Creative Education Studies 创新教育研究, 2026, 14(11), 42-52
Published Online November 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ces
https://doi.org/10.12677/ces.2026.1411861

Hans汉斯

基于数学建模理论的导数概念教学研究

——以“平均变化率到瞬时变化率”课例为例

陈万梅，杜　雯

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北　黄冈

收稿日期：2026年8月12日；录用日期：2026年10月29日；发布日期：2026年11月9日

摘　要

导数作为衔接初、高等数学的关键概念，是高中微积分学习的核心难点。文章以数学建模教学理论为指导，将问题分析－模型假设－模型构建－模型求解－模型验证－模型应用流程嵌入导数概念生成全程。以一辆正在刹车的汽车为真实情境，从平均速度入手，通过缩小时间间隔完成从平均变化率到瞬时变化率的认知跃迁。有利于提升了学生对导数本质的理解与运用能力，增强了建模素养、逻辑推理能力及学习动机，改善传统概念课“重形式、轻本质”的现状，可为建模视角下的抽象概念课教学提供参考的案例。

关键词

数学建模理论，导数，瞬时变化率，概念生成

A Study on the Teaching of Derivative Concept Based on Mathematical Modeling Theory

—Teaching Research on Derivative Concept Based on Mathematical Modeling: A Case Study of Average and Instantaneous Rate of Change

Wanmei Chen, Wen Du

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: August 12, 2026; accepted: October 29, 2026; published: November 9, 2026

Abstract

As a pivotal concept bridging elementary and advanced mathematics, the derivative represents a

文章引用: 陈万梅, 杜雯. 基于数学建模理论的导数概念教学研究[J]. 创新教育研究, 2026, 14(11): 42-52.
DOI: 10.12677/ces.2026.1411861

core challenge in senior high school calculus instruction. Grounded in the theory of mathematical modeling pedagogy, this study integrates the six-stage modeling cycle—problem analysis, model assumption, model construction, model solution, model verification, and model application—into the entire process of derivative concept formation. Using a braking automobile as an authentic contextual scenario, the instructional design begins with average velocity and, by progressively narrowing the time interval, facilitates students' cognitive transition from the average rate of change to the instantaneous rate of change. This approach is expected to deepen students' conceptual understanding and procedural fluency regarding derivatives, foster their modeling competence and logical reasoning, and enhance learning motivation. It also addresses the persistent limitation of traditional concept lessons that prioritize formal procedures over conceptual essence, thereby offering a referential case for teaching abstract mathematical concepts through a modeling lens.

Keywords

Mathematical Modeling Theory, Derivative, Instantaneous Rate of Change, Concept Formation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 背景分析

1.1. 课程改革与核心素养导向

《普通高中数学课程标准（2017 年版 2020 年修订）》明确将“数学建模”列为高中数学六大核心素养之一，强调数学教学应“引导学生在实际情境中从数学的视角发现问题、提出问题，分析问题、建立模型，求解结论，验证结果并改进模型，最终解决实际问题”[1]。导数概念作为高中数学的核心内容，是连接初等数学与高等数学的关键节点，其形成过程本身就是“从具体问题抽象为数学模型，再通过模型推理揭示本质”的典型范例。同时，导数概念承载着极限思想、数形结合思想等重要数学思想方法，是培养学生抽象思维、逻辑推理与问题解决能力的重要载体，符合核心素养导向下“知识传授与素养培育并重”的课程改革要求。

1.2. 导数概念教学的现状

当前高中数学中“平均变化率到瞬时变化率”的教学实践仍存在一些需要解决的问题，主要体现在以下三方面：

概念抽象性与学生认知脱节：导数概念的核心是“从平均到瞬时”的思维跃迁，涉及“有限逼近无限”的极限思想，这与学生长期接触的“静态”“有限”数学思维形成冲突。传统教学中，教师多直接给出平均变化率公式、瞬时变化率的极限定义，再通过例题训练强化应用，导致学生难以理解概念的本质内涵，仅能机械记忆公式与解题步骤。

