

# 基于逻辑推理素养的高中数学教材分析

## ——以人教A版“立体几何初步”为例

于理斌, 祁琳, 马园媛\*

昌吉学院数学与数据科学学院, 新疆 昌吉

收稿日期: 2026年5月13日; 录用日期: 2026年6月19日; 发布日期: 2026年6月30日

### 摘要

为了深入探究教材对学生逻辑推理素养的培养效果, 研究以人教A版(2019)高中数学教材中的“立体几何初步”章节为研究对象, 以范希尔几何思维水平理论为分析框架, 通过分析教材的内容结构、编排逻辑、定理证明及习题设计等方面, 探讨教材怎样系统性地培养学生的逻辑推理素养, 并辅以与北师大版教材的横向对比。研究发现, 人教A版(2019)高中数学教材通过从整体到局部的编排逻辑、直观感知与抽象推理有机结合的定理证明等系统化的教材设计, 有效地为教师在立体几何教学中培养学生的逻辑推理素养提供了清晰的路径和可靠的载体。

### 关键词

逻辑推理素养, 高中数学教材, 立体几何初步, 教材分析

# Analysis of High School Mathematics Textbooks Based on Logical Reasoning Literacy

## —A Case Study of “Preliminary Solid Geometry” in PEP Version A (2019)

Libin Yu, Lin Qi, Yuanyuan Ma\*

School of Mathematics and Data Science, Changji University, Changji Xinjiang

Received: May 13, 2026; accepted: June 19, 2026; published: June 30, 2026

### Abstract

To thoroughly explore the effect of textbooks in cultivating students' logical reasoning literacy, this

\*通讯作者。

study takes the chapter Preliminary Solid Geometry in the PEP Version A (2019) high school mathematics textbook as the research object and adopts the Van Hiele Levels of Geometric Thinking as the analytical framework. By analyzing the content structure, organizational logic, theorem proofs and exercise design of the textbook, this study investigates how the textbook systematically cultivates students' logical reasoning literacy, supplemented by a horizontal comparison with the Beijing Normal University (BNU) Edition textbooks. The study reveals that the PEP Version A (2019) high school mathematics textbook, through its systematic designs including the organizational logic from the whole to the parts and theorem proofs that organically integrate intuitive perception and abstract reasoning, effectively provides teachers with clear paths and reliable carriers to develop students' logical reasoning literacy in solid geometry teaching.

## Keywords

Logical Reasoning Literacy, High School Mathematics Textbook, Preliminary Solid Geometry, Textbook Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

逻辑推理素养作为数学学科核心素养的关键组成部分, 是学生理性思维、科学精神和终身发展能力的重要基石。在高中数学教育领域, 立体几何因其独特的空间抽象性和严谨的演绎体系, 历来被视为培养学生逻辑推理能力的核心载体。《普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)》(以下简称“课程标准”)中将逻辑推理定义为: “从一些事实和命题出发, 依据规则推出其他命题的素养。”它主要包括两种形式: 演绎推理和归纳与类比推理[1]。“核心素养导向”已成为教材编写与教学实践的核心指向, 如何通过教材内容的设计有效培育学生的逻辑推理素养, 成为当前数学教育研究与实践的热点议题。人教A版高中数学教材作为国内广泛使用的主流教材, 其2019年修订版在“立体几何初步”章节进行了显著的结构优化与内容调整, 这些变革背后蕴含着对逻辑推理素养培养路径的重新审视与设计[2]。范希尔几何思维水平理论是由荷兰学者范希尔夫妇提出的经典几何认知理论, 该理论将学生的几何思维划分为直观感知、分析描述、非形式化演绎、形式化演绎、严谨性五个层次, 清晰揭示了学习者从直观识别几何对象到进行严密逻辑推理的认知发展路径, 其中, 前四个层次与高中“立体几何初步”的教学高度契合[3]。

