

基于APOS理论和RMI原则融合模型的概念教学研究

——以“函数的概念”的教学为例

万鑫, 刘熠

内江师范学院数学与大数据学院, 四川 内江

收稿日期: 2026年7月6日; 录用日期: 2026年8月19日; 发布日期: 2026年8月31日

摘要

数学概念是数学知识的重要组成部分,但其高度的抽象性和复杂性,给学生带来了显著的认知障碍,教学效果并不理想。针对这一现状,提出了以APOS理论的认知阶段为学习认知依据、RMI原则的思想为方法指导的双理论融合教学模型。通过梳理APOS理论和RMI原则并分析其在数学教育中的作用,以概念形成这一数学概念获得方式为重要桥梁,将RMI原则融入APOS理论的四个阶段,构建融合教学模型。根据融合教学模型设计《函数的概念》教学案例,旨在推动学生形成对函数概念的深层次认知,同时领悟数学思想方法,落实核心素养,为一线教学提供直观参考。

关键词

函数的概念, APOS理论, RMI原则, 教学研究

A Study of Concept Teaching Based on the Integrated Model of APOS Theory and RMI Principle

—A Case Study of the Teaching of “The Concept of Function”

Xin Wan, Yi Liu

School of Mathematics and Big Data, Neijiang Normal University, Neijiang Sichuan

Received: July 6, 2026; accepted: August 19, 2026; published: August 31, 2026

Abstract

Mathematical concepts constitute a fundamental component of mathematical knowledge. However, their high degree of abstraction and complexity pose significant cognitive obstacles for students, resulting in unsatisfactory teaching effectiveness. To address this issue, this paper proposes a dual-theory integrated teaching model that takes the cognitive stages of APOS theory as the cognitive foundation for learning and the methodology of the RMI principle as the methodological guidance. By sorting out the APOS theory and the RMI principle and analyzing their roles in mathematics education, and taking the concept formation, a way of acquiring mathematical concepts, as an important bridge, the RMI principle is integrated into the four stages of the APOS theory to construct an integrated teaching model. Based on the integrated teaching model, a teaching case for “The Concept of Function” is designed, aiming to promote students’ in-depth understanding of the function concept, enable them to comprehend mathematical thinking methods, and foster core mathematical competencies, thereby providing practical reference for teaching practice.

Keywords

Function Concept, APOS Theory, RMI Principle, Research on Teaching

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》(下文称《新课标》)明确提出, 数学教学应立足于学生的认知规律, 注重数学概念的生成过程, 推动数学核心素养的形成和发展[1]。在数学概念教学中, 教师需要明确学生的认知起点, 分解目标数学概念的生成逻辑, 并以此为依据设计教学活动, 帮助学生理解数学概念的本质。数学概念是人类对现实世界空间形式和数量关系的概括反映[2], 数学概念的教学需要依托客观现实, 这样才能帮助学生在现实情境与抽象的数学知识之间建立稳固联系, 实现具象到抽象的顺利过渡。数学知识的整个架构是以数学概念作为基础[3], 只有正确理解数学概念, 才能更好地完成知识结构的构建, 发展数学思维能力, 领悟数学思想, 提升知识迁移能力。

函数是现代数学最基本的概念, 描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具, 是贯穿高中数学课程的主线[1]。函数概念是这一主线内容的核心概念, 是中学数学中最为重要的概念之一[4], 其教学效果会给学生后续的学习带来深远的影响。同时函数概念也是最难教、最难学的概念之一[4]。在一线教学中, 函数的概念的教学效果并不理想。高一学生在学习函数概念后, 多数处于“操作阶段”和“过程阶段”, 少数可以达到“对象阶段”, 部分达到“图式阶段”[4]。表明很多学生都对函数的本质理解不到位, 不能有效建立变量间的对应关系, 不能进行有效的知识迁移。函数的概念本身就具有较高的抽象性和概括性, 对学生的抽象思维与转化思维提出了极高要求, 对老师的教学也提出了极大的挑战。然而, 一些教师在教学时, 仍选择用传统的教学模式, 以教师讲授为主, 倾向于直接给出函数的概念与函数“三要素”, 结合例题进行概念辨析, 强调技巧训练[5]。这种先给出函数的概念然后举例验证的学习, 不符合从具象到抽象的认知规律, 没有关注学生函数概念的生成过程, 导致学生无法把握函数的本质, 认知过程出现障碍, 知识体系间出现冲突。数学抽象, 逻辑推理, 直观想象等数学核心素养没有得到实质性的提高, 核心素养的培养流于形式, 难以真正落地。

因此, 探索一种能够帮助学生完成从具体经验向抽象思维过渡, 并在概念生成过程中领悟数学思想方法的教学路径, 显得尤为迫切, 亟须引入新的理论视角进行改进。APOS 理论作为成熟的数学概念教学理论, RMI 原则作为数学问题解决的重要思想方法, 为数学的概念教学提供了新的视角。因此, 将 APOS 理论与 RMI 原则相结合, 应用于高中函数概念的教学设计, 具有重要的理论价值和实践意义。