教学脱离实际，建模意识缺失：现有教学多以纯数学例题(如抽象函数的变化率计算)为载体，缺乏与学生生活、其他学科(如物理、经济、生物)的真实关联。学生无法体会导数概念的起源与应用价值，难以形成“用数学描述变化、用模型解决问题”的建模意识，导致知识迁移能力薄弱。

思维过程碎片化，衔接不畅：教学中往往将“平均变化率计算”“瞬时变化率探究”“导数定义”割裂讲解，未能呈现“实际问题–平均变化率(近似描述)–瞬时变化率(精确刻画)–导数概念(模型抽象)”的完整思维链条，使得学生对概念的形成过程理解不连贯，难以建立系统的知识体系[2]。

1.3. 数学建模与导数教学的契合性

数学建模作为“将实际问题转化为数学模型并求解验证”的思维过程，与导数概念的教学需求具有天然的契合性，具体体现在：

思维逻辑的一致性：数学建模的核心流程，问题分析－模型假设－模型构建－模型求解－模型验证－模型应用与导数概念的形成过程高度同构。导数概念源于解决“瞬时速度”“切线斜率”等实际问题，通过抽象出“平均变化率”作为过渡模型，再通过极限思想优化模型得到“瞬时变化率”，最终形成导数的数学定义，本质上是一次完整的数学建模过程。

降低抽象性的有效性：数学建模强调“从具体到抽象”“从特殊到一般”，通过真实情境的铺垫、具体数据的分析、探究过程的引导，可将抽象的极限思想转化为可感知、可操作的实践活动(如通过缩小时间区间观察平均速度的变化趋势)，帮助学生逐步理解“无限逼近”的本质，破解认知难点。

素养培育的协同性：将数学建模融入导数教学，不仅能让学生在建模过程中深化对导数概念的理解，还能同步培养其数学抽象、逻辑推理、数据处理、问题解决等核心素养，契合课程改革中“以素养为导向”的教学目标，实现“知识学习”与“能力发展”的有机统一。

1.4. 研究的现实意义

实践意义：本研究构建基于数学建模的导数概念教学设计，为高中数学教师提供可操作的教学方案。通过真实情境驱动、完整建模流程渗透，帮助学生理解概念本质，提升数学建模能力与知识应用能力，推动高中数学教学从“知识传授”向“素养培育”转型。

理论意义：丰富数学建模理论在高中核心概念教学中的应用研究，揭示数学建模与抽象数学概念教学的内在关联，为同类抽象概念(如定积分、向量、复数)的教学设计提供参考，拓展数学建模在基础教育中的应用。

2. 国内外研究现状综述

2.1. 国内外导数概念教学相关研究

导数是高中微积分的核心概念，也是衔接初高等数学的重要内容，导数概念教学一直是数学教育研究的热点。

国外研究多从认知心理学视角展开，Orton、Gómez 等研究表明，学生受静态有限思维的局限，容易出现“重运算、轻本质”的问题，很难完成从平均变化率到瞬时变化率的思维跨越。后续研究证实，真实情境、数学建模、动态几何软件可以有效降低导数学习认知负担，形成以认知规律为核心、情境与信息技术为载体的教学研究范式。

国内研究立足新课标素养导向，主要分为三类：一是课标教材对比研究，明确导数教学要弱化机械运算，突出概念本质与核心素养；二是课堂教学改进研究，针对学生“会做题、不懂概念”问题，提出情境、探究等教学改进策略；三是建模适配研究，已有研究认识到导数生成过程与数学建模流程具有内在一致性，倡导依托情境开展建模教学，为课堂改革提供思路。

