

数学分析课程三维教学模式的探索与实践

常 玉

北京化工大学数理学院, 北京

收稿日期: 2026年7月5日; 录用日期: 2026年8月18日; 发布日期: 2026年8月28日

摘 要

数学分析教学长期面临一项结构性难题: 概念高度抽象、证明要求严密、计算步骤繁杂, 三者相互交织, 使学生的学习过程中承受较重的认知负担。传统的“定义-定理-证明-例题”教学流程以知识逻辑为主线组织课堂, 对学生认知过程的关注相对有限。本文从学生认知规律出发, 提出“概念扎根-证明外化-计算贯通”三维教学模式。三者围绕优化学生认知过程的目标协同运转, 将教学改革的重心从内容选择转向认知过程的优化。本文呈现该模式的理论基础与实施框架, 以期为数分析教学改革提供参考。

关键词

数学分析, 认知规律, 概念扎根, 证明外化, 计算贯通

Exploration and Practice of a Three-Dimensional Teaching Model for Mathematical Analysis Course

Yu Chang

College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing

Received: July 5, 2026; accepted: August 18, 2026; published: August 28, 2026

Abstract

Mathematical analysis teaching has long faced a structural challenge: the interplay of highly abstract concepts, rigorous proof requirements, and complex computational procedures imposes a heavy cognitive burden on students. The traditional “definition-theorem-proof-example” teaching sequence, organized around the logic of knowledge transmission, pays limited attention to students’ cognitive processes. From the perspective of cognitive laws in learning, this paper proposes a three-dimensional teaching model of “Concept Rooting-Proof Externalization-Computation Integration”. These

three dimensions operate in concert toward the goal of optimizing students' cognitive processes, running through the three stages of pre-class, in-class, and post-class instruction, and shifting the focus of teaching reform from content selection to the optimization of cognitive processes. This paper presents the theoretical foundations and implementation framework of the model, aiming to provide a reference for the teaching reform of mathematical analysis courses.

Keywords

Mathematical Analysis, Cognitive Mechanisms, Conceptual Grounding, Proof Externalization, Computational Integration

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 数学分析教学面临的三重认知困境

数学分析在数学类专业课程中占有基础性地位。作为学生进入大学后修读的第一门以逻辑演绎为主线的数学课程，它兼具双重使命：一方面要系统传授微积分的基本理论，另一方面需引领学生实现从直观运算向抽象论证的思维跨越。相较而言，后一重使命的完成难度更大——它所涉及的并非单纯的知识增量，而是认知方式的结构性调整。

《关于加强数学科学研究工作方案》将数学学科建设提升至国家战略高度，为数学类课程的教学改革指明了方向[1]。在此背景下，围绕数学分析课程的教学改革，已有研究从教学模式、教学内容、评价机制等维度切入，探索了混合式教学、数字化赋能、课程思政融合等多元路径[2]-[6]。这些探索为数学分析教学改革积累了有益经验。然而，改革的深入推进仍需对课程教学中更深层的认知问题做进一步审视。教学实践表明，学生在数学分析学习中普遍遭遇三个相互关联的认知困境：

(1) 概念理解的表层化：程序性知识与概念性知识的分离。数学分析的概念体系具有显著的层级性和抽象性。极限、连续性、一致连续性、收敛、一致收敛等核心概念，从初等的直观理解出发，经过逐步抽象和严格化，最终形成一个结构严密的概念网络。这一概念体系的教学难点在于：每一个新概念的引入都建立在前一个概念的基础之上，同时又在抽象程度上有所提升。以一致连续性为例，学生在理解连续性的严格定义之后，还需要进一步把握“统一的误差容忍范围”这一整体性要求。多数学生能够机械地复述定义，却无法在具体情境中做出准确的判断——哪些函数在哪些区间上一致连续，哪些不一致，以及造成这种差异的原因。概念的符号形式被记住了，但符号所对应的数学含义并未真正内化，这反映了程序性知识(定义的形式化表述)与概念性知识(定义所表征的数学含义)之间的分离状态。从认知负荷理论[7]的视角来看，这种分离状态的出现并非偶然。数学分析概念的抽象性和逻辑嵌套结构使学生在初次接触时需要同时处理多重量化关系，工作记忆容量难以承载这一信息量，导致认知资源分配失衡，学习者往往以机械复述替代意义建构。这种认知超载现象是导致程序性知识与概念性知识分离的一个重要促成因素。