2. APOS 理论和 RMI 原则概述

2.1. APOS 理论

APOS 理论是由美国著名教育学家杜宾斯基提出的一种认知建构理论, 源于建构主义学习理论, 该理论将学习过程分为四个阶段: 操作(Action)、过程(Process)、对象(Object)、图式(Schema)四个阶段。这四个阶段代表了学生学习数学概念时需要心智结构需要经过的四个路径, 只有顺利经过四个阶段, 学生才能完全学会数学概念。学生通过具体的“操作”, 感知数学对象, 建立具象与抽象之间的联系。通过反思将“操作”内化为心理“过程”, 再将该“过程”压缩为数学“对象”, 最终通过整合, 应用与迁移形成“图式”[6]。需要注意的是, 操作、过程、对象、图式并不是一个线性的结构[7]。学生之间是具有个体差异的, 不管是在外在表现与行动上, 还是在内在的思考方式和思维特点上, 每个学生都有其独特的特点。这意味着学生可能在相同的认知阶段出现不同的认知障碍, 在同一阶段达到不同的认知层次, 出现发展不同步的现象。此时, 存在学习问题的这一个或者多个认知阶段, 就需要重复进行, 甚至会颠倒阶段顺序的现象。同样, 四个阶段之间不是完全的单向关系[7], 学生可以通过“过程”识别“操作”, 从而优化操作路径。将“对象”解压为“过程”, 反思思考路径与方向, 提升思维层次。通过“图式”联系“对象”, 提高综合应用能力。APOS 理论中的四个阶段是一个动态的、相互关联的过程, 四个阶段之间的相互影响和作用也不容忽视[8]。教师要根据课堂生成情况灵活调整教学方式, 允许学生根据自身学习情况灵活调整学习路径, 从而更有效地达成教学目标。APOS 理论四阶段的关系如图 1 所示。

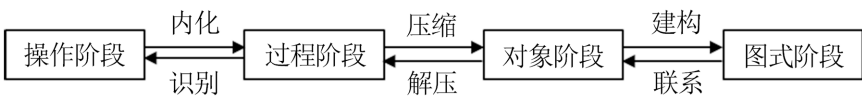


Figure 1. The four-stage relationship of the APOS theory
图 1. APOS 理论四阶段的关系

“操作”阶段是知识建构的起点。学生对“对象”进行操作, “对象”可以是指现实情境, 数学公式, 教学模型等, 可以是具体的, 也可以是抽象的。学生根据教师提出的引导性问题或者具体操作的指令, 基于已有的直接或间接经验, 对“对象”进行外部的, 程序性的操作。例如观察, 感知, 分析, 计算等, 从而获得数学概念建构的认知基础。在这一阶段, 学生通常能够按照操作程序进行“操作”, 但往往缺少“思维”的参与, 难以理解数学概念内部蕴含的规律。

“过程”阶段是知识建构关键。学生开始反思在“操作”过程中遇到的问题, 分析其中的数量关系, 图形结构, 捕捉共性与规律, 逐步将“操作”内化成一种思维过程。在此阶段, 学生不依赖于具体的操作活动, 可以在思维层面完成操作, 厘清内在数量, 图形关系。学生在此阶段, 对数学概念的理解开始从表象阶段过渡到本质阶段, 慢慢意识到数学概念内部的结构特征。

“对象”阶段是知识建构的结果。学生厘清了数学概念的内部结构特征, 将“过程”压缩为一个具有静态结构的整体, 一个可以独立操作和思考的对象。这个“对象”就是数学概念, 并且用文字, 数学符号, 图象等灵活表示数学概念。在此阶段, 学生将数学概念视为一个认知“符号”存入知识结构中, 能从

整体上理解数学概念的本质, 掌握数学概念的内涵与外延, 能应用数学概念解决问题, 思维能力得到更深层次的发展。

“图式”阶段是知识建构的深化。学生按照自己的逻辑路线, 将新获得的“对象”与头脑中原有的认知图式结合, 进行重新分类, 整合, 归纳, 对知识进行更高层次的加工, 形成新的图式。在此阶段, 学生能够区分不同数学概念之间区别与联系, 能够快速判断某个问题是否属于这个图式, 用哪个数学概念解决问题, 能优化解决方案, 从而灵活地解决问题。

APOS 理论揭示了学生建构数学概念的心理路径, 从具体操作到抽象思维的认知发展过程[9]。为知识建构提供了一种系统化的框架, 为教师设计循序渐进的教学环节提供了坚实的理论基础。

2.2. RMI 原则

RMI 原则是我国数学家徐利治教授提出, 是全称关系(Relationship)、映射(Mapping)与反演(Inversion)原则的简称[10]。RMI 原则是数学中普遍适用的化归方法论, 核心思想是“转化”思想[11]。在数学中, 一般将某种复杂的, 抽象的, 未知的问题, 通过某种转化方式, 转化为简单的, 直观的, 已知的问题, 从而化简解答过程, 得到原问题的解。该原则被广泛应用于数学问题的解决和数学理论的构建。设 R 表示一组原象的关系结构, 其中包含着待确定的原象 x , 令 M 表示一种可逆映射, 通过 M 的作用, 将原象关系结构 R 映射为映象关系结构 R^* , 其中包含未知原象 x 的映象 x^* , 如果可以在 R^* 中求解出 x^* , 则通过逆映射, 即反演 M^{-1} 可确定原象 x [12]。RMI 原则理论框架如图 2 所示。