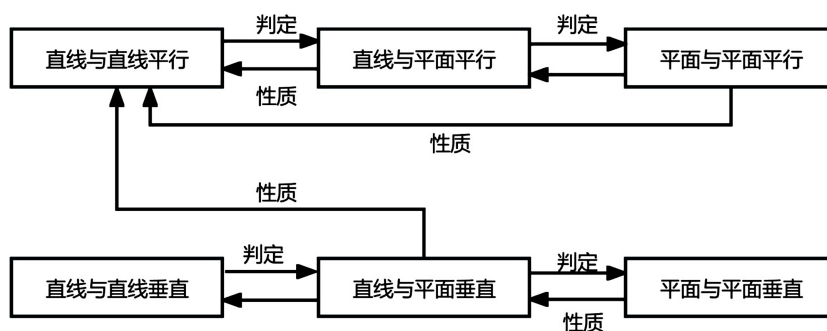
本研究聚焦于“立体几何初步”章节, 引入范希尔几何思维水平理论作为分析框架, 深入剖析人教A版教材(2019)(以下简称“人教A版教材”)如何系统地在内容结构、定理证明、习题系统与数学语言四个维度发展学生的逻辑推理素养, 同时对比北师大版教材的编排特色, 探讨人教A版教材的独特优势与潜在不足, 并提出针对性的教学建议。

## 2. 教材内容结构与编排逻辑

教材内容的结构与编排逻辑直接影响学生对知识体系的构建和逻辑推理能力的发展。人教A版教材在“立体几何初步”章节采用整体到局部的编排逻辑, 恰好契合范希尔理论从直观水平向分析水平逐步提升的认知规律, 为逻辑推理素养的发展奠定认知基础。首先从空间几何体的整体认识入手, 再深入到点、线、面之间的位置关系分析。这种编排方式符合学生的认知发展规律, 使学生在建立空间观念的基

基础上,逐步发展抽象思维能力。具体而言,教材在第八章“立体几何初步”中设置了“基本立体图形”-“直观图”-“表面积与体积”-“位置关系”-“平行关系”-“垂直关系”的内容序列,形成了从感性认识到理性分析的自然过渡[2]。

在知识结构的处理上,新版教材进行了显著优化。不同于旧版教材将“空间几何体”和“点、直线、平面之间的位置关系”分为两个独立章节的做法,新版教材将这两部分内容整合为“立体几何初步”统一章节,凸显了空间几何体与点、线、面位置关系的逻辑连贯性,并集中编排平行与垂直关系于两节内容中,这种编排强化了空间中平行关系之间、垂直关系之间以及平行与垂直之间的相互转化逻辑,突出了位置关系研究的系统性,如图1所示,使学生能更加清晰地理解几何定理之间的内在联系[4]。



**Figure 1.** Mutual transformation of positional relationships between lines, between a line and a plane, and between planes  
**图 1.** 线线、线面、面面位置关系的相互转化

教材编排中体现的从具体到抽象原则也值得关注。在引入点、线、面位置关系时,教材以长方体模型为具体载体,引导学生通过观察长方体中的位置关系实例,逐步抽象出空间中线面平行、垂直的判定定理和性质定理。这种处理方式符合“直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算”的几何认知规律,为学生提供了逻辑推理的坚实基础,教材通过螺旋上升,分层递减的形式使抽象的空间关系变得可观察、可操作,有效降低了学生逻辑推理素养的入门门槛[5]。与北师大版先讲点线面位置关系、再讲空间几何体的编排不同,人教A版“整体到局部”的设计更贴合范希尔理论从直观到分析的认知进阶,更适合初学者建立空间推理逻辑[6]。

值得注意的是,新版教材对部分内容进行了精简与调整,具体表现如表1。新版教材将异面直线所成角、线面角计算等内容移至选择性必修第一册《空间向量与立体几何》中,而在必修的立体几何初步部分则着重于基本位置关系的理解与简单命题的推证。这种调整使必修部分更聚焦于空间观念的形成和基本推理能力的培养,避免过难的计算冲淡了对几何本质的理解,这种安排符合“扩大的公理化体系”理念,不过分追求严密性,有助于减轻学生学习立体几何的心理障碍。

**Table 1.** Comparison of content structures of “preliminary solid geometry” in new and old PEP Version A textbooks  
**表 1.** 人教 A 版新旧教材“立体几何初步”内容结构对比

编排特点	人教 A 版旧版教材	人教 A 版新版教材
整体结构	分为“空间几何体”和“点、直线、平面位置关系”两章	整合为“立体几何初步”统一章节
位置关系处理	先讲判定定理后紧跟性质定理	集中编排平行关系(含判定与性质),再集中编排垂直关系
认知路径	局部到整体	整体到局部
推理论证要求	对线面平行、垂直的判定定理要求证明	判定定理以直观感知为主,性质定理要求证明