(2) 证明思维策略的缺失。数学分析区别于初等数学的一个重要特征，在于它以严格的证明作为知识确立的基本方式。然而，证明能力的培养恰恰是教学中最容易流于形式的部分。一个普遍存在的现象是：教师在黑板上呈现的证明干净、简洁、逻辑严密，学生看后也觉得理解无误，但轮到自己独立面对一道证明题时，却不知从何处入手。这一现象的本质可以归结为教学中思维策略的缺失——学生记住了证明的成品形态，却没有掌握支撑证明生成的策略性知识。造成这一现象的根源在于：教学中呈现的永远是

“成品证明”——即已经过反复打磨、去除了所有试探性步骤的最终版本。而证明最为核心的部分——思路的形成过程、试错的发生机制、受阻时的调整策略——恰恰在这一“成品化”的过程中被完全遮蔽。学生看到的只是证明应当呈现为何种形态，却无从获知证明是如何被构想出来的。证明教学因此容易沦为一种模仿训练，学生依循成品样态进行复制，却缺乏独立建构的思维工具，一旦题目形式发生变化，模仿便不再奏效。

(3) 计算训练的“边缘化”。在数学分析的教学实践中，计算训练近年来被不同程度地边缘化了。这一现象有复杂的成因：证明题的难度被赋予更高的教学价值，课堂时间向证明推导倾斜，计算能力的训练被视为应当在中学阶段完成的任务。然而，数学分析课程中大量的核心内容——极限的计算、积分的计算、级数的求和、幂级数的展开——都依赖于扎实的计算基本功。计算能力的薄弱，使学生在面对需要证明与计算协同运作的综合题目时，往往在计算环节失分。更为深层的问题在于，计算原本具有的认识论功能被忽视了。计算不仅是技能操练，更是检验概念理解是否准确的有效手段——通过具体计算来验证概念的应用范围，通过对计算结果的反思来加深对概念内涵的认识。计算训练的弱化可能削弱了这种双向支撑关系，使理解的深化缺少来自操作层面的反馈和验证。

2. 优化认知过程的教学分析

上述三重困境虽然表现各异，但指向同一个深层问题：数学分析的教学安排在回应学生认知需求方面可能存在不足。从概念习得的角度来看，抽象概念的理解需要建立在充分的感性经验基础之上。数学分析概念的抽象程度远超学生此前所接触的任何数学内容，但教学往往跳过感性经验的积累阶段，直接进入抽象定义和形式化推演。这相当于要求学生在一个尚未建立任何认知参照系的领域中完成定位——概念本身是新的、表达概念的语言是新的、运用概念的规则也是新的，三者叠加，使理解变得格外困难。从论证能力的形成来看，任何复杂的思维活动都有其内在的方法论结构。证明能力本质上是一种策略性思维能力——面对一个命题时，能够根据其形式特征判断可以采用哪些证明策略，并能够在受阻时调整思路。这种策略性思维不是通过观看成品就能获得的，它需要观察策略选择的过程、体验受阻与调整的真实情境，并在反复练习中逐渐内化。从技能与理解的关系来看，在数学学习中，操作性的训练与理解性的认识之间并非从属关系，而是相互支撑、彼此促进的关系。熟练的操作往往能为抽象理解提供直觉方向，而深刻的理解又能指导操作的方向和策略选择。

基于上述分析，本文提出数学分析教学改革三个着力方向：在概念教学中建立从感性经验到形式定义之间的认知阶梯；在证明教学中将内隐的思维过程转化为可供观察和模仿的教学资源；在训练安排中恢复计算在概念理解与证明构思之间的桥梁功能。三个方向分别回应前述三重困境，并在“优化学生认知过程”这一共同目标下形成相互支撑的关系。