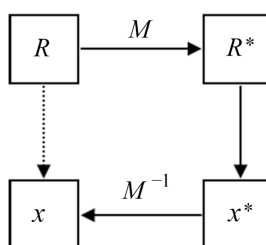


Figure 2. The theoretical framework of the RMI principle
图 2. RMI 原则理论框架

具体来说, 要利用 RMI 原则解决问题, 首先要分析原象关系结构 R , 确定 R 中的数量关系或规律, 以及确定待解决的问题 x 。当在 R 中求解 x 比较困难时, 把原象关系结构 R 映射为映象关系结构 R^* , 映射不仅包括对应与变换, 也包括概念映射、化归、转移等更一般的范畴[13]。通过映射把待解决问题 x 转化为目标问题 x^* , 例如把几何问题转化为代数问题。这里有一个关键步骤是“定映”, 所谓“定映”就是要从映象关系结构 R^* 中确定出目标问题 x^* 的属性[10]。就是在 R^* 里, 找出目标问题 x^* 的数值类, 关系类, 结构类等方面的特征。得出问题 x^* 的解后, 通过反演得到原问题 x 的解, 反演不仅包含“逆映射”, 还包括复原、翻译、解释等[13]。

将 RMI 原则应用于数学概念教学, 为概念的形成与理解铺设了一条“化难为易”的思考路径, 可以帮助学生动态把握数学概念形成的思想方法, 快速找到问题的本质。

3. APOS 理论与 RMI 原则融合模型构建

3.1. 概念形成

概念形成与概念同化是获得数学概念的两种基本方式[2]。概念形成是指学生在老师的指导下, 基于已有认知经验与知识储备, 通过对一系列具体实例, 问题情境, 进行观察, 计算, 分析等操作, 逐步提炼

出数学对象的本质属性, 抽象出数学概念。这一过程模拟了数学概念的“原始”发生过程, 是以学生为主体的“再创造”过程。有学者曾指出, 数学概念产生的历史过程很重要, 它可以深化学生对概念的理解[14]。我们不可能完整复刻历史, 但是可以创设情境, 引导学生经历数学概念的创造过程。数学源于生活, 可以通过寻找数学与生活的“最佳连接点”来激发学生探索兴趣, 突破思维困惑, 从而自主完成数学概念的建构, 提升教学效果[15]。教师需结合学生认知规律, 精心选择生活资料, 激活学生原有的知识经验, 设计有效的引导问题, 避免生搬硬套, 让学生真正产生思维层面的思考活动, 总结数学概念特征, 把握数学概念的本质。概念形成教学流程如图 3 所示:



Figure 3. Flowchart of concept formation teaching process
图 3. 概念形成教学流程图

3.2. 概念形成与 APOS 理论的联系

APOS 理论解释了学生理解数学概念的认知过程, 为教学设计提供了阶段性的指导依据[2]。在数学概念生成过程中, 学生先通过具体的操作活动感知规律或法则, 继而通过反思完成知识与经验的内化, 逐步提炼出数学概念的本质特征, 明晰数学概念的内部结构。此时概念呈现一种静态结构关系[2], 学生在认知层面将其理解为一个独立可操作的对象。最后, 将新获得的数学概念与认知结构中已有的图式建立有逻辑的实质性联系, 完成新的认知图式的构建。APOS 理论建构了概念形成的认知路径, 概念形成是数学概念获得的方式。这两者都指向学生自主建构数学概念, 能够完美的契合。两者之间的关系如图 4 所示。

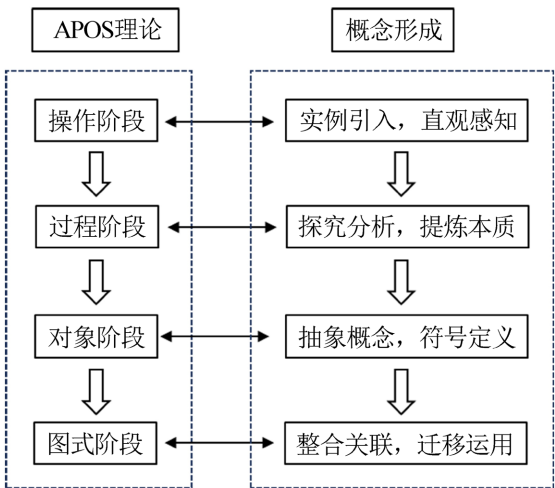


Figure 4. The connection between APOS theory and the formation of concepts
图 4. APOS 理论与概念形成的联系

3.3. 概念形成与 RMI 原则的联系

RMI 原则作为一种重要的数学思想方法, 为数学概念建构过程中的思维转化提供了方法论指导。利用 RMI 原则可以将现实情境映射为具有规范数学结构的数学情境, 初步完成具象到抽象、多元表征到统一结构的转化。简化后数学情境中具有更加清晰的数学结构, 有助于提炼本质属性与核心规则, 形成数学概念的规范表述。最后将数学情境中抽象出的数学概念通过逆映射解释现实情境中的数学关系, 解决

实际问题。RMI 原则与概念形成都指向学生自主建构数学概念, 以 RMI 原则指导概念形成教学, 既遵循“由具体到抽象”的认知规律, 又显性化由现实到数学的转化思想, 在落实数学概念形成的同时落实数学思维培养。两者之间的关系如图 5 所示。

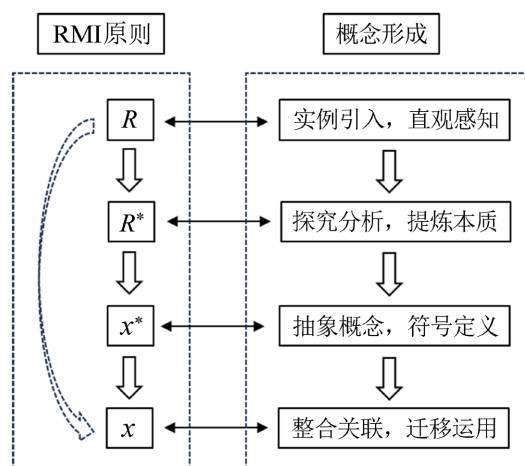


Figure 5. The connection between RMI principles and the formation of concepts
图 5. RMI 原则与概念形成的联系