### 3. 定理证明与推理训练设计

立体几何中的定理体系是培养学生逻辑推理能力的重要载体。依据范希尔理论，高中阶段立体几何的核心目标是帮助学生从非形式演绎迈向形式化演绎推理。教材对判定定理与性质定理的分层处理，正是遵循这一发展路径，通过直观感知、归纳推理到演绎证明的梯度设计，逐步提升学生的逻辑推理严谨性。相较于北师大版更侧重演绎证明的编排，人教 A 版教材对判定定理与性质定理的分层处理，更符合高中学生推理能力的发展节奏，降低了形式化演绎的入门难度。对于线面平行、面面平行、线面垂直、面面垂直的判定定理，人教 A 版教材主要通过直观感知和操作确认的方式让学生接受；而对于这些位置关系的性质定理，则要求进行严格的推理论证[7]。这种区别处理既考虑了学生的认知发展水平，也体现了数学严谨性的循序渐进。

教材在讲棱柱的定义时，不是直接给出定义，而是让学生观察长方体，发现其面是平行四边形、对面平行等特征，然后从这些具体例子中归纳出棱柱的一般定义。这是一个典型的从特殊到一般的归纳推理过程，能够使学生在熟悉情境中，用归纳或类比发现性质。

教材在平面与平面平行的判定这一节时，特别指出“如果一个平面内有两条平行直线与另一个平面平行，这两个平面不一定平行”，并借助长方体模型构造反例，依据  $A'ADD'$  内的  $EF \parallel AA'$ ，且都平行于平面  $D'DCC'$ ，但两平面相交。这训练了学生在关联情境中，探索论证思路并规范表述，还展示了几何定义、定理之间的逻辑联系。

整个章节的推理都建立在三个基本事实之上。教材在推论“经过一条直线和直线外一点，有且只有一个平面”的证明中，明确写道：“设点  $A$  是直线  $a$  外一点在直线  $a$  上任取两点  $B$  和  $C$ ，则由基本事实 1，经过  $A, B, C$  三点确定一个平面  $\alpha$ 。再由基本事实 2，直线  $a$  也在平面  $\alpha$  内，因此平面  $\alpha$  经过直线  $a$  和点  $A$ ，即一条直线和这条直线外一点确定一个平面”。这清晰地展示了如何从公理出发，一步步演绎出新的结论，让学生初步理解公理化思想，这是逻辑推理素养的核心根基。

### 4. 例题与习题系统设计

例题与习题是教材训练学生逻辑推理能力的重要载体。北师大版习题更侧重综合拓展，而人教 A 版习题以基础推理、转化训练为主，认知梯度更平缓，更适配必修阶段逻辑推理素养的奠基性培养目标。在“立体几何初步”一章中，例题主要承担着定理应用的示范功能，并着重展示基本定理的简单应用和位置关系的转化策略。以线面平行判定定理的例题为例：“证明正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $A_1B_1 \parallel$  平面  $DCC_1D_1$ ”。该题通过构造平面  $DCC_1D_1$  内的直线  $DC_1$  与  $AB_1$  平行，直接应用判定定理得出结论，体现了定理的基本应用模式。

为精确把握习题的认知要求，本研究以范希尔几何思维水平为依据，结合布鲁姆认知理论，对该章全部 157 道习题进行统计分析，并划分为记忆理解、简单应用、综合推理、拓展迁移四个层级，分别对应范希尔理论不同层次的思维要求。通过统计分析可清晰呈现教材对不同几何思维水平的训练覆盖。其分布情况如表 2 所示。这种梯度设计使不同水平的学生都能获得适当的推理训练，逐步提升逻辑思维能力[7]。

**Table 2.** Distribution of cognitive levels of exercises in “preliminary solid geometry” of PEP Version A textbooks  
**表 2.** 人教 A 版“立体几何初步”习题认知水平分布

认知水平	典型特征	占比(%)	示例
记忆理解	识别几何元素位置关系	约 25%	判断命题真伪：“若 $a \parallel \alpha$ ，则 $a \parallel b$ ”
简单应用	单一定理的直接应用	约 40%	应用线面垂直定理证明线线垂直
综合推理	多定理组合的复杂证明	约 25%	综合运用平行、垂直定理的多步骤证明
拓展迁移	实际情境中的几何建模	约 10%	测量问题中的几何模型构建与计算