2.2. 已有研究贡献

第一，探明高中生导数学习的认知困境，厘清“平均到瞬时、有限到无限”的概念演化逻辑，为教学设计提供理论依据。

第二，打破应试导向的传统教学模式，验证情境探究、信息技术、数学建模的教学价值，推动课堂向素养培育转型。

第三，揭示导数概念与数学建模的同构关系，为抽象概念教学开辟新的研究视角。

第四，证实动态可视化工具的教学作用，为化解导数抽象难点提供实践支撑。

2.3. 已有研究不足

第一，建模教学的落地研究较浅。多数研究仅提倡简单融入建模思想，缺少包含模型假设、模型验证的完整闭环教学设计，课堂实操性不强。

第二，教学情境较为单一。多使用纯数学习题或单一物理运动场景，缺少生活化、跨学科真实情境，不利于学生知识迁移。

第三，重难点突破靶向性不足。对“平均变化率到瞬时变化率”这一核心跃迁过程关注不够，针对极限理解、符号认知、概念迁移障碍的定向教学设计较少。

第四，理论融合不足，实操课例稀缺。部分研究理论较为碎片化，偏理论思辨，缺少可直接供一线参考的完整课例，研究成果难以落地课堂。

3. 本研究切入点与创新价值

针对上述研究的局限，本文结合数学建模理论与建构主义学习理论，围绕“平均变化率到瞬时变化率”开展教学设计研究，主要创新点如下：

第一，构建闭环建模教学设计，弥补建模碎片化的问题。将“问题分析－模型假设－模型构建－模型求解－模型验证－模型应用”完整六步建模流程嵌入导数概念生成全过程，实现建模逻辑与概念生成逻辑匹配，为抽象概念课堂完整落实建模环节提供课例参考。

第二，设置跨学科多元情境，助力学生建模迁移。以汽车刹车等真实生活情境为主，辅以几何、经济类拓展素材，借助认知冲突引导学生剥离情境表象，提炼导数的数学本质，提升学生迁移应用能力。

第三，聚焦认知跃迁难点，实施精准教学。围绕从平均变化率到瞬时变化率的思维难点，针对学生极限思维薄弱、符号理解困难、概念绑定具体情境等认知障碍，采用数值计算、区间收缩、GeoGebra 可视化相结合的梯度任务，帮助学生完成由有限到无限的思想转变，化解学习难点。

第四，融合双重理论，形成可复制的完整课例。融合数学建模与建构主义理论，兼顾模型的科学性与学生主动建构；依托动态软件形成包含情境、探究、模型假设、模型验证的完整教学设计，弥补现有研究重理论、轻课例的短板，为同类抽象概念教学提供实践借鉴。

综上，本研究从建模闭环、情境创设、难点突破、理论实践融合几个方面优化教学设计，为导数素养课堂建设提供一定参考。

4. 核心理论基础

4.1. 数学建模理论

数学建模是连接数学理论与现实世界的重要桥梁，其本质是运用数学的语言、方法和思想，对现实生活中具有实际背景的问题进行抽象、简化、假设、量化分析与求解，最终通过模型验证与优化，为实际问题的解决提供科学依据或可行方案的完整过程。这一过程并非简单的数学运算，而是一种创造性的思维活动，核心在于将复杂的实际问题转化为可研究、可求解的数学模型，再通过对模型的分析与应用反向指导实践。其完整核心步骤可细化为六个紧密衔接的环节：一是问题分析，即深入解读实际问题的背景、核心需求与约束条件，明确需要解决的关键问题；二是模型假设，在不影响问题本质的前提下，剔除次要因素、简化复杂关系，提出合理的假设(如忽略微小误差、假设变量间的线性关系等)，为模型构建奠定基础；三是模型构建，根据假设与问题的内在规律，选择合适的数学工具(如函数、方程、不等式

等)，建立变量之间的数学关系，形成初步的数学模型；四是模型求解，运用数学运算、逻辑推理、软件模拟等方法，对构建的模型进行求解，得到数学层面的结论；五是模型验证，将求解结果与实际情况进行对比，检验模型的合理性与准确性，若结果与实际偏差较大，则返回前序环节调整假设或优化模型；六是模型应用，将验证通过的模型应用于实际问题的解决，或推广到同类问题的分析中，实现模型的实用价值[3]。数学建模在高中数学教学中的应用需遵循四大核心原则，以确保教学效果与学生认知规律的契合：一是主体性原则，教学过程中需充分凸显学生的主体地位，摒弃“教师讲授、学生被动接受”的传统模式，引导学生主动参与问题分析、模型构建与探究验证的全过程，让学生在自主思考与实践中积累经验、提升能力；二是情境性原则，建模素材需立足学生熟悉的真实生活或相关学科场景(如生活中的速度变化、经济中的成本核算、物理中的运动规律等)，避免抽象化、脱离实际的纯数学问题，让学生直观感受数学的应用价值，激发建模兴趣；三是循序渐进原则，建模任务的设计需契合高中学生的认知水平，从简单到复杂、从具体到抽象逐步推进，先引导学生完成基础的模型构建与求解，再逐步增加模型的复杂性与开放性，避免因任务难度过高打击学生的积极性；四是跨学科融合原则，打破数学学科与其他学科的壁垒，主动关联物理学、经济学、生物学、工程学等学科的知识与问题，让学生体会数学作为“通用工具”的跨学科价值，培养综合运用多学科知识解决问题的能力。