3.4. APOS 理论与 RMI 原则的联系

通过概念形成这一概念获得方式使得 APOS 理论与 RMI 原则建立起了联系, 概念形成是概念教学的实施流程, APOS 理论是学生的内在认知规律, RMI 原则是处理数学问题的重要思想方法。APOS 理论为概念形成的实施过程提供了心理学依据与分步实施标准, 而 RMI 为概念形成提供转化工具与思维支架, 概念形成则为 RMI 原则提供落地场景, 让转化思想伴随概念建构自然生成。图 6 展示了 APOS 理论与 RMI 原则的联系。

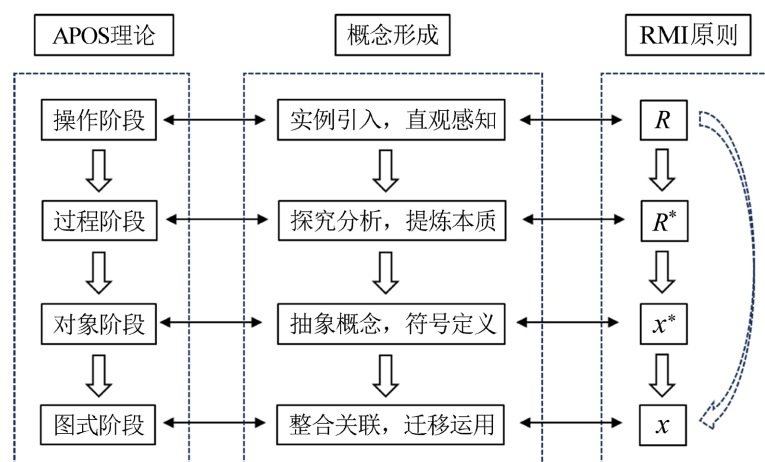


Figure 6. The connection between APOS theory and RMI principles
图 6. APOS 理论与 RMI 原则的联系

3.5. APOS 理论与 RMI 原则融合模型的构建

APOS 理论与 RMI 原则在数学概念教学中具有深层的内在互补性。前者揭示了数学概念建构的认知

路径, 后者提供了数学概念建构的思维操作路径, 分别从认知心理学与数学方法论两个方面为数学概念教学提供理论支撑。以 APOS 理论四阶段为认知依据, 设计教学流程和教学活动。以 RMI 原则的“化归”思想为方法指导, 抽象数学概念。该教学模型构建遵循以下原则: 一是循序渐进原则。教学活动遵循“操作-过程-对象-图式”的认知发展顺序, 避免认知断层。二是思想方法明晰化原则。有意识地引导学生反思, 感知转化思想, 领悟深层数学思维。三是自主建构原则。APOS 理论强调知识是由学生主动建构的, RMI 原则的有效运用也依赖于学生积极的思维参与。基于以上教学理念与原则, 系统地设计了 RMI 原则融入 APOS 理论四阶段的路径, 构建两者融合的教学模型, 如图 7 所示:

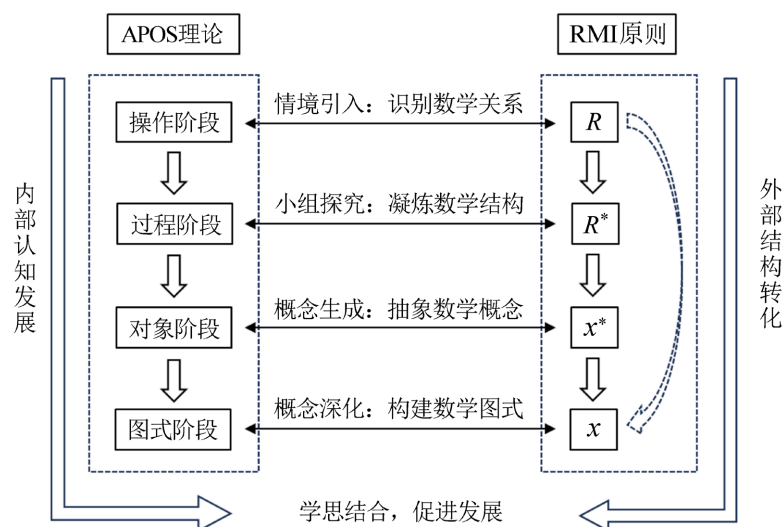


Figure 7. Teaching model based on the integration of APOS theory and RMI principles
图 7. 基于 APOS 理论与 RMI 原则融合的教学模型

