

新工科背景下数学专业偏微分方程课程内容设计研究

刘斯丽, 李 景, 罗煦琼

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2026年8月18日; 录用日期: 2026年10月7日; 发布日期: 2026年10月19日

摘 要

新工科建设对数学专业学生的数学建模、跨学科应用、科学计算和复杂问题分析能力提出了新要求。文章以本校数学专业最新版培养方案、课程大纲、现用教材及相关教改研究为依据, 参照逆向设计与建构性对齐思想, 对课程目标、教学内容、学习任务和评价证据进行一体化设计。课程以Hadamard适定性为主线, 将模型与定解问题、经典方程的解析与定性理论、弱解与变分方法基础、数值方法与跨学科应用相互联系, 并建立“能力要求-课程目标-教学任务-评价证据”的对应关系。文章给出基础、提高和拓展三个教学层次以及48学时、32学时两种配置, 以一维热方程说明建模、存在性、唯一性、连续依赖和数值稳定性的组织方式。在此基础上, 本文将图像处理中的Perona-Malik非线性扩散和物理信息神经网络设置为拓展项目, 并提出32学时版本的课堂讲授与课外阅读的分层安排、泛函分析在线预备学习单元及单班试点教学评价资料收集方案。本文属于课程设计研究, 其实施效果尚需通过后续教学实践加以检验。

关键词

新工科, 偏微分方程, 课程设计, 适定性, 教学内容

Curriculum Content Design of Partial Differential Equations for Mathematics Majors in the Context of Emerging Engineering Education

Sili Liu, Jing Li, Xuqiong Luo

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: August 18, 2026; accepted: October 7, 2026; published: October 19, 2026

文章引用: 刘斯丽, 李景, 罗煦琼. 新工科背景下数学专业偏微分方程课程内容设计研究[J]. 创新教育研究, 2026, 14(10): 211-217. DOI: 10.12677/ces.2026.1410780

Abstract

Emerging Engineering Education places new demands on mathematics majors' abilities in mathematical modeling, interdisciplinary application, scientific computing, and the analysis of complex problems. Based on the current mathematics program, the syllabus and textbook of the Partial Differential Equations course, and relevant studies on teaching reform, this paper adopts the principles of backward design and constructive alignment to integrate course objectives, content, learning tasks, and assessment evidence. With Hadamard well-posedness as the organizing thread, the proposed curriculum connects four components: models and initial-boundary value problems, analytical and qualitative theories of classical equations, fundamentals of weak solutions and variational methods, and numerical methods and interdisciplinary applications. It also establishes an alignment among competency requirements, course objectives, learning tasks, and assessment evidence. Three instructional levels—fundamental, advanced, and extended—are specified, together with two course configurations of 48 and 32 teaching hours. A one-dimensional heat equation is used to illustrate how mathematical modeling, existence, uniqueness, continuous dependence, and numerical stability can be organized within a coherent instructional unit. The design is further supplemented with Perona-Malik nonlinear diffusion and physics-informed neural networks as extension projects, differentiated arrangements for classroom instruction and supplementary reading in the 32-hour version, an online preparatory unit in functional analysis, and a plan for collecting assessment data from a pilot class. As a curriculum design study, the effectiveness of the proposed framework remains to be evaluated through subsequent teaching practice.

Keywords

Emerging Engineering Education, Partial Differential Equations, Curriculum Design, Well-Posedness, Course Content

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

新工科建设强调交叉融合、实践创新和复杂问题解决能力[1]。数学专业虽不直接培养工程师，却承担着为自然科学和工程技术提供模型、理论与计算方法的任务。偏微分方程连接数学分析、泛函分析和数值分析，是训练建模、论证与计算能力的课程。已有研究涉及新工科课程改革[2][3]、研究型教学[4]、知识结构[5]、课程思政[6]和数学建模[7]。面向数学专业本科生，仍需回答：如何将能力要求转化为课程目标，如何以适定性贯穿定解问题，以及如何在有限学时内配置经典理论、弱解和数值计算。本文在文献[3]基础上，以 Hadamard 适定性为主线，设置基础、提高和拓展三个层次，给出 48 学时与 32 学时方案，重点讨论课程结构及其相应的数学论证。

课程设计还依据现用教材[8]确定教学内容范围，并借鉴逆向设计[9]与建构性对齐[10]。国际上，Jegdic 在偏微分方程课程中引入真实应用项目、计算技术与学生展示[11]；Freeman 等对 225 项本科 STEM 教学研究的元分析表明，主动学习总体上有利于考试表现并降低不及格风险[12]。这些研究提示，应用案例、计算工具和主动学习只有与课程目标和评价证据建立明确的对应关系，才能形成较为完整的课程结构。