3. 三维教学模式的构建

(1) 概念扎根：在感性经验与形式定义之间搭建阶梯。这一设计的内在逻辑与建构主义[8]学习理论具有一致性：学习者需要在已有经验与新知识之间建立有意义的联系，而非被动接收现成的符号表述。概念扎根的基本思路是：抽象概念的教学不应以形式化定义为起点，而应当经历一个从感性经验积累到形式化表达的渐进过程。数学概念的习得往往需要经历“具体—半抽象—抽象”的认知发展序列，跨越这一序列中的任何一个阶段，都可能导致理解的不稳固。以一致连续性概念的教学为例，这一思路可以通过三个层次加以落实：第一层是感性经验的积累。在正式给出定义之前，引导学生观察多个具体函数的图像，比较不同函数在不同区间上的变化特征，让学生先建立起关于“函数在区间上的变化是否均匀”的直观判断力。此阶段不使用任何符号化定义，完全依靠视觉直观和数值感受来形成初步认识；第二层

是形式化定义的操作性训练。在引入严格定义之后，教学重心从“记住定义”转向“使用定义”。学生需要运用定义对具体函数进行一致连续性判断。特别是不一致连续的情形，学生需要构造两个距离趋近于零而函数值差异不趋近于零的点列。这一构造过程本身正是对定义逻辑结构的深入拆解，也是从形式化符号向数学含义理解的关键转换环节；第三层是概念的结构化定位。当多个以“一致”为前缀的概念（一致连续、一致收敛等）相继出现之后，安排一次回顾性讨论，引导学生归纳这些概念在逻辑结构上的共同特征——“整体性”与“均匀性”。这一环节将分散的概念点连接为概念网络，使新概念在已有认知结构中得以定位。

通过上述渐进式设计，形式化定义不再是突兀地出现在学生面前的陌生符号，而是此前积累的感性经验经过提炼和精确化之后的自然结果。“扎根”一词所指的正是这样一种状态：概念不是被机械地附着于记忆表层，而是在多次接触、使用和反思的过程中逐渐成为认知结构的有机组成部分。

(2) 证明外化：让隐性的思维过程变得可见。证明外化的教学思路与认知学徒理论[8]具有内在的一致性，该理论强调专家应将内隐的认知策略通过示范和讲解外显化，使学习者在观察与参与中逐步掌握复杂的思维技能。证明外化的基本思路是：将教师隐性的证明构思过程转化为学生可观察、可模仿的外显化教学资源。证明教学中最具教育价值的不是成品证明的结构本身，而是成品产生之前的思维过程——包括方向的判断、受阻时的调整、备选方案的比较以及最终路径的确定。在课堂证明教学中，教师不以完整的标准证明作为教学起点，而是以边想边讲的方式呈现证明的形成过程。在问题识别阶段，教师外显化对结论形式与已知条件的分析；在策略选择阶段，教师说明为何优先尝试某种方法而非其他；在受阻与调整阶段，教师不回避思路的中断，展示如何诊断受阻原因并寻找替代路径；在验证与优化阶段，教师演示如何检查证明的完整性与条件的充分性。这种教学方式使证明学习从“观看成品”转向“观察生产过程”。学生看到的不是一个从外部直接输入的完美论证，而是一个包含试探、受阻、调整和最终整合的真实思维过程。更为重要的是，这种教学方式传递了一个关键信息：证明能力不是某种与生俱来的禀赋，而是一套可以通过学习和训练获得的思维方法。这一认识对于消除学生对证明的畏难心理可能具有实质性帮助。在此基础上，还应帮助学生建立基本的证明策略意识。这种策略意识不是零散技巧的罗列，而是根据命题的逻辑形式进行分类整理的思维框架。

(3) 计算贯通：重建具体操作与抽象理解之间的桥梁。计算贯通的核心主张是：计算在数学分析教学中不应被降格为一种低阶技能，而应恢复其作为沟通具体操作与抽象理解的桥梁功能。在数学学习中，具体的数值计算与抽象的概念理解之间并非等级关系，而是互补关系。熟练的计算操作能够为抽象理解提供直觉素材，而深刻的概念理解又能指导计算的策略选择。

