

阶梯式问题链驱动下课堂教学与实践 ——以罗尔中值定理为例

刘立民, 陈继强*

河北工程大学数理科学与工程学院, 河北 邯郸

收稿日期: 2026年7月28日; 录用日期: 2026年9月3日; 发布日期: 2026年9月16日

摘要

针对罗尔中值定理传统教学重结论识记、轻思维建构的突出问题, 本文以数学核心素养培育为导向, 构建以几何直观为载体、阶梯式问题链为主线的探究式教学模式, 遵循“图形观测 - 规律猜想 - 反例证伪 - 条件推演 - 逻辑证明 - 迁移应用”认知逻辑, 设计层级递进的系列设问, 引导学生自主完成定理内涵与证明体系建构。最后选取两组基础均衡的平行教学班开展对照实验, 测试数据显示: 实验班在定理概念、规范证明、综合应用题型平均分较对照班分别提升12.7分、14.2分、11.5分, 课堂主动探究参与率提升23.6%。实践表明, 该模式可破解微分中值定理抽象难懂的教学痛点, 为微积分定理教学提供可复制的实施范式。

关键词

高等数学, 罗尔中值定理, 问题链, 探究式教学, 教学实验

Scaffolded Question-Chain-Led Pedagogical Practice

—A Case of Rolle's Theorem

Limin Liu, Jiqiang Chen*

School of Mathematics and Physics, Hebei University of Engineering, Handan Hebei

Received: July 28, 2026; accepted: September 3, 2026; published: September 16, 2026

Abstract

Traditional instruction of Rolle's Theorem tends to prioritize rote memorization of conclusions

*通讯作者。

over the construction of students' logical thinking. Oriented toward developing core mathematical competencies, this paper constructs an inquiry-based teaching framework grounded in geometric intuition and scaffolded question-chains. Following the cognitive sequence of graphical observation, hypothesis formulation, falsification with counter-examples, condition reasoning, logical proof and transfer application, hierarchical guiding questions enable students to independently comprehend the theorem and build its proof framework. A controlled teaching experiment was carried out on two parallel classes with comparable prior academic performance. Test outcomes demonstrate that the experimental class achieved score improvements of 12.7, 14.2 and 11.5 points respectively in theorem-concept questions, formal proof tasks and comprehensive-application exercises. The rate of active in-class inquiry participation increased by 23.6%. The results suggest that this approach alleviates teaching difficulties caused by the abstractness of differential mean-value theorems and offers a replicable practical model for calculus theorem instruction.

Keywords

Higher Mathematics, Rolle's Theorem, Question Chain, Inquiry-Based Teaching, Teaching Experiment

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

微分中值定理是连接函数局部导数性质与区间整体性质的核心理论, 而罗尔中值定理作为拉格朗日中值定理、柯西中值定理的前置基础, 在整个高等数学课程体系中承担着承上启下的关键作用[1]。传统课堂大多沿用“定理陈述 - 推导证明 - 例题训练”的讲授模式, 教学重心偏向结论记忆和解题套路训练, 易引发两类型学习困境: 一方面, 学生难以建立几何直观图像和代数定理之间的内在联系, 难以领会定理背后的几何本质; 另一方面, 学生对罗尔中值定理三项成立条件的必要性认识模糊, 面对变式情境时知识迁移能力不足。课堂上若直接开展抽象逻辑推导, 将进一步加重学生的认知负担, 造成理解障碍。

针对微分中值定理的教学优化, 国内已有诸多研究成果, 李昊然[2]将 OBE 理念与问题驱动教学模式应用于微分中值定理整体教学设计, 依托问题情境优化课堂教学; 李瑞芬[3]聚焦罗尔中值定理专项教学设计, 借助现实生活案例完成新课导入, 采用启发探究式课堂模式, 着重引导学生理解定理的各项成立条件; 王书臣[4]等人提出高等数学课堂教学设计应当遵从学生的认知规律, 提倡采用问题导向的教学模式, 以充分调动学生课堂思考积极性; 席阳, 徐章韬[5]指出, 面对抽象的数学知识, 不宜采用直接灌输的授课方式, 可通过梯度设问搭建认知支架, 以此降低学生的认知负担。上述研究虽验证了分层设问的教学价值, 但尚未形成覆盖新课导入、定理推导、例题应用全流程的完整阶梯问题链实施方案, 依托支架式问题链引导学生自主推导定理的实证研究仍较为稀缺。

