， $\cos\angle F_1BF_2=\frac{BF_1^2+BF_2^2-F_1F_2^2}{2BF_1\cdot BF_2}=\frac{x^2+(x+2a)^2-(2c)^2}{2\times x\times(x+2a)}$ ，而 $\angle ABF_2+\angle F_1BF_2=\pi$

$$\cos\angle ABF_2=\cos(\pi-\angle F_1BF_2)=-\cos\angle F_1BF_2=-\frac{x^2+(x+2a)^2-(2c)^2}{2\times x\times(x+2a)} \tag{26}$$

两种方法分别求出 $\cos\angle ABF_2$ ，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(25) (26)得

$$\frac{(3x)^2+(x+2a)^2-(4x-2a)^2}{2\times 3x\times(x+2a)}=-\frac{x^2+(x+2a)^2-(2c)^2}{2\times x\times(x+2a)}\text{，有 } x=\frac{5a}{6}$$

由于 $\angle F_1AF_2=90^\circ$ ，可得 $AF_1^2+AF_2^2=F_1F_2^2$ ，即 $\left(\frac{10a}{3}\right)^2+\left(\frac{4a}{3}\right)^2=(2c)^2$ ， $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{29}}{3}$ 。

方法四(桥梁选取对象为长度，求线段 BF_2)

在 ΔABF_2 中，

$$BF_2=\sqrt{AB^2+AF_2^2}=\sqrt{(3x)^2+(4x-2a)^2} \tag{27}$$

由双曲线的定义得

$$BF_2=x+2a \tag{28}$$

两种方法分别求出 BF_2 的长度，得到的结果相等，基于差异、建立等式，由(27) (28)得 $\sqrt{(3x)^2+(4x-2a)^2}=x+2a$ ，有 $x=\frac{5a}{6}$ 由于 $\angle F_1AF_2=90^\circ$ ，可得 $AF_1^2+AF_2^2=F_1F_2^2$ ，即 $\left(\frac{10a}{3}\right)^2+\left(\frac{4a}{3}\right)^2=(2c)^2$ ， $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{29}}{3}$ 。

桥梁的选取还可以是上面方法中未涉及的长度、角度、面积等，基于差异、建立等式的思想方法和上面方法一到方法四是一致的。

在圆锥曲线典型例题解答中，展现的四种解题方法很好的诠释了“基于差异、建立等式”的方程构建策略。尽管选取的“桥梁”对象各不相同，但其核心逻辑高度统一，用不同路径求解同一个“桥梁”对象，最终基于同一“桥梁”对象的不变性建立等量关系。方法一至三选取夹角为“桥梁”；方法四选取长度为“桥梁”，展示了基于差异分析的方程构建策略能快速挖掘出多种求解路径。同时，所有方法均遵循“确定桥梁 $T\rightarrow$ 通过两种不同的方法求 $T\rightarrow$ 分别得到结果 A 与 $B\rightarrow A=B$”的步骤，体现了逻辑一致性。还能在上述四种方法中选定最优解法为方法四。

4. 解法比较与桥梁选择原则

4.1. 不同桥梁解法对比

各类解法在不同维度对照表如表 1 所示。

Table 1. Comparison table of various solutions in different dimensions
表 1. 各类解法在不同维度对照表

知识板块	桥梁类型	计算量	思维难度	适用场景
解三角形	长度	中等	低	边长条件充分
解三角形	角度	较小	中	角度条件充分
解三角形	面积	较大	高	边角混合条件
立体几何	体积	中等	中	多点共面、距离求解
立体几何	面积	较小	低	点面距离、线面角
立体几何	长度	中等	中	长度、夹角
立体几何	角度	中等	中	长度、夹角
圆锥曲线	长度	小	低	定义类、焦点相关
圆锥曲线	角度	小	低	定义类、焦点相关
圆锥曲线	面积	中等	中	边角混合条件