计算贯通的实现可以从三个层面入手：(1) 概念引入后的即时计算验证。在每一个新概念引入之后，立即安排与概念直接相关的计算任务，使学生在具体操作中检验自己对概念的理解是否准确。(2) 证明教学前的计算探索。在某些定理的证明之前，先让学生通过若干具体数值计算来观察规律、形成猜想，再进入证明环节对这一猜想加以论证。这种“从计算到证明”的顺序，使证明不再是一个从定义和已知定理出发的纯逻辑推演，而是一个解释“为什么计算结果呈现出某种规律”的过程。理解的性质因此发生了变化：从接受一个既定结论转变为理解一个已观察到的事实。(3) 计算训练的常态化安排。将计算训练嵌入课前、课中、课后三个环节：课前以计算热身题唤醒认知准备状态；课堂以概念与计算交替推进的节奏保持同步；课后以适量的独立计算作业保障基本技能的持续巩固。

4. 实施路径与教学安排

上述三维模式需在具体教学环节中加以落实。以下分别从课前、课中、课后三个阶段说明实施方式。**(1) 课前环节：认知激活。**每次新课之前布置认知激活任务。该任务的功能并非预习新知识，而是激活与新知识

相关的已有认知结构，为新知识的加工做好认知准备。当相关的已有知识已被激活并处于工作记忆中时，新知识的接收效率会显著提高。具体内容分为两部分。第一部分是前备知识唤醒，即若干道与新课内容密切相关的已学知识回顾题，侧重概念的准确复述和基本计算的快速演练。第二部分是认知冲突设置，即一至两道看似简单但深入思考后会发现存在疑问的问题，目的是制造认知悬念，使学生在进入课堂时已经处于有问题待解决的状态，而非单纯等待知识输入。**(2) 课中环节：认知引导。**课堂是三维模式的核心实施场域。概念引入阶段遵循感性铺垫在先、形式定义在后的顺序——先呈现具体事例和自然语言描述，待学生积累了足够的感性经验之后，再引入形式化定义。定义不作为教学的起点，而作为前序认知准备的精确化表达。证明教学阶段采用思维外化的方式：教师在黑板上书写规范证明的同时，口头同步呈现证明的构思历程。板书呈现的是成品结构，口头呈现的是结构形成之前的探索与调整过程。两者的对照使学生得以同时看到最终结果与生成方法。课堂后段安排计算实践环节，学生独立完成与当堂概念或定理相关的计算题目，教师巡视并提供即时反馈。这一安排将计算训练从边缘位置拉回到课堂教学的中心地带。**(3) 课后环节：巩固内化。**课后环节的目标是帮助学生将课堂所学转化为长期记忆中稳定的认知图式。作业设计采用分层策略：基础层面向全体学生，侧重概念辨析和基本计算；提升层面向学有余力的学生，侧重证明构造和综合运用；挑战层面向有兴趣和潜力的学生，侧重开放性问题。习题课的组织方式也进行了调整，不再以教师逐题讲解为主要形式，而是以问题诊断的方式开展——学生提前提交独立作业中遇到的困难，教师在习题课上集中展示受阻环节及其突破路径。这种基于真实困难的针对性教学，比泛泛的习题讲解更有可能有效地回应学生的学习需求。