上述研究根植于建构主义与支架式教学两大核心教育理论。建构主义认为, 学习并非被动接收知识, 而是学习者依托已有经验主动完成意义建构的过程, 微分中值定理内容抽象, 唯有让学生完整经历观察、猜想、证伪、推演、证明的探究流程, 方能实现深度理解[6]。支架式教学以维果茨基最近发展区理论为根基, 要求教师按照学生认知层次搭建递进式学习支架, 将复杂学习任务加以拆分, 并随学生能力提升逐步撤去支架[7]。本文设计的阶梯式问题链正是该理论的课堂实践, 严格遵循“图形观测 - 规律猜想 - 反例证伪 - 条件推演 - 逻辑证明 - 迁移应用”认知逻辑分层设问, 每一组问题对应一级认知支架, 旨在

逐级降低定理学习的认知负荷, 引导学生自主完成数学知识的建构。

国际数学教育领域早已开展支架式分层问题在大学微积分课堂的实践研究。Bakker [7]等指出, 序列化问题支架可有效缓解抽象数学内容的认知压力, 但支架设计必须贴合学生认知起点, 同时对教师备课与课堂调控能力提出较高要求; Anghileri [8]证实分层递进提问能够锻炼学生的逻辑推理能力; Huber [9]等针对大学分析课程的对照实验表明, 阶梯化问题支架可提升学生定理证明水平, 但会增加教师备课工作量。上述国际成果为本文阶梯式问题链的设计思路、课堂实施流程提供重要参考。综合国内外研究现状, 针对微分中值定理的全流程阶梯式问题链实证教学仍存在研究缺口, 基于此, 本文以罗尔中值定理为载体, 设计完整阶梯式问题链探究方案, 依托平行班级对照实验量化检验教学效果, 为微积分定理教学提供可复制的实践路径。

2. 问题链探究教学模式框架

本模式以学生认知发展规律为核心, 以几何直观为辅助、阶梯式问题链为主线, 整体分为新知探究、定理证明、例题应用三部分, 核心设计要点如下:

(1) 递进式设问逻辑: 按照“观察 - 猜想 - 证伪 - 推导 - 证明”的顺序设置五层问题, 由浅入深引导学生自主推导定理全部条件;

(2) 常规可视化支撑: 依托多媒体动态绘图展示曲线形态, 配合板书分步拆解证明与辅助函数构造, 普通课堂均可实施;

(3) 小组研讨互动: 以小组讨论、成果展示为主要互动形式, 教师针对研讨偏差补充引导性问题;

(4) 通用迁移性: 整套设问逻辑可直接迁移至拉格朗日中值定理、柯西中值定理的教学中。

课堂实施流程: 曲线图像展示→基础特征观测设问→极值规律猜想→反例修正猜想→图像对比推导约束条件→定理严谨证明→例题巩固→实际应用。

3. 基于阶梯式问题链的罗尔中值定理课堂实施路径

基于光滑曲线的几何特征分析, 构建层层递进的问题链作为教学主线, 实现“问题驱动 - 认知建构”的有机统一。设光滑曲线 $y = f(x), x \in [a, b]$, 将其置于平面直角坐标系中。

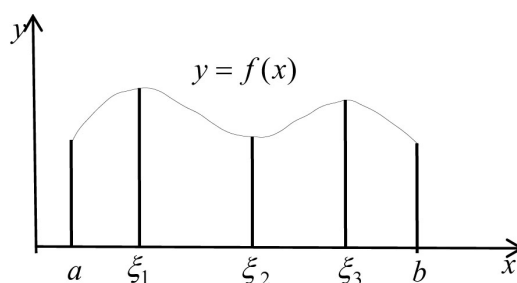


Figure 1. Geometric illustration

图 1. 几何直观示意图

3.1. 问题链起点: 观察曲线特征, 提炼函数基本性质

观察图 1, 设置探究问题: 闭区间 $[a, b]$ 上的光滑曲线具备哪些稳定图形特征, 对应函数存在何种代数约束?