在综合推理类习题中，不能直接套用定理，需要学生在“平行”与“垂直”之间多次转换，构建完整的论证链条。例如教材第 163 页习题 8.6 第 10 题：“已知平面  $\alpha, \beta, \gamma$ ，且  $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma, \alpha \cap \beta = l$ ，求证： $l \perp \gamma$ 。”[8] 该题证明“线面垂直”，但条件给出的是“面面垂直”，要证明一条直线  $l$  垂直于一个平面  $\gamma$ ，则需要证明直线  $l$  垂直于平面  $\gamma$  内两条相交直线。如何找到这两条直线？就需要学生利用面面垂直的性质来证明线线垂直，从而证得线面垂直。该题在推理过程中多次在“线线垂直”“线面垂直”“面面垂直”之间进行转化，需要学生深刻理解这些关系之间的内在联系，并选择正确的定理作为每一步推理的依据，构建多步骤的推理链条，论述过程环环相扣，逻辑严密。使学生能够用准确的数学语言表述论证过程，在复杂情境中把握几何元素之间的关联，形成抽象的空间位置关系概念，提升逻辑概括能力[9]，发展了逻辑推理的核心素养。

而在拓展迁移方面，比较经典的就是教材第 154 页例 6 “棱台体积公式的推导” 学生已知棱锥体积公式  $V_{\text{锥}} = \frac{1}{3}Sh$ ，但面对结构更复杂的棱台，其体积公式未知。教材提示棱台由棱锥截得，其体积是否可表示为原棱锥与被截去小棱锥的体积之差？即  $V_{\text{棱台}} = V_{\text{大锥}} - V_{\text{小锥}}$ ，引导学生主动探究，将棱台补全为原棱锥，将未知的棱台体积问题，转化为两个有关系的棱锥体积问题，再通过严谨的符号化演绎推理：

设棱台上下底面积为  $S'$  和  $S$ ，设棱台高为  $h$ ，设小棱锥高为  $h'$ ，则大棱锥高为  $h+h'$ 。

$$\text{则 } V_{\text{大锥}} = \frac{1}{3}S(h+h'), \quad V_{\text{小锥}} = \frac{1}{3}S'h', \quad V_{\text{棱台}} = V_{\text{大锥}} - V_{\text{小锥}} = \frac{1}{3}[Sh + (S-S')h']$$

至此，问题转化为求解  $h'$ 。

$$\text{由于棱台上下底面平行，故截面与原底面相似可得：} \quad \frac{S'}{S} = \frac{h'^2}{(h+h')^2}$$

$$\text{所以 } h' = \frac{\sqrt{S'h}}{\sqrt{S} - \sqrt{S'}}$$

$$\text{将其代入棱台的体积公式中可以得到 } V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3}h(S' + \sqrt{S'S} + S)$$

这道例题揭示了柱、锥、台体积公式并非独立存在，而是被一个更一般、更统一的数学公式所涵盖。这让学生初步感受到数学理论的整体性、结构性和逻辑自洽性。这正是“公理化思想”的雏形——从一个更具普遍性的公式出发，可以演绎出特定情形的定理。这极大地提升了学生的逻辑推理素养水平。

## 5. 数学语言与符号表达

数学语言是逻辑推理的载体，符号表达则是几何思维的精确呈现。对于几何语言来说，从自然语言到图形语言再到符号语言的重重转换过程，与范希尔理论中从直观识别到形式化表达的思维进阶高度一致。符号语言的规范化使用，是学生达到形式化演绎水平的重要标志，也是逻辑推理素养的核心体现。人教 A 版教材在“立体几何初步”部分高度重视几何语言的系统训练，通过三重转换从自然语言到图形语言再到符号语言，培养学生的抽象思维能力与逻辑表达能力。这种语言转换能力是几何推理的基础，直接影响学生逻辑推理素养的发展水平。

教材在引入每一个新概念时，都会明确其与旧概念的关系。在基本立体图形这一节中“棱柱的底面可以是三角形、四边形……我们把这样的棱柱分别叫作三棱柱、四棱柱……”；“底面是平行四边形的四棱柱也叫作平行六面体”。这些表述都在帮助学生建立概念之间的网状逻辑关系。