4.2. 桥梁选择一般性原则

优先选择计算最简桥梁：圆锥曲线优先夹角或长度、立体几何优先面积或体积、解三角形优先长度或角度；

优先选择与已知条件直接关联的桥梁：减少中间转化步骤；

规避恒等式桥梁：选择两条独立路径，避免推导后无差异恒成立；

优先选择可迁移的通用桥梁：长度、角度适用于多数几何问题。

5. 策略适用范围与局限性

5.1. 适用范围

几何板块：解三角形、立体几何、圆锥曲线中需自主构建方程的问题；

代数板块：可迁移至函数零点、数列通项、不等式证明等等量或不等关系构建；

适用对象：高一至高三学生，尤其适合中等生突破解题瓶颈。

5.2. 局限性

不适用直接套用公式的基础题(如直接用正弦定理、双曲线定义)；

对几何直观弱的学生，需先强化桥梁对象识别训练；

复杂多变量问题中，需结合换元法简化桥梁表示。

5.3. 常见困难与应对方法

困难 1：无法识别桥梁对象。应对策略：按长度 → 角度 → 面积 → 体积顺序逐一尝试；

困难 2：构建恒等式。应对策略：检查两条路径是否独立，避免条件重复使用；

困难 3：计算复杂。应对策略：优先选择低计算量桥梁，简化运算。

6. 教学实证研究

6.1. 实验设计

选取高二年级两个平行班，实验班级(45 人)采用差异分析策略教学，对照班级(45 人)采用传统刷题

教学，实验周期 4 周，前后测内容为解三角形、立体几何、圆锥曲线方程构建题。

6.2. 评价指标

解题正确率、平均解题时间、方程构建有效率、思维障碍发生率。

6.3. 试验结果

试验结果数据如表 2 所示。

Table 2. Empirical result data
表 2. 试验结果数据

指标	实验班级	对照班级	提升幅度
解题正确率	82.30%	65.70%	16.60%
平均解题时间	12.5分钟	18.7分钟	−33.20%
有效方程构建率	87.10%	58.20%	28.90%
思维障碍发生率	17.80%	42.50%	−24.70%

6.4. 学生访谈结论

91%的实验班级学生认为策略步骤清晰、减少盲目试错，87%的学生能独立迁移至函数、数列问题。

7. 结论与展望

本文聚焦解决有关解三角形、立体几何及圆锥曲线需自主挖掘隐含条件以构建方程的问题，提出基于差异分析的方程构建策略，该策略以长度、角度、面积、体积等为桥梁，“基于差异、建立等式”为逻辑路径，实现目标方程的高效构建。

该方法突破了依赖经验性刷题的传统解题模式，将零散化的解题思路凝练为结构化的操作流程，可迁移应用于多类方程构建问题，兼具通用性与实用性。从学科素养培育视角而言，该策略对发展学生的逻辑推理、数学建模等核心素养具有积极的促进作用[7]。

后续研究可从以下维度拓展边界：其一，将该策略延伸至数列、函数等代数部分，完善跨知识模块的应用体系；其二，结合实践开展研究，优化策略的落地路径；其三，开发典型题例库，构建适配不同学情的教学方案，为高中数学方程构建类问题的教学实践与解题研究提供系统化的理论支撑与实践参考。

参考文献

[1] 杨翊, 赵婷婷. 中国大学生高阶思维能力测试蓝图的构建[J]. 清华大学教育研究, 2018, 39(5): 54-62.

[2] 关于深化本科教育教学改革全面提高人才培养质量的意见[EB/OL]. https://www.gov.cn/gongbao/content/2020/content_5469721.htm, 2019-10-08.

[3] 钟平, 杨馥. 适用于创新性人才培养的光电专业教学课程体系构建[J]. 教育现代化, 2019, 6(92): 204-205.

[4] 杨应平. 光电技术[M]. 第 2 版. 北京: 清华出版社, 2023.

[5] 孟彦龙. 光学工程专业研究生教学案例设计探索[J]. 教育教学论坛, 2019(33): 94-95.

[6] 魏勇, 李宏民, 钱坤, 等. “光电技术”课程教学及考核方式改革与实践[J]. 科教导刊(下旬), 2019(27): 125-126.

[7] 冯国强, 童爱红, 吉紫娟. “光电技术”课程理论与实践教学改革的探索[J]. 湖北第二师范学院学报, 2019, 36(2): 64-67.