该模型将 APOS 理论与 RMI 原则有机结合, 形成一个相互补充的有机整体。在数学概念教学中, APOS 理论为 RMI 原则的应用提供了可观测的认知锚点, RMI 原则为 APOS 理论的应用提供了可操作的思维工具。在操作阶段, 学生通过自主探究或者执行教师的操作指令, 逐步感知情境中蕴含的数量关系或图形结构, 建立原象关系结构 R , 找到关键结构特征, 为“映射”的建立奠定认知基础。在过程阶段, 学生在思维层面完成操作, 剥离现实背景, 从数学的视角审视其中的数量关系或者图形结构, 推动从生活情境到数学情境的“映射”, 建立映象关系结构 R^* 。在对象阶段, 通过提炼数学概念本质特征, 获得数学概念 x^* 。在图式阶段, 学生通过课堂练习, 解决实际问题 and 反思, 在“反演”中完成数学概念的深化与知识迁移。RMI 原则同样可以帮助学生完成 APOS 理论四阶段的顺利过渡。“映射”这一转换过程是指按照某种“规则”将一类对象整体地转换为另一类对象。学生通过反复执行映射操作, 有目的, 有方向地将零散的外部操作转化映象关系结构 R^* , 从而促进外部操作内化为心理过程。“定映”是指在映象关系结构 R 中确定数学概念的本质特征和内部结构。在这一过程中, 学生更加关注“映射”中的思维过程, 映象关系结构 R 中的基本要素, 从而得到数学概念 x^* 的本质属性。这种有方向, 有目标的思考为“过程”凝聚为“对象”提供了立足点, 有助于学生完成从“过程”到“对象”的压缩。“反演”是将在映象关系结构 R^* 中得到的数学概念还原回原象关系结构 R , 解释生活情境中或者数学问题中的数量和结构关系。学生需要建立原象与映象的双向联结, 并且能够灵活切换。这是一种双向建构, 有助于打破单向认知的局限, 促使学生将不同数学对象, 不同表征方式联系起来, 建构可逆的认知网络, 有助于拓展并完善学生的认知图式。

4. 基于 APOS 理论与 RMI 原则融合教学模型的函数概念教学

4.1. 操作阶段：情境引入，识别数学关系

在该阶段创设学生能够有效操作与感知的生活情境 R 。学生通过独立思考，计算，绘图等操作对生活情境 R 进行有效分析，识别其中蕴含的两个变量之间的函数关系 x 。在该环节中，学生对生活情境中呈现的数量关系，如解析式，图象，表格等施加相应的“操作”，找出其中蕴含的数学关系，将生活情境 R 转化为数学情境 R^* 。

1) 复习回顾

(1) $y = x + 1$

(2) $y = 2x^2 + x - 1$

(3) $y = \frac{1}{x}$

问题 1：上述式子中的 y 是 x 的函数吗？分别是什么函数？

问题 2：这些函数有什么共同点？

设计意图：通过具体的实例，回顾基于“变量说”的函数的定义，帮助学生感知两个变量之间“唯一确定”的依赖关系，为后续抽象函数的概念做好知识铺垫。

2) 生活情境引入

情境 1：某“复兴号”高速列车加速到 350 km/h 后保持匀速运行半小时。这段时间内，列车行进的路程为 s (单位：km)，运行时间为 t (单位：h) [16]。

问题 1：路程 s 和时间 t 之间有什么关系？你能用数学式子表示吗？

问题 2：这里路程 s 是时间 t 的函数吗？

问题 3：你能用集合的语言描述路程 s 和时间 t 的变化范围吗？

设计意图：学生通过分析列车运行路程 s 和时间 t 间的对应关系，代入任意时间 t 的值进行计算操作，得出在任意时间 t ，都有唯一确定的路程 s 与它对应这一结论。并且结合情境 1 与对应关系，找出路程 s 和时间 t 的变化范围。学生可以直观感知以解析式表示的函数关系，抽象出其中的数学关系，实现生活情境 R 到数学情境 R^* 的映射。

情境 2：图 8 是某市某天的气温变化图，气温 θ (单位： $^{\circ}\text{C}$) 和时间 t (单位：h) 的变化情况如图所示。

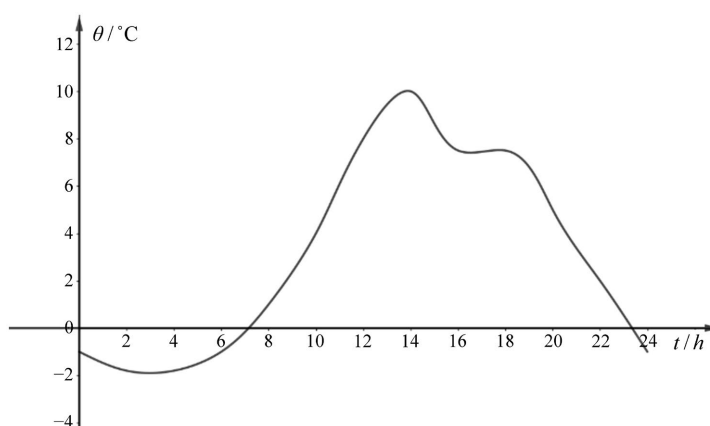


Figure 8. Temperature change chart of a certain city on a certain day
图 8. 某市某天气温变化图

问题 1: 这里气温 θ 是时间 t 的函数吗?

问题 2: 你能用集合语言描述气温 θ 和时间 t 的变化范围吗?

设计意图: 学生通过观察图 8 给出的曲线的特点, 或者在曲线上描点, 得出在任意一时刻 t , 都有唯一确定的温度 θ 与它对应这一结论, 同时找出气温 θ 和时间 t 的变化范围。学生可以直观感知以函数图象表示的函数关系, 理解其中蕴含的数学关系, 实现生活情境 R 到数学情境 R^* 的映射。

情境 3: 人口数量变化趋势是我们制定一系列相关政策的依据。从中国统计年鉴中可知我国 2017~2024 年(年末)人口数据资料¹, 如表 1 所示。

Table 1. Population statistics table
表 1. 人口数量统计表

年份(n)	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
总人口(m)/亿	14.00	14.05	14.10	14.12	14.13	14.12	14.10	14.08

问题 1: 你认为总人口数 m 是年份 n 的函数吗?