4.2. 导数概念的核心本质

导数概念的形成与发展是数学史上“从具体问题到抽象理论”的经典范例，其起源可追溯到 17 世纪科学家对两类实际问题的探索：一是物理学中的瞬时速度问题，即当物体做非匀速运动时，如何精准描述其在某一特定时刻的运动快慢；二是几何学中的切线斜率问题，即如何确定曲线上某一点处切线的斜率。除这两类核心问题外，导数的思想还隐含在天文学中的行星运动轨迹分析、经济学中的边际成本计算等多个领域。最初，科学家们针对具体问题提出了各自的解决方法，如伽利略对自由落体运动速度的研究、笛卡尔对曲线切线的探讨，直到牛顿与莱布尼茨在总结前人研究成果的基础上，通过抽象概括与逻辑推理，建立了系统的导数理论，实现了从“具体问题的特殊解法”到“一般化数学概念”的跨越。这一发展过程充分体现了导数概念“从具体到抽象、从特殊到一般”的本质特征，也印证了数学概念往往源于对实际问题的深入思考与规律提炼。

“平均变化率到瞬时变化率”的演进过程，是理解导数概念核心本质的关键逻辑链条。其中，平均变化率是描述变化规律的基础环节，它反映的是函数在某一有限区间内的整体变化快慢，其数学表达为(即函数值的增量与自变量增量的比值)。例如，物体在某段时间内的平均速度、植物在某段生长周期内的平均生长速率等，都是平均变化率的具体体现。平均变化率的优势在于计算简便、直观易懂，但局限性也十分明显——它只能对变化情况进行“近似描述”，无法精准刻画函数在某一特定点(某一时刻、某一位置)的局部变化状态。而瞬时变化率则是对平均变化率的深化与精准化，其本质是当自变量的增量 Δx 无限趋近于 0 时，平均变化率的极限值，即它反映的是函数在某一固定点处的“即时变化快慢”，例如物体在某一时刻的瞬时速度、曲线在某一点处的切线斜率等。从逻辑关系上看，平均变化率与瞬时变化率是“近似到精确”“宏观到微观”的思维跃迁：平均变化率是瞬时变化率的近似替代(区间越小，近似程度越高)，瞬时变化率是平均变化率的极限状态(区间无限缩小后的精确结果)，二者共同构成了导数概念从雏形到成熟的完整逻辑体系。

4.3. 建构主义学习理论

建构主义学习理论强调学生是知识的主动建构者，而非被动接受者。该理论认为，知识并非独立于学习者之外的客观存在，而是学习者在特定情境中，通过与他人、与环境的互动，结合自身已有的知识

经验，主动探究、分析、推理而建构起来的[4]。

体现在以下方面：其一，在教学情境创设上，需摒弃抽象的数学例题，结合学生的生活经验与认知水平，创设真实、具体的问题情境，让学生在熟悉的情境中发现问题、产生探究欲望，为知识建构奠定情境基础；其二，在教学过程设计上，需突出学生的主动探究地位，设计“问题驱动–自主思考–小组协作–模型建构–验证优化”的探究流程，引导学生从实际问题出发，逐步抽象出数学模型，再通过逻辑推理与实践验证深化对导数概念的理解，避免直接讲授定义与公式；其三，在教学互动设计上，需强化师生互动与生生互动，鼓励学生分享自己的思考过程、表达不同的观点与疑问，教师则以引导者、组织者、合作者的身份参与其中，及时给予启发与帮助，促进学生在交流协作中完善知识建构；其四，在学习评价上，需注重过程性评价，关注学生在探究过程中的思维表现、参与度、协作能力与模型建构能力，而非仅关注最终的解题结果，确保评价能够全面反映学生的知识建构过程与素养发展水平。