5. 实施中的现实挑战与应对策略

三维教学模式在教学实践中面临若干现实约束，以下针对三个突出问题提出应对方案。**(1) 大班额条件下的互动与指导困境。**数学分析课程常以百人以上的大班形式开设，课堂上难以实现充分的师生互动，课后也难以对每位学生的认知状态做出准确判断。针对这一问题，可采取如下措施：在概念讲解的关键节点，借助“雨课堂”在线投票或简短随堂测验收集学生的即时理解反馈，帮助教师快速定位多数学生的认知卡顿之处；在证明外化环节，采用“独立思考-小组交流-全班分享”的分层互动形式，让每位学生在有限时间内至少经历一次完整的思维表达；课后借助助教系统，将答疑和作业反馈分解为若干小组的定向辅导，助教经统一培训后按照诊断框架回应学生的常见困难。**(2) 教师角色转换与教学能力的新要求。**三维模式要求教师从知识的系统讲授者转向认知过程的组织者与引导者，证明外化尤其需要教师在即兴讲授中呈现试错与调整的过程，同时兼顾逻辑严谨性，这对教师的课堂驾驭能力提出了更高要求。为支持这一转型，院系层面可组织以“如何外化证明构思”“如何设计概念扎根的感性材料”为主题的教学工作坊，通过案例分析和模拟授课帮助教师积累经验；同时鼓励教师互相听课，观察彼此处理认知引导环节的差异，在同行评议中逐步优化教学策略。**(3) 教学进度与认知深度的权衡。**三维模式在概念引入阶段增加了感性铺垫和操作训练，客观上会占用一定的课堂时间，可能对教学进度形成压力。对此，可采取差异化的处理方式：对极限、一致连续性、一致收敛等核心概念按照完整的扎根流程展开，对派生性或辅助性概念则适当缩短感性铺垫环节；同时将部分形式化训练任务(如定义辨析、简单判断练习)前移至课前的认知激活任务中，将课堂时间集中于需要教师引导的策略性思维环节，从而在有限学时内兼顾认知深度与教学覆盖面。

6. 结语

本文从学生认知规律出发，针对数学分析教学长期存在的程序性知识与概念性知识分离、证明思维策略缺失、计算训练边缘化三重困境，提出了“概念扎根-证明外化-计算贯通”三维教学模式。该模式的核心贡献在于将教学改革的着力点从“应当教什么内容”转向“如何更合理地安排学生的认知过

程”，通过建立概念教学中感性经验与形式定义之间的过渡阶梯、将证明教学中隐性的思维过程转化为可见的教学资源、恢复计算在概念理解与证明构思之间的桥梁功能，试图系统性地优化学生在数学分析学习中的认知过程。

数学分析教学改革的难度在于，它并非某一项具体技巧的改良所能解决，而是要求对教学的本质进行重新审视。当关注的焦点从“教师讲授了多少内容”转向“学生建构了多少意义”，从知识传递的效率转向认知过程的质量，改革的路径便呈现出新的可能性。“概念扎根－证明外化－计算贯通”三维模式的价值，在于提供了一个植根于认知规律的研究视角，使数学分析教学改革获得了一个可依据的分析框架和可操作的实践路径。

基金项目

北京市高等教育学会数学研究分会“教育教改”课题(项目编号：SXJC-2024-002)。

参考文献

- [1] 关于加强数学科学研究工作方案[EB/OL].
https://www.gov.cn/zhengce/zhengceku/2019-12/03/content_5457772.htm, 2019-07-12.
- [2] 陈亮, 马艳芳. 人工智能背景下“数学分析”课程线上线下混合式“金课”范式重构[J]. 黑龙江教育(理论与实践), 2026(1): 14-17.
- [3] 刘艳芹, 尹秀玲, 王金凤. 基于“三融六环四力”混合式模式的数学分析教学创新实践[J]. 大学数学, 2025, 41(6): 42-49.
- [4] 杨凯凡, 陈涛. 数字时代混合式教学模式的改革与实践——以数学分析课程为例[J]. 高师理科学刊, 2025, 45(12): 84-89.
- [5] 何郁波, 杨洁, 邓海云, 周珏良. “强基、厚能、培优”锚定应用新人才——数学分析课程“四部五维混合式”教学创新与实践[J]. 高教学刊, 2024, 10(34): 61-67.
- [6] 唐耀宗, 殷芳. 数学分析课程思政内涵探析[J]. 高师理科学刊, 2025, 45(9): 75-79.
- [7] Sweller, J. (1988) Cognitive Load During Problem Solving: Effects on Learning. *Cognitive Science*, **12**, 257-285.
https://doi.org/10.1207/s15516709cog1202_4
- [8] Resnick, L.B. (1989) Knowing, Learning, and Instruction: Essays in Honor of Robert Glaser. Lawrence Erlbaum Associates.