通过图像综合观测, 归纳两点性质:

(1) 曲线无间断, 对应函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续;

(2) 区间内部无垂直切线, 对应函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导。
图像同步标注连续、可导区间, 完成几何特征向函数性质的转化。

3.2. 问题链深化：聚焦极值点，挖掘导数规律

针对图 1 中 ξ_1, ξ_2, ξ_3 极值点位设问：极值点存在统一几何特征, 该特征对应导数满足何种数量关系？
绘图展示极值点处切线变化并标注对应导数值, 总结统一规律：全部极值点处切线水平, 满足 $f'(\xi_i) = 0, (i=1,2,3)$, 建立极值点与导数零点的对应关系。

3.3. 问题链拓展：验证猜想普适性，借助反例修正认知

基于极值观察, 形成初始猜想：若函数在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 开区间 (a,b) 内可导, 则在区间内是否一定存在导数为零的点？

绘制一次函数 $f(x) = x (x \in \mathbb{R})$ 图像并给出导数 $f'(x) \equiv 1 (x \in \mathbb{R})$, 说明曲线 $y = x$ 无水平切线。由此可得仅连续、可导两个条件不足以保证导数零点存在, 需补充额外约束条件。

3.4. 问题链突破：对比两类曲线，推导端点等值约束

设置对比探究问题：同为闭区间连续、开区间可导的函数, 部分曲线内部存在水平切线, 部分曲线内部不存在水平切线, 两类图像的核心差异是什么？

根据闭区间上连续函数的最值定理, 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数必定存在最大值与最小值。图 1 中的峰点、谷点对应函数的局部极值点(即局部邻域内的最值点), 由费马引理可知, 这类局部极值点处的导数为零。但需注意, 函数的最大值、最小值既可以出现在区间内部, 也可以出现在区间端点上。因此, 当函数的最大值与最小值同时落在区间的两个端点时, 区间内部可能不存在峰点与谷点, 也就找不到满足导数为零的内点。若要保证区间内部至少存在一处局部极值点, 则需对端点函数值增加约束条件。

因此, 对比两类对照图像开展分析：一类满足 $f(a) \neq f(b)$, 函数最值仅能出现在区间端点；另一类满足 $f(a) = f(b)$, 两端点处函数值相等, 此时最大值与最小值不可能同时位于区间端点(常函数除外), 由此可保证区间内部至少存在一处峰点或谷点, 该点处导数等于零。

结合图像对比与逻辑推演, 便可提炼出罗尔中值定理的关键条件： $f(a) = f(b)$ 是保证区间内部存在极值点的核心前提。

3.5. 问题链闭环：整合全部条件，完成定理严谨证明

整合全部约束条件设问：若函数 $f(x)$ 同时满足在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 是否一定存在导数为零的点？

结合闭区间上连续函数最值定理(设 M 为区间最大值, m 为区间最小值), 分两种情况讨论：

(1) 若 $M = m$, $f(x)$ 为常函数 $f(x) = C$ (C 为常数), 则 $f'(x) = 0$, 结论成立；

(2) 若 $M > m$, 因 $f(a) = f(b)$, M 和 m 两个数中至少有一个不等于 $f(a)$ (不妨假设 $M \neq f(a)$), 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使 $f(\xi) = M$, 由费马引理得 $f'(\xi) = 0$, 结论成立。

综上所述, 可得罗尔中值定理[1]:

若函数 $f(x)$ 满足:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续; (2) 在开区间 (a,b) 内可导; (3) 在区间端点处的函数值相等, 即 $f(a) = f(b)$ 。

那么在 (a,b) 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = 0$ 。

教学中分别绘制间断、不可导、端点不等三类反例函数图像, 明确定理条件为充分不必要条件, 但

实际应用时三个条件验证缺一不可。

4. 依托问题链的分层例题探究设计

在完成罗尔中值定理建构后, 为进一步理解定理的应用条件与思维路径, 本部分设计了两类典型例题, 分别对应“判断导函数根的个数”与“构造辅助函数证明方程根的存在性”。例题教学从“纯语言讲解”到“图像支撑 - 数据验证 - 逻辑拆解”的探究式学习, 使学生更清晰地把握定理应用的关键节点。

应用一: 判断导函数方程根的个数

设 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, 证明: 导函数方程 $f'(x) = 0$ 在 $(1,3)$ 内有且仅有两个实根。

实施步骤:

- 1) 绘制函数图像, 标注零点 $x=1,2,3$, 该多项式函数在 $\mathbf{R}$ 上连续、可导, 且在区间 $(1,2)$ 与 $(2,3)$ 的端点处函数值均为零, 满足罗尔定理全部条件。
- 2) 在图像上标注两段区间内水平切线位置, 说明方程至少存在两个实根。
- 3) 通过求导可得 $f'(x)$ 为二次多项式, 至多有两个实根。综上, 方程 $f'(x) = 0$ 在 $(1,3)$ 内有且仅有两个实根。