教材在位置关系的引入环节展示了三种语言的对应关系。以“直线与平面平行”为例：自然语言描述为“一条直线与一个平面没有公共点”；图形语言表现为直线在平面外且与平面无交点的示意图；符

号语言则抽象为“ $a \cap \alpha = \emptyset$ ，记作  $a \parallel \alpha$ ” [10]。这种三位一体的表达方式，使学生能够从具体实例中抽象出位置关系的本质特征，形成准确的几何概念，用准确的数学语言表述论证过程。

本章所有定理、例题的证明过程都是使用准确的数学符号语言书写的范本，以“空间点、直线、平面位置关系”一节为例，教材明确用“ $A \in l$ ”表示点  $A$  在直线  $l$  上，“ $\alpha \cap \beta = l$ ”表示平面  $\alpha$  与  $\beta$  相交于直线  $l$ 。这种符号化表达不仅简洁准确，也便于揭示几何命题的逻辑结构，为形式化推理创造条件。

## 6. 结论

本研究以范希尔几何思维水平理论为框架，系统分析了人教 A 版“立体几何初步”教材对逻辑推理素养的培养路径，并辅以与北师大版教材的横向对比。人教 A 版“立体几何初步”的教材设计整体契合范希尔几何思维发展规律，从直观感知到演绎推理逐层递进，为逻辑推理素养的系统性培养提供了科学、可行的载体。教材依据学生的身心发展规律，在内容结构上体现的“整体到局部”原则，在定理证明中展现的“直观到严谨”梯度，在例习题系统中设计的“基础到综合”序列，共同构成了立体几何推理能力培养的有机整体。通过与北师大版教材的简要对比可知，人教 A 版教材在编排逻辑、推理梯度、习题设计上更贴合高中生几何认知发展规律，是培养逻辑推理素养的优质载体。

在教学中，教师要重视几何图形的观察与分析过程，让学生充分经历从直观感知到抽象概括的思维发展，适度运用信息技术，在动态演示中培养空间想象能力，为逻辑推理提供直观支撑，同时可引导学生分析证明思路，“为什么要用反证法？反证法的假设如何与已知条件产生矛盾？”通过对问题的思考，学生能够深入理解几何定理之间的逻辑网络，形成网状的知识结构，在教学过程中强化数学语言的规范表达，通过三种语言的相互转化训练提升思维严谨性。

通过对教材的分析，我们可以看出，逻辑推理素养的培养需要依托于有层次的认知活动和系统的推理训练。人教 A 版教材在立体几何初步部分的编写，较好地体现了核心素养导向的课程理念，为教师培养学生“核心素养”提供了有效载体。教师应深入研读教材，把握其逻辑脉络和设计意图，在教学中创造性地加以实施，使立体几何真正成为培养学生逻辑推理素养的重要平台。

## 参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 苏慧彬, 金晶. 新课标视角下高中数学教材对比分析——以人教 A 版新旧教材立体几何初步为例[J]. 创新教育研究, 2024, 12(9): 46-51.
- [3] Van Hiele, P.M. (1986) *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press, 80-86.
- [4] 尹承利. 新旧教材对比备考有的放矢——以“立体几何”新旧教材内容变化的对比研究为例[J]. 教学考试, 2022(20): 16-19.
- [5] 李海东. 重视研究立体几何图形的过程和方法, 发展直观想象、逻辑推理素养——人教 A 版普通高中教科书《数学》(必修第二册)第八章“立体几何初步”的教材设计与教学反思[J]. 中学数学教学参考, 2020(19): 10-14+26.
- [6] 刘江, 白伟, 高孔孔. 高中数学教材《立体几何初步》比较研究——以人教 A 版和北师大版为例[J]. 科技风, 2025(13): 145-148.
- [7] 雷雄军. 立足两类垂直证明提升学生逻辑推理核心素养[J]. 福建中学数学, 2022(2): 36-38.
- [8] 人民教育出版社. 普通高中教科书数学(A版)必修第二册教师教学用书[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [9] 顾向忠. 基于“四个理解”的高中数学教材逻辑对比分析——以人教 A 版(2019)和苏教版(2020)教材中“三角函数”为例[J]. 中学数学教学参考, 2021(28): 11-15.
- [10] 章建跃. 核心素养导向的高中数学教材变革——《普通高中教科书·数学(人教 A 版)》的研究与编写[J]. 中学数学教学参考, 2019(16): 6-10.