5. 案例正文

5.1. 数学建模理论下导数概念的生成

数学建模作为连接数学理论与现实世界的桥梁，能让学生在分析、抽象、建模、求解与验证的过程中，深化对数学知识的理解，提升综合运用能力。建模理论下导数概念的生成，是一个“从实际问题出发，经建模流程层层抽象，最终形成数学定义”的完整过程，核心是通过数学建模的问题分析–模型假设–模型构建–模型求解–模型验证–模型应用建模流程，破解导数概念的抽象性，让概念在真实情境与逻辑推理中自然诞生[5]。

一、建模起点：实际问题驱动，锚定概念需求导数概念的生成始于对“瞬时变化”类实际问题的困惑，这是数学建模的核心起点，也是概念的现实源头。聚焦典型问题：选取物理学(如变速运动的瞬时速度)、几何学(如曲线的切线斜率)、生活场景(如奶茶定价的边际销量)等跨领域实际问题，这些问题的共性是“需要精确刻画某一时刻、某一位置的局部变化状态”，而传统“平均变化率”无法满足需求。明确建模目标：引导学生发现问题本质，需构建一种新的数学模型，来描述变量在某一点的瞬时变化快慢，从而建立解决实际问题与探索新数学概念的直接关联，激发建模动机。

二、建模铺垫：平均变化率模型，搭建过渡桥梁平均变化率是导数概念生成的基础模型，承担着从具体到抽象的过渡作用，是建模流程中的模型假设与初步构建环节。简化问题，构建基础模型：针对选定的实际问题，忽略次要因素(如忽略空气阻力对运动的影响)，建立变量之间的函数关系。计算分析，感知变化规律：引导学生计算函数在不同有限区间内的平均变化率，通过数据表格记录结果，观察“区间长度越小，平均变化率越接近某一固定值”的规律，初步形成“用平均变化率逼近瞬时变化率”的直觉。

三、建模核心：极限思想介入，优化模型精度这是导数概念生成的关键步骤，对应建模流程中的“模型求解与优化”，核心是通过“无限逼近”的极限思想，将平均变化率模型升级为瞬时变化率模型。深化探究，突破认知难点：提出核心问题“当区间长度无限缩小时，平均变化率会如何变化？”，通过手动计算微小增量、借助 GeoGebra 动态演示“割线逼近切线”等方式，让学生直观感知“无限趋近”的过程。模型优化，定义瞬时变化率：基于探究结果，抽象出“瞬时变化率”的数学表达。

四、建模升华：概念抽象概括，形成通用定义在瞬时变化率模型的基础上，通过“模型验证与抽象”，完成从具体模型到通用概念的跃迁，这是导数概念生成的最终环节。跨案例验证，提炼共性本质：对比不同实际问题(如瞬时速度、切线斜率、边际销量)的建模结果，发现尽管问题背景不同，但数学表达完全一致，均是“函数变化量与自变量变化量比值的极限”，验证模型的通用性。

抽象概括，明确导数定义：将具体模型推广到一般函数，正式定义“函数在 $x \to 0$ 处的导数”为 f，

同时明确导数的双重意义：物理意义是瞬时变化率，几何意义是曲线在该点的切线斜率。

五、建模闭环：概念应用回归，巩固生成逻辑导数概念的生成并非终点，需通过建模应用形成闭环，让学生在解决实际问题中深化对概念的理解，完成“模型应用”环节。回归初始问题：用导数定义求解开篇提出的实际问题(如计算汽车在(t = 2s)时的瞬时速度、曲线在某点的切线斜率)，验证概念的有效性。拓展应用场景：将导数模型应用于新的实际问题(如刹车安全距离分析、泳池安全深度设计、定价优化)，让学生体会“建模–抽象–应用”的完整逻辑，强化“导数源于实际、服务实际”的认知。