与文献[3]主要从问题驱动、计算实验和项目学习等方面讨论数学物理方程教学内容优化不同，本文

进一步限定数学专业本科偏微分方程课程,以 Hadamard 适定性为内容组织主线,分别落实主要定解问题的存在性、唯一性和连续依赖,建立基础、提高与拓展三个教学层次,并给出 48 学时与 32 学时配置以及热方程单元的数学设计。本文的增量主要体现为课程内容结构及其相应的数学论证,而非对既有改革成效的重复报告。

2. 研究思路与设计依据

本文所依据的课程文本包括本校数学专业最新版人才培养方案、《偏微分方程》课程大纲和现用教材[8]。培养方案用于确定课程应支持的数学建模、数学论证、科学计算和学术表达能力;课程大纲与教材用于确定核心知识、先修基础和学时边界;相关教改研究用于吸收研究型教学、学生中心教学、数学建模和课程改革中的教学设计方法。

课程设计参照逆向设计与建构性对齐思想。逆向设计强调先确定预期学习结果和评价证据,再安排教学内容与学习活动[9];建构性对齐强调课程目标、教学活动和考核任务的一致性[10]。据此,本文按照“分析能力要求-确定课程目标-选择教学内容-设计学习任务-确定评价方式-检验学时可行性”的顺序开展设计:分析新工科建设和人才培养方案中的能力要求,将与本课程直接相关的要求转化为可观察的课程目标,再选择相应的模型、解析理论、定性分析、弱解和数值方法,最后通过建模报告、证明作业、计算实验和项目答辩评价目标达成情况。

内容取舍遵循数学内容的基础性、后续课程衔接、可评价性和学时可行性四项标准。根据这些标准,偏微分方程的基本对象、基本方法和核心论证作为共同要求;弱解与数值方法根据先修基础分层安排;重复性的边界条件齐次化、傅里叶系数计算和程序语法训练转为课外练习;研究前沿和复杂应用列为拓展内容。本阶段不包含教学效果检验,也不据此声称学生能力已经提高。

为明确本文方案的定位,传统讲授、代表性改革方案与本文方案的比较见表 1。

Table 1. Comparison of the proposed curriculum with traditional and representative reform approaches

表 1. 本文课程方案与传统方案及代表性改革方案的比较

比较维度	传统讲授方案	代表性改革方案[4]-[12]	本文方案
教学目标	掌握概念、公式和典型求解方法	强化学生参与、跨学科应用或计算工具的使用	模型建立、方法选择、数学论证、科学计算和学术表达
组织原则	按教材章节和求解方法推进	采用问题驱动、项目学习或主动学习	以 Hadamard 适定性为主线,使课程目标、教学任务与评价证据相一致
内容与任务	经典方程解析求解与课后习题	加入建模、计算实验或项目	四部分内容分三层实施,任务分别对应课程目标
局限	对模型建立和结果解释关注不足	项目学习与理论教学联系可能不够紧密	保持数学论证的完整性并兼顾学时限制,实施效果仍需通过班级教学实践和学习评价资料加以检验

注:代表性改革方案概括文献[4]-[12]的共同特点,不指向单一研究。

3. 新工科能力要求与课程目标

课程设计遵循“新工科能力要求-数学专业人才培养目标-偏微分方程课程目标-教学内容与任务-学生作品和评价证据”的对应关系。复杂问题建模能力落实为从守恒定律、本构关系或几何约束建立完整定解问题;跨学科应用能力落实为比较热传导、扩散、振动等模型的共同结构和适用条件;计算与数字素养落实为选择离散方法、记录计算环境并进行网格加密试验;批判性思维能力落实为比较经典解、弱解与数值解的适用范围;沟通合作能力落实为规范报告、课堂陈述和项目答辩。由此,“新工科”不

再只是课程改革的背景表述，而成为内容选择和评价设计的依据。

课程设置五项学习目标：一是能够明确未知函数、研究区域、参数、模型假设以及初始条件和边界条件，建立完整的定解问题；二是能够综合方程阶数、线性或非线性、系数性质、区域几何、定解条件、数据正则性和求解目的选择方法；三是能够运用能量法、极值原理和先验估计讨论唯一性、连续依赖及其他定性性质；四是能够理解离散误差、稳定性和收敛性的基本关系并完成可重复的数值计算实验；五是能够规范陈述假设、方法、结论、适用范围及个人贡献。上述目标依次对应模型建立、方法选择、数学论证、科学计算和学术表达，并分别由建模报告、方法说明、证明作业、计算报告和项目答辩提供评价证据。