问题 2: 如果是, 你能仿照情境 1 与情境 2 的方法来刻画这个函数吗?

设计意图: 学生通过对人口数量统计表这一生活情境 R 的分析, 发现任意一年, 都有唯一确定的人口数量, 找出 m 与 n 的变化范围, 尝试用数学的语言描述两个变量之间的关系。学生可以直观感知以表格表示的函数关系, 找出其中的数学关系, 实现生活情境 R 到数学情境 R^* 的映射。

学生在初中阶段是基于“变量动态变化”的视角学习函数, 可能存在解析式, 图像, 表格就是函数的错误认知, 对函数的理解停留在表面。教师可以通过循序渐进问题链引导学生进一步思考其内部特征。如在情境 1 中, 教师在教学中可以追问: 1) 在这个情境中有几个变量, 分别是哪些? 2) 在任意确定的时间 t , 路程 s 是否唯一? 我们如何判断? 3) 时间 t 可以取值为 3 吗? 如果不可以, 那时间 t 的取值范围是多少? 4) 怎么确定路程 s 的取值范围? 5) 如何用集合的语言描述这两个变量间的核心特征? 在引导学生解决问题过程中, 要聚焦“两个集合”“唯一确定”“对应关系”等关键信息。如在解决追问 2 时, 给学生留下足够的时间, 让学生代入取值范围内的任意时间 t 进行计算, 验证在任意确定的时间 t , 路程 s 的唯一确定性, 或者让学生画出函数图象, 为后续抽象函数关系奠定基础。教师还可以利用多媒体将情境 1 中的变量关系可视化, 通过动态演示, 帮助学生理解“唯一确定”和变量的“取值范围”。同样, 在分析情境 2 和情境 3 中的数学关系时, 也可以设计类似的问题链。

4.2. 过程阶段: 小组探究, 凝练数学结构

Table 2. Summary table
表 2. 汇总表

问题情境	自变量的取值集合	对应关系	因变量的取值集合	所有函数值构成的集合
情境 1	$A_1 = \{t 0 \leq t \leq 0.5\}$	$s = 350t$	$B_1 = \{s 0 \leq s \leq 175\}$	B_1
情境 2	$A_2 = \{t 0 \leq t \leq 24\}$	图 8	$B_2 = \{\theta -4 < \theta < 12\}$	$C_2 = \{\theta -1.9 \leq \theta \leq 10\}$ $C_2 \subseteq B_2$
情境 3	$A_3 = \{2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024\}$	表 1	$B_3 = \{14.00, 14.05, 14.10, 14.12, 14.12, 14.12, 14.09, 14.08\}$	B_3

¹<https://www.stats.gov.cn/sj/ndsj/2025/indexch.htm>

进入过程阶段, 将剥离生活背景, 聚焦两个变量的对应关系与变化范围, 建立数学情境 R^* 。 R^* 就是上一阶段的抽象成果, 如表 2 所示。在 R^* 中进一步分析函数的特征。在这一阶段要引导学生用数学的眼光观察 R^* 中的数学结构, 用数学思维思考 R^* 中的共同特点。教师需要设计适当的教学活动, 让学生体会从集合 A_1, A_2, A_3 到集合 A , 从集合 B_1, B_2, B_3 到集合 B , 从具体解析式, 图像, 表格到对应关系 f 的抽象过程[17]。这也是 RMI 原则中的关键步骤“定映”, 对数学情境 R^* 呈中现的变量关系进行更高层次的抽象, 确定函数概念 x^* 的结构特征, 建立函数概念的内部联系。

问题 1: 情境 1~情境 3 中的函数有哪些共同特征?

问题 2: 你能概括出函数概念的本质特征吗?

设计意图: 学生找出三个不同表象的生活情境中的数学关系, 建立数学情境 R^* (表 2)。在数学情境中再次抽象概括, 找出这三个函数共同特征。都包含两个非空数集, 用 A, B 来表示, 都有一个对应关系, 对于数集 A 中的任意一个数 x , 按照对应关系, 在数集 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应[16]。让学生感知函数从“变量说”的动态变化升级为“对应说”的静态对应关系的思维转变, 体会从集合对应视角定义函数的严谨性与抽象性。

学生对三个情境中的数学关系的理解可能还不能完全脱离客观背景, 因此学生对三个函数的理解是独立的, 零碎的, 可能导致学生找不到三个函数的共性, 或者无法准确理解对“对应关系”。在这一阶段, 教师可以让学生进行小组交流, 共同概括三个函数的共同特征。在学生小组交流过程中, 教师需要在学生理解困难的地方提供必要的帮助。小组交流结束后, 先让学生展示自己的发现, 教师根据学生的概括成果加以点评, 然后在师生共同归纳总结。教师在引导学生归纳共同特征时, 要结合生活情境, 利用多媒体, 降低学生的认知障碍。如在讲解对应关系时, 情境 1 中的对应关系是解析式 $s = 350t$, 情境 2 中的对应关系是图 8, 情境 3 中的对应关系是表 1, 虽然对应关系的表现形式不同, 但是三个情境中都有一个确定的对应关系, 在数学中我们用小写字母 f 表示对应关系。在讲解过程中, 可以边讲边呈现相应知识点, 帮助学生理解。也可以让学生自己指出对应关系, 加强师生互动。