5.2. 学情分析

学生已具备函数、平均变化率等必要知识，但建立导数概念面临从“有限”到“无限”的思维跨越这一核心挑战。具体表现为三重障碍：

首先，是“无限过程”的认知障碍。学生能理解“用短时间平均速度近似瞬时速度”，但难以内化“当时间间隔趋于零时，平均速度的极限就是瞬时速度”这一动态的无限过程。其次，是抽象符号的理解障碍。导数的极限定义式结构复杂，学生易产生“符号恐惧”，难以把握其整体含义。最后，是概念抽象的迁移障碍。学生易将导数与特定背景(如物理速度)强绑定，难以剥离具体情境，将其认同为统一的数学模型。

5.3. 教学目标

理解导数本质：能理解导数是用极限定义的瞬时变化率，能结合实例说明其物理意义(瞬时速度)与几何意义(切线斜率)。

掌握建模与求导：经历“实际问题→模型构建→极限求解→概念抽象”的完整过程，掌握用导数定义求简单函数(如 $y=x$)在某点导数的步骤。

体会思想与价值：在探究中体会“极限”与“以直代曲”思想，感受数学建模的力量，获得解决问题的成就感。

5.4. 教学设计

本节课选自高中数学选择性必修模块，课堂标准时长为 45 分钟。为适配真实课堂时间约束，本课时采用单课时完成导数概念建构。对教学素材进行取舍：以汽车刹车瞬时速度作为核心探究载体；保障完整落实数学建模六步流程(问题分析→模型假设→模型构建→模型求解→模型验证→模型应用)，保证课堂可实施性。

5.4.1. 教学难点与学生认知预判及应对策略

第一，教学难点：

1) 极限思想的理解：从有限的平均变化率过渡到 $\Delta x \to 0$ 的无限逼近，学生难以区分“取很小的增量”和“增量无限趋于 0”，难以把握极限抽象内涵。

2) 建模素养落地：学生习惯于直接使用给定函数，容易忽视函数背后现实问题的简化条件，建立模型假设、模型验证的意识存在困难。

3) 导数形式化定义建构：对极限表达式的结构理解浮于表面，容易机械记忆公式，抓不住瞬时变化率的本质。

第二，学生典型认知问题预判与课堂应对策略：

认知障碍 1：被动接受给定函数，缺少模型假设*

学生直接使用位移函数 $s(t)=t^2$，不会思考该函数是对现实刹车运动做简化得到的模型。

应对策略：采用简短师生对话替代长时间小组讨论，快速提炼模型假设；在模型验证环节进一步追问假设失效时模型结论是否成立，强化模型是有适用边界的。

认知障碍 2：将导数等同于物理瞬时速度，难以完成跨情境抽象迁移

学生只把导数和物理运动绑定，不能迁移到几何、经济等其他变化率问题。

应对策略：课堂重点完成瞬时速度建模；切线、经济案例仅做简短举例点拨，不组织探究；设置课后习题，促使学生课后完成跨情境迁移。

5.4.2. 教学过程

1) 创设情境，问题驱动(问题分析)

情境导入：

【问题 1 物理】一辆正在刹车的汽车，如何精确计算它在某一瞬间(如 $t=2$ 秒时)的速度？

【问题 2 几何】已知抛物线 $y=x$，如何求它在点 P(1, 1)处切线的精确斜率？

【问题 3 经济】某奶茶店发现，定价每上涨 1 元，日均销量大约减少 5 杯。当定价为 20 元时，如何刻画价格微小变动引起的“瞬时”销量变化率？

学生活动：尝试用旧知解决

预设学生回答 1 (针对瞬时速度)：“可以取非常短的一段时间，比如 0.1 秒，算出这 0.1 秒里的平均速度，就大概能代表那个瞬间的速度了。”

预设学生回答 2 (针对切线斜率)：“在(1, 1)点附近再取一个很近的点，算一下这两点连线的斜率，应该就接近切线的斜率了。”

预设学生回答 3 (共识性困难)：“但是，‘非常短’、‘很近’到底要多短多近？算出来的结果是个近似值，不是精确值。”教师巡视，捕捉学生的典型思路(如用很短时间的平均速度代替瞬时速度)。