4. 以适定性问题为主线组织课程内容

按照 Hadamard 的表述，一个定解问题适定，通常是指解存在、解唯一且对所给数据连续依赖，这里的连续依赖应相对于预先指定的数据空间、解空间及其范数理解，不能脱离具体函数空间笼统表述。适定性不是与求解方法并列的孤立知识点，而是研究定解问题的基本要求。对于每一类方程，教学均应追问：在什么条件下能够构造解或证明解存在；解是否唯一；初始数据、边界数据或右端项发生小变化时，解是否只发生相应的小变化。这样可以把模型来源、定解条件、解析表示、定性分析和数值计算联系起来。

课程内容四个相互联系的部分构成。第一部分为模型与定解问题，保留守恒定律、本构关系、初边值条件、一阶方程特征线和二阶方程分类。第二部分为经典方程的解析与定性理论，包括波动方程、热方程、拉普拉斯方程和泊松方程的典型表示，以及能量法、极值原理和格林函数。第三部分为弱解与变分方法基础，基础层次讲授测试函数、弱导数和弱形式思想；提高层次引入 $H^1(\Omega)$ 、 $H_0^1(\Omega)$ 的必要基础知识、泊松方程弱形式和唯一弱解结论；拓展层次讨论 Sobolev 嵌入、紧性和一般变分方法。第四部分为数值方法与跨学科应用，包括有限差分格式、误差度量、稳定性分析和网格收敛试验。

适定性的三个方面应采用与方程结构和学生知识基础相适应的数学方法。对于一阶线性方程，当方程系数具有适当的正则性且初始流形非特征时，可由特征常微分方程构造解，并沿特征线比较两个解。波动方程可通过达朗贝尔公式、积分表示或特征函数展开说明典型问题的存在性，再利用能量法证明唯一性及对初值的连续依赖。热方程可借助热核或特征函数展开构造解，并以能量法或极值原理讨论唯一性和稳定性。拉普拉斯方程在球、半空间等典型区域可由 Poisson 积分公式构造解；Poisson 方程可借助格林函数或牛顿位势表示；对于一般区域，则通过弱形式说明弱解理论的必要性。具体方法还取决于区域、定解条件、数据正则性和所需解的类型，不能简化为“根据方程类型选择方法”。以齐次狄利克雷泊松问题为例，设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 为有界 Lipschitz 区域， $f \in H^{-1}(\Omega)$ 。提高层次只要求学生理解下述弱形式及唯一弱解结论：

$$\text{求 } u \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

48 学时版本可进一步核查双线性型的连续性和由 Poincaré 不等式得到的强制性，教师据 Lax-Milgram 定理给出存在唯一性结论；32 学时版本不在课堂内完成定理条件核查，只要求理解弱形式的来源、边界条件进入函数空间的方式以及唯一弱解结论。由此既给出存在性的数学依据，又避免在有限学时内仅作概念性介绍。

5. 有限学时下的内容配置

课程不宜把弱解、有限差分、编程、项目和文献阅读全部作为新增课堂讲授内容。基础内容保证全

体学生达到共同要求,提高内容连接数学分析、泛函分析和数值分析,拓展内容通过课外阅读或选做项目完成。重复性的边界条件齐次化、傅里叶系数计算和程序语法训练可安排为课外练习,课堂时间主要用于模型假设、方法适用条件、关键估计和计算结果解释。

48 学时版本建议安排:模型、定解问题与方程分类 8 学时,经典方程的解析与定性理论 26 学时,弱解与变分方法基础 4 学时,数值方法与跨学科应用 6 学时,综合研讨与考核 4 学时。32 学时版本相应压缩为 4、20、2、4、2 学时。压缩时仍以经典方程和适定性论证为主要教学内容,数值部分完成一项热方程实验,复杂应用和文献阅读作为选做任务。特别是弱解部分的 2 学时只要求理解测试函数、弱形式和泊松方程唯一弱解结论,Lax-Milgram 定理的条件核查列为提高或课外内容。

新工科拓展案例采用课外项目或课堂讨论,不挤占经典理论的主体学时。其一,图像处理中的 Perona-Malik 模型可写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (c(|\nabla u|) \nabla u),$$

以依赖图像梯度的非线性扩散兼顾去噪与边缘保持[13],学生可比较其与常系数热方程的模型假设、参数作用和离散稳定性。其二,物理信息神经网络以神经网络近似未知解,并把方程残差以及初始、边界条件误差纳入损失函数[14];讨论重点是分析方程残差与近似解误差之间的关系,并说明这一关系与定解问题的稳定性有关;深度学习算法不作为课堂讲授内容。