4.3. 对象阶段: 概念生成, 抽象数学概念

引导学生跳出动态的“过程”, 将函数的概念凝练为静态的、独立的, 可操作的数学对象。结合在数学情境 R^* 中确定的函数概念 x^* 的本质特征, 用严谨规范的文字和数学符号表述函数的概念, 完成对函数概念的抽象。

根据上一阶段对数学情境 R^* 中的数学关系的讨论, 分析, 与总结, 师生共同归纳出函数的概念: 一般地, 设 A, B 是非空的实数集, 如果对于集合 A 中的任意一个数 x , 按照某种确定的对应关系 f , 在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数, 记作 $y = f(x), x \in A$ 。其中, x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域; 与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值, 函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域[16]。

问题 1: 函数概念中必不可少的要素有哪些?

问题 2: 如何理解概念中的 f 和 $f(x)$?

问题 3: 集合 B 是等于值域吗?

设计意图: 在数学情境 R^* 中厘清函数概念的核心——函数“三要素”[18], 并且找出三者间的关系。由于函数符号 $y = f(x), x \in A$ 有较高的抽象性, 可回到生活情境中再次辨析其内涵, 理解每个数学符号的含义。帮助学生把握函数的本质, 从整体的角度审视 $y = f(x), x \in A$, 完成对函数概念内部结构的构建, 实现函数在生活情境、文字表述与符号语言间的灵活转化。

在这一阶段, 容易出现机械记忆函数概念的文字定义的现象。学生对“任意性”“唯一性”“对应关

系”的理解不到位,不能正确理解函数符号 $y=f(x)$, $x\in A$ 。由于函数的概念具有较高的抽象性,学生理解的难度本就比较,因此讲解时可以用具体的实例帮助学生理解,同时也可以让学生最大程度地参与课堂。讲解概念时,可在关键词的地方加重语气,提醒学生注意,利用板书,绘制数学图象和箭头图帮助理解。在讲解集合 A , B 时,可以反问学生,集合 A , B 能不能是空集,为什么?讲解对应关系时可以举例:数学期中考试结束后,每一个学号,只有一个数学成绩与它对应。讲解符号 $f(x)$ 时,可以结合情境1中的函数关系,让学生辨别 f , $f(x)$, $f(0.1)$, $f(a)$ 的含义,帮助学生理解函数与函数值。讲解三要素时,反问学生如果缺少其中一个要素可以吗?引导学生更加深入的思考。

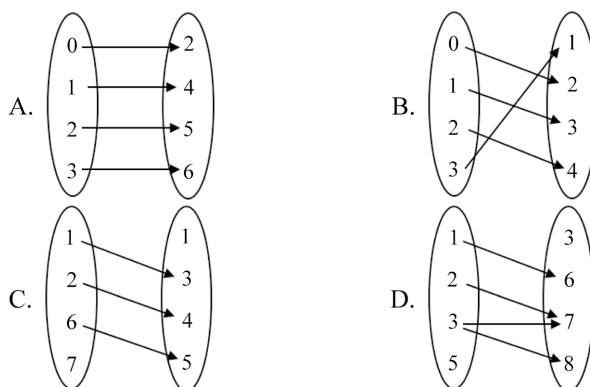
4.4. 图式阶段:概念深化,构建数学图式

这一阶段旨在将新构建的“对象”——函数概念与原有知识体系进行深度整合,构建结构化、可运用、可迁移的认知图式。在RMI原则的反演阶段,用函数的概念 x^* 解释情境中的函数关系,解决实际问题。该过程并非机械堆砌知识点,而是在更高层次上,将函数的概念与以前学过的知识点,数学问题,生活实际相联系,建立系统化认知。

一. 课堂练习

例1 写出情境1,情境2,情境3中的函数的定义域与值域,并用函数的定义描述这个函数。

例2 (多选)下列从集合 A 到集合 B 的对应关系中是函数()。



例3 一枚炮弹发射后的轨迹为二次函数,发射后经过26s落到地面击中目标,炮弹的射高为845m,设炮弹距离地面的高度为 h (单位:m),发射后飞行时间 t (单位:s) [16]。

(1) 请写出 h 与 t 之间的关系式,并画出简易图像。

(2) 写出(1)中所表示函数的定义域与值域,并用函数的定义描述这个函数。

设计意图:让函数概念 x^* 回归生活情境,解释生活情境中的变量关系,深化理解。结合实际问题的考察,考察学生是否掌握函数概念,理解函数三要素,让学生在问题解决中建立知识之间的联系,灵活应用函数的概念,提升学生的推理能力与应用能力。引导学生领悟RMI原则,实现由掌握知识到领悟数学思想的升华。

二. 课堂小结

问题1:今天的内容与你已有的知识之间建立了哪些新的联系?你能否用自己的话说说本节课的核心收获?

问题2:你能否归纳函数的概念是如何形成的?

问题3:在本次课学习中你体会到了哪些思想方法?