师生共析：引导学生发现：平均变化率只能描述一个区间内的“整体”变化，无法精确刻画某一“点”或“瞬间”的局部变化。

提炼核心矛盾：“整体”与“局部”、“平均”与“瞬时”的矛盾。

【设计意图】

动机激发：依托真实运动情境提出问题，识别现实世界刻画瞬时变化的需求，完成建模流程的问题分析环节。制造认知冲突，激发学生建立新数学模型的探究动机，锚定本课时核心任务。

2) 温故知新，搭建桥梁(模型假设 + 模型构建)

模型简化：聚焦到问题 1 (物理问题)。假设汽车位移与时间满足函数 $s(t)=t^2$ (单位为米)，求 $t=2$ 秒时的瞬时速度。

教师活动：抛出模型假设探究问题：现实汽车刹车运动，会受到空气阻力、路面颠簸等多重现实因素干扰，我们直接采用位移函数 $s(t)=t^2$，其实已经做出了现实条件的简化，请同学们思考，这里包含哪些模型假设？

学生活动：小组交流讨论，尝试提炼建模假设。

师生共同归纳两条核心模型假设：

② 忽略空气阻力、路面扰动等次要干扰因素；

② 刹车运动位移严格满足二次函数关系 $s(t)=t^2$。

教师追问：如果现实条件不满足上述假设，该位移函数模型还可以直接使用吗？

师生小结：模型假设是建模必不可少的环节，通过舍弃次要因素简化复杂现实问题，为构建数学模型提供条件，但同时假设也限定了模型的适用条件。

任务探究：任务单：请计算时间区间[2, 3]、[2, 2.1]、[2, 2.01]、[2, 2.001]内的平均速度，并填入表格。

学生计算：独立完成计算……

【设计意图】以平均变化率旧知为脚手架，显性落实模型假设、初步模型构建建模环节**。借助数值计算让学生直观感受“逼近”，积累极限思想感性经验，降低概念抽象程度。

3) 探索本质，突破核心(模型求解、模型优化)

提出核心问题：

教师用数学语言概括上一环节：我们本质上是在考察，当自变量增量 $\Delta t \to 0$ 时，平均变化率 $\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$ 的极限是什么？

写出表达式：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$

多元探究，化解难点：

路径一：代数推导：让学生尝试将 $s(t)=t^2$ 代入，化简

表达式：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{(2+\Delta t)^2-4}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(4+\Delta t)=4$

教师追问：“现在，当 $\Delta t \to 0$ 时，$4+\Delta t$ 的极限是什么？”

预设学生回答：“就是 4。因为 Δt 无限趋于 0，那整个式子就无限趋于 4。”

路径二：几何可视化，只做直观感知，不深入展开切线斜率探究

形成核心概念：

师生共同总结：我们将“瞬时变化率”定义为“当自变量的增量趋于 0 时，函数值的平均变化率的极限”。

写出一般化表达式：对于函数 $y=f(x)$，在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$。

【设计意图】

借助代数推导与几何直观双路径化解极限难点，完成建模流程的模型求解、模型优化，完成由近似模型升级为精确瞬时变化率模型。

4) 抽象概括，形成定义(模型验证)

教师指出，上述统一的数学模型就是导数，给出函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处导数正式定义：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

教师简要点拨：导数物理意义是瞬时变化率；几何意义为曲线切线斜率，也可以用于刻画经济中的边际变化，以上两类情境的详细探究留给课后完成。

补充：模型验证与局限性反思活动(压缩为师生研讨，缩短时长)

教师抛出研讨问题：通过极限求得 t = 2 瞬时速度为 4 m/s，该导数模型是否完全等同于真实汽车刹车运动？

师生共同完成两层检验：

② 在本节课模型假设条件下，计算结果与不断缩小时间间隔的数据趋势相互吻合，数学模型自洽；

② 如果存在空气阻力，位移不再满足 $s(t)=t^2$，则该运动模型失效。

教师总结：导数作为数学工具本身具备通用性；但把导数用于现实场景，必须依托模型假设，假设条件改变，现实预测结果就会出现偏差。

【设计意图】

完成从具体实例到导数一般概念抽象，落实建模流程模型验证环节，引导学生认识模型存在适用边界，不能直接将数学模型完全等同于现实世界。

5) 应用反馈，闭环升华(模型应用、回检反思)