应用二: 构造辅助函数证明方程根的存在性

设 $c_0, c_1, \dots, c_n$ 不全为零的常数, 且满足 $c_0 + \frac{c_1}{2} + \dots + \frac{c_n}{n+1} = 0$, 证明: 方程 $c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n = 0$ 在 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

实施步骤:

- 1) 本题目标是证明存在 $\xi \in (0,1)$, 使 $c_0 + c_1\xi + \dots + c_n\xi^n = 0$ 。罗尔中值定理的结论是存在一点 ξ , 满足 $F'(\xi) = 0$, 对比发现, 待证方程左侧恰好是某个函数 $F(x)$ 的导函数。因此, 不能直接使用罗尔中值定理, 而需逆向构造其原函数, 将“证明函数零点问题”转化为“证明导函数零点问题”。由此联想积分运算, 提出辅助函数构造思路如下。

- 2) 将待证方程左侧视为导函数, 对其逐项积分, 令

$$F(x) = \int (c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n) dx = c_0x + \dots + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1} + C,$$

积分常数 C 不影响导数结果, 故令 $C=0$, 构造辅助函数: $F(x) = c_0x + \frac{c_1}{2}x^2 + \dots + \frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$, 求导可得

$F'(x)$ 与待证方程左侧完全一致。

- 3) 函数 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 由题设条件得 $F(0) = F(1) = 0$, 满足罗尔中值定理全部条件。

- 4) 由罗尔中值定理, 至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使得 $F'(\xi) = 0$, 即 $c_0 + c_1\xi + \dots + c_n\xi^n = 0$, 故原方程在 $(0,1)$ 内至少存在一个实根。

5. 教学对照实验设计与成效量化分析

5.1. 实验样本与变量设置

选取本校同一工科专业两个基础均衡的大一平行教学班开展对照实验, 对照班 46 人采用传统模式教学, 实验班 48 人采用阶梯式问题链探究教学。两班授课教师、教学课时、教学内容及课后作业安排完全统一, 仅课堂教学模式为唯一变量。实验前高等数学摸底测试显示两班平均分仅相差 0.6 分, 学生原有知识基础无显著差异, 满足对照实验的样本可比性要求。

采用自主编制的罗尔中值定理专题测试卷作为评价工具, 试卷分为定理概念辨析、定理规范证明、

综合证明应用三类题型, 满分 100 分, 经两名高等数学专任教师审核校正。单元教学全部结束后, 统一组织闭卷测试, 并同步开展课堂学情调研, 统计学生课堂主动探究参与比例。

5.2. 量化数据对比结果

本次统计结果除各组平均分之外, 引入各组样本标准差, 用以表征各班级内部学生成绩的离散程度; 采用独立样本 Cohen's d 标准化效应量, 量化两种教学模式带来的组间成绩差异强度。采用教育研究领域通用计算公式:

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \tag{1}$$

$$d = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_p} \tag{2}$$

式中, $n_1 = 48$, $n_2 = 46$ 分别为实验班和对照班样本数量; $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ 分别为实验班和对照班测评平均分; S_1 , S_2 分别为实验班和对照班样本标准差; S_p 为两组合并标准差。

效应量 d 的评判标准如下: $0.2 \leq d < 0.5$ 为小效应; $0.5 \leq d < 0.8$ 为中效应; $d \geq 0.8$ 为强效应。
基于全体学生原始试卷得分, 计算各班平均分与样本标准差, 统计结果如表 1 所示。

Table 1. Comparison of average unit-test scores for two classes (Full score 100)

表 1. 两班单元测试统计结果(试卷满分 100 分)

题型分类	实验班 $n_1 = 48$	对照班 $n_2 = 46$	分数提升幅度
	$\bar{X}_1 \pm S_1$	$\bar{X}_2 \pm S_2$	
定理概念辨析	37.0 ± 7.7	24.3 ± 8.4	12.7
定理规范证明	30.3 ± 6.8	16.1 ± 7.6	14.2
综合证明应用	28.9 ± 7.3	17.4 ± 8.0	11.5
测试总分	96.2 ± 12.5	57.8 ± 13.4	38.4

将表格参数分别代入式(1)和(2)分别计算 S_p 和 d 如下:

定理概念辨析: $S_p \approx 8.07$, $d \approx 0.58$; 定理规范证明: $S_p \approx 7.23$, $d \approx 0.59$; 综合证明应用: $S_p \approx 7.67$, $d \approx 0.48$; 测试总分: $S_p \approx 12.96$, $d \approx 0.56$ 。

课堂参与度统计: 对照班主动参与研讨学生占比 21.4%; 实验班占比 45.0%, 主动探究参与提升 23.6 个百分点。

5.3. 实验结果分析

由表 1 可知, 实验班在各维度上的平均分均高于对照班, 且标准差略小, 说明阶梯式问题链教学在提升成绩的同时, 有助于缩小班内分化。

效应量分析显示: 定理概念辨析($d \approx 0.58$)、定理规范证明($d \approx 0.59$)、测试总分($d \approx 0.56$)均处于中等效应区间, 表明该教学模式对概念理解和逻辑证明能力的提升效果较为稳定; 综合证明应用($d \approx 0.48$)接近中效应, 综合题型对迁移能力要求较高, 提升幅度有限, 符合认知规律。

课堂参与度方面, 实验班主动参与占比(45.0%)较对照班(21.4%)提升 23.6 个百分点; 课后访谈中, 实验班 87.5% 的学生能完整解释定理条件内涵, 远高于对照班(32.6%)。

综上, 阶梯式问题链教学在学业成绩、课堂参与和深层理解三个层面均优于传统讲授教学, 教学效果显著。

研究仅选取两个工科平行班开展教学实验, 样本规模有限, 结论的推广性尚需进一步验证。此外, 该模式的实施对教师的问题链设计能力和课堂组织水平要求较高, 且探究环节需占用一定课时, 在实际推广中面临现实挑战。该模式更适用于高等数学中定理生成、逻辑推导类内容的教学, 对习题讲评课、复习课的适用性有限。后续研究可扩大样本范围, 在更多专业及不同基础班级中开展实践, 以进一步检验该教学模式的普适性。

6. 结论与展望

本文构建的阶梯问题链探究教学模式, 改变了传统课堂“先给出定理、后讲解证明”的授课逻辑, 该模式以几何图像为载体, 通过五层递进式问题完整复刻数学知识“观测-猜想-证伪-推演-证明”的生成过程, 且仅需依托多媒体、板书等常规教学工具即可实施, 操作门槛较低。

对照实验的量化数据表明, 该模式能显著提升学生对微分中值定理的深度理解、证明书写规范性和综合解题能力, 同时有效增强了课堂自主探究的积极性。该问题链的设计逻辑具备通用性, 经微调设问后, 可迁移应用于拉格朗日中值定理、柯西中值定理、泰勒公式等抽象微积分内容的教学, 为高校高等数学定理类课程改革提供了具有可操作性和推广价值的实践范式。

基金项目

河北省高等教育教学改革研究与实践项目《人工智能大语言模型驱动的教学改革与实践》(项目编号: 2025GJJ257)。

参考文献

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 第7版. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [2] 李昊然, 方晓峰, 王静. 基于 OBE 理念与问题驱动式的《高等数学》微分中值定理教学设计[J]. 创新教育研究, 2024, 12(10): 191-198.
- [3] 李瑞芬. 高等数学教学设计探索与实践——以罗尔定理为例[J]. 科教导刊, 2023(32): 113-116.
- [4] 王书臣, 周文书, 刘强. 课程思政背景下高等数学教学设计研究[J]. 大连民族大学学报, 2021, 23(1): 89-93.
- [5] 席阳, 徐章韬. 论基于学习理论的高等数学教学设计[J]. 高等理科教育, 2016(3): 96-102.
- [6] 张建伟, 陈琦. 从认知主义到建构主义[J]. 北京师范大学学报(社会科学版), 1996(4): 75-82, 108.
- [7] Bakker, A., Smit, J. and Wegerif, R. (2015) Scaffolding and Dialogic Teaching in Mathematics Education: Introduction and Review. *ZDM*, 47, 1047-1065. <https://doi.org/10.1007/s11858-015-0738-8>
- [8] Anghileri, J. (2006) Scaffolding Practices That Enhance Mathematics Learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 33-52. <https://doi.org/10.1007/s10857-006-9005-9>
- [9] Huber, T., Sifuentes, J. and Wilson, A.T. (2021) Roadmap to Glory: Scaffolding Real Analysis for Deeper Learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54, 277-291. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2021.1988741>