设计意图:通过开放性的问题,引导学生回顾整个学习历程,反思是如何运用 RMI 原则中的转化思想。在函数概念的生成过程中,先将生活问题数学化,让变量间的数学关系变得更加清晰,从而总结函数的特征,抽象函数的概念,最后用函数的概念解释生活中的变量关系。领会从特殊到一般,一般到特殊,数形结合等思想。学生通过反思总结,构建稳定且可迁移的认知结构。

学生虽然已经知道了函数的概念,但是却不一定会用定义描述某个具体的函数,对函数概念的理解碎片化,没有形成整体框架,无法进行知识迁移。在学生进行课堂练习时,教师在巡视过程中关注学生出现错误的地方,及时提供指导。讲解时重点关注学生出现错误的地方,讲解结束后立即给出类似的问题,让学生即时解决,以检测学生掌握程度。在课堂小结阶段,可以先让学生根据自己的理解绘制思维导图,包括关键词,自己的理解,易错点等,有助于学生构建概念图式。

5. 结语

将 APOS 理论和 RMI 原则论融合模型应用于函数概念的教学,并进行相应的教学设计,以期实现数学知识与数学思维的深度融合,知识学习与核心素养协同落地,助力学生深度把握函数本质。但这只是对这一教学进行了理论层面的探讨,对于该融合模型在其他数学概念中的教学适用性与有效性,还需进一步研究。如该模型的不适用于集合概念的教学。将该融合模型应用于“立体几何”教学时,可以将具体实物转化为具有某种图形结构的几何模型,将实物模型映射成数学模型。将该融合模型用于“导数的概念”的教学时,可以物理中的平均速度和瞬时速度为切入点,让学生直观感知导数,然后再将其映射为代数问题,将其转化为函数平均变化率和瞬时变化率问题,从而让学生从数学变化率的角度认识速度问题。但因为函数问题抽象性较高,可以将这个问题再次映射转化,转化为几何问题,曲线的切线和割线问题,学生通过自己画图,或者教师利用 GeoGebra 软件动态呈现曲线的割线与切线间的变化关系,进而探究这一过程中的代数关系,就可以有效降低学生的认知障碍。在这个过程中经历了两次映射,建立了导数的物理意义,代数意义和几何意义之间的有效联系,可以帮助学生理解导数的概念。由于不同数学概念的抽象性,内部结构,表征方式具有显著差异,将该模型应用于代数,几何与概率统计等领域的概念建构的适用性还需进一步研究。该融合模型中的“映射”是灵活的,要根据不同的数学概念的特点确定有效的转化路径。真实的课堂是多变的,将该融合模型应用于数学概念教学还存在许多待改进问题。教师要对数学概念本身有深刻的认知,能够明确学生认知难点。教师需要建立与目标概念的结构具有“对应关系”的映象关系结构,形成有效映射。根据学生认知规律设计有效的教学活动,充分利用现代信息技术,引导学生完成问题的转化。课堂具有生成性,学生具有差异性,教师需通过课堂观察,提问,课堂练习等多种渠道,实时关注学生学习进程,调整教学活动。这要求教师需要灵活应用该模型,让教学成为动态的,以可观测的学情为证据支撑的师生有效互动。这些都对教师的能力提出了较高的要求。

基金项目

内江市教育与体育局项目“人工智能赋能普通高中数学课堂精准施教的实施路径研究(2025056)”、内江师范学院教学改革项目基础教育合作专项“数据驱动下中学数学课堂精准教学的策略与实践研究(JJHZ2505)”。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.
- [2] 邵光华, 章建跃. 数学概念的分类、特征及其教学探讨[J]. 课程·教材·教法, 2009, 29(7): 47-51.
- [3] 吴家琴. 浅谈以理解概念为核心的数学教学[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2014, 27(6): 157-158, 164.

- [4] 濮安山, 史宁中. 从 APOS 理论看高中生对函数概念的理解[J]. 数学教育学报, 2007, 16(2): 48-50.
- [5] 史宁中, 濮安山. 中学数学课程与教学中的函数及其思想——数学教育热点问题系列访谈录之三[J]. 课程·教材·教法, 2007(4): 36-40.
- [6] Feng, C.Y. (2025) High School Mathematics Teaching Case Based on APOS Theory—Taking “Cosine Theorem” as an Example. *Advances in Education*, **15**, 609-616. <https://doi.org/10.12677/ae.2025.153446>
- [7] 马晓丹. APOS 理论探索的反思与超越[J]. 教学与管理, 2020(33): 74-77.
- [8] 艾尔肯·吾买尔, 王守哲. 论 APOS 视角下的概念性变式教学[J]. 长春大学学报, 2016, 26(6): 94-97.
- [9] 乔连全. APOS: 一种建构主义的数学学习理论[J]. 全球教育展望, 2001, 30(3): 16-18.
- [10] 殷启正. RMI 原则的产生、分类和应用[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版), 1987, 13(4): 109-115.
- [11] 陈大波. 关系映射反演法(RMI 原则) [J]. 宁德师专学报(自然科学版), 2004, 16(1): 3-57.
- [12] 董建勋. 基于 RMI 原则的高中圆锥曲线的研究与实践[D]: [硕士学位论文]. 吉林: 北华大学, 2019.
- [13] 李亚琼. RMI 原则的理论探析与教学应用思考[J]. 中学数学杂志, 2024(7): 1-4.
- [14] 薛红霞. 在数学教学中渗透数学史的作用[J]. 教育理论与实践, 2005(24): 41-43.
- [15] 李莉. 浅谈数学与生活的最佳连接点[J]. 小学教学研究, 2007(3): 34-35.
- [16] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书·数学·A 版·必修第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [17] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中教科书·教师教学用书·数学(A 版)·必修第一册[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [18] 刘春艳, 冯启磊. 基于数学抽象的概念形成: 模型与案例[J]. 数学通报, 2021, 60(6): 20-25, 29.