课堂基础练习：运用导数定义求解 $t=2$ 时刻汽车瞬时速度，规范书写定义计算过程。

拓展拔高题目(位移 $s(t)=20t-t^2$)不占用课堂时间，调整为课后思考作业。

课堂总结升华：

知识线：现实问题→模型假设简化→平均变化率→极限思想→导数定义→模型检验应用。

思想线：极限思想、数形结合、数学建模完整闭环、特殊到一般。

【设计意图】

课堂仅落实基础概念巩固，完成建模闭环。综合性拓展任务留给课后，严格控制课时容量，保障 45 分钟教学可以落地实施。

6. 结论与展望

6.1. 结束语

基于建构主义理论，在概念教学中，教师应创设“做中学”的具身认知情境，通过多元表征促进意义建构。本课程的设计与实践，始终遵循建构主义的核心信条：知识不是被动接受的客体，而是学习者在其经验世界中主动建构的产物。导数，作为微积分的基石，其传统教学的困境往往在于概念的高度抽象与学生的认知基础之间存在断层。本课程通过精心设计的数学建模流程，将这一断层转化为一座可攀爬的阶梯，引导学生从自身经验出发，亲手“搭建”起导数的概念。同时，建构主义教学对教师的角色提出了更高要求：教师不再是知识的灌输者，而是情境的设计者、思维的引导者和探索的协作者。其次，它需要给予学生充分的“迷思时间”，允许他们在试错、讨论和反思中完成自我建构，这对传统的课时安排构成了挑战。

6.2. 研究局限与未来展望

本研究立足于数学建模教学的理论视角，完成了相关课堂教学设计的体系构建、内容梳理与策略优化，形成了一套较为完整的教学实施方案。但受研究周期、实践条件等客观因素限制，本研究仍存在一定局限性。

首先，本研究现阶段主要停留在理论建构与教学设计构想层面，尚未进入真实课堂开展系统性教学实验，未通过课堂实践、前后测对比、学生访谈等实证方式检验教学设计的实际育人效果。因此，本文提出的教学策略、课堂流程与优化路径目前仅具备理论合理性，缺乏真实教学情境下的量化数据与质性实践结果作为支撑，部分教学环节的可行性、适配性仍有待进一步实践验证。

其次，本研究未结合不同学情层次、不同教学班级开展对比实践，对于教学设计在差异化教学场景中的适应性、可推广性未能进行深入探讨，研究结论的普适性有待进一步加强。

基于以上不足，未来可从以下方面继续深化研究：第一，将本研究设计的教学方案落地应用于真实中学课堂，开展完整的教学实践，通过学生能力前后测、课堂观察记录、师生访谈分析等方式，结合定量与定性数据全面检验教学设计的实施效果，依据实证结果修正、完善现有教学框架，实现从理论构想到实践验证的完善升级。第二，扩大实践样本范围，在不同层次班级开展对比教学，进一步探究本套教学设计对不同学业水平学生的适配情况，提升研究结论的普适性与参考价值。第三，持续细化建模课堂的教学评价体系，构建更加科学、可操作的课堂评价指标，为后续同类建模教学研究提供更完善的实践

参考。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中课程数学课程标准（2017 年版）[S/OL]. 北京: 人民教育出版社, 2018-01-15. http://www.moe.gov.cn/srcsite/A26/s8001/201801/t20180115_324647.html, 2026-11-04.

[2] 郑赛. 高中导数概念的教学路径优化研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 西南大学, 2025.

[3] 陈金雄, 张敏. 基于数学建模思想和数学文化的高数教学设计——以导数概念为例[J]. 普洱学院学报, 2022, 38(6): 131-133.

[4] 黄英. 基于建构主义学习理论的初中数学教学研究[J]. 新课程导学, 2026(19): 90-93.

[5] 盛毓. 境脉学习理论视域下初中数学建模素养教学探究[J]. 上海教师, 2026(1): 127-135.