针对学时紧张与学生基础差异,32 学时版本把 Lax-Milgram 定理的条件核查、Sobolev 嵌入与紧性、一般变分方法、上述拓展案例及补充编程练习列为阅读材料,不列入课堂讲授内容。对泛函分析基础薄弱的学生提供约 150 分钟的在线预备学习单元,依次介绍测试函数与弱导数、 $H^1(\Omega)$ 与 $H_0^1(\Omega)$ 的必要基础知识、Poincaré 不等式的用途以及 Poisson 方程弱形式,并根据短测验结果安排集中答疑。

6. 典型单元的简化设计

6.1. 模型建立与适定性分析

典型单元不必扩展为独立的数值分析专题,其作用是展示模型、理论和计算如何围绕同一定解问题相互联系。以一维热传导为例,首先从能量守恒和傅里叶定律说明未知函数、材料参数、热源以及初边值条件。若温度为 $u(x, t)$, 材料参数和横截面积为常数,则热扩散率 $\kappa = k/(\rho c)$, 热源项 $f = q/(\rho c)$ 。学生应能够说明参数含义并完成量纲核对;若参数随位置变化,则应保留相应的散度形式。

在理论环节,教师利用热核或特征函数展开说明典型问题的存在性,并严格区分唯一性与对初值的连续依赖。设两个解具有相同边界条件和源项,令 $w = u_1 - u_2$, 则齐次狄利克雷条件下有

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_0^L |w|^2 dx = -\kappa \int_0^L |w_x|^2 dx \leq 0.$$

若初值相同,则由初始能量为零和能量不增性得到唯一性;若初值不同,则得到 $\|w(\cdot, t)\|_{L^2} \leq \|w(\cdot, 0)\|_{L^2}$, 说明解对初值连续依赖。两项结论应设计为不同问题,避免把“相同数据确定唯一解”和“初值扰动如何传播”混为一谈。

6.2. 数值稳定性与结果解释

数值环节只保留稳定性判断和结果解释。对显式差分格式,学生需要知道 $r = \kappa \Delta t / (\Delta x)^2 \leq 1/2$ 的稳定性条件,理解当 $r > 1/2$ 时存在高频误差分量被放大,而不是断言任意初值都会立即振荡。计算报告应明确网格、时间步长、终止时刻和所用范数,区分数值误差、局部截断误差与离散残差,并通过网格加密

判断结果是否可信。这样既保留科学计算训练,又不挤占经典理论的主体学时。

7. 教学实施与课程评价

课程实施首先要处理先修知识与后续课程的衔接。热方程需要傅里叶级数、特征值问题和分部积分;波动方程需要特征线和能量方法;泊松方程需要格林公式、调和函数和变分思想。教学中应明确这些知识在定解问题中的用途,并说明本课程与泛函分析、数值偏微分方程、反问题和非线性偏微分方程的联系。围绕定解问题建立知识之间的联系,有助于学生形成对课程知识体系的整体认识[5]。

评价方式应与五项课程目标对应。作为一种示例性配置,期末考试可占 40%,考查基本概念、经典方法和核心论证;模型建立与证明作业占 20%;单元测验占 10%;可重复的数值计算实验占 15%;小组研讨或课程项目占 15%。建模任务重点评价变量、参数、假设及初边值条件是否一致;证明任务评价论证过程和假设条件是否完整;计算任务评价离散方法、参数设置、误差分析和结果解释是否合理;课程项目评价文献引用、合作分工和口头表达。课程思政以科学精神和学术规范为载体,避免与专业内容生硬拼接[6]。

为使后续实践获得可用于教学研究的学习评价资料,应在实施前制定评价量表。课程开始和结束时可设置结构相同而具体数据不同的模型建立和方法选择任务,保存建模报告、证明作业、程序代码、误差图和答辩记录;开放性作业可由两名教师独立评分并检验评分者一致性。若比较不同班级或不同届次,还应说明学生基础、任课教师、学时和试题难度的可比性,不能仅依据改革后一个班级的平均成绩作出因果判断。

首轮试点宜限定在一个完整教学班,收集三类过程性学习资料:采用同一评价量表分析前后两次建模或证明作业、围绕适定性主线与学习负担的期中问卷、匿名小组项目初稿及反馈后的修订稿。开放性作品由两名教师独立评分并检验评分者一致性。本文尚未取得经过匿名化处理和评分者一致性检验的真实数据,现阶段只报告试点方案;完成实际教学后再补入样本量、频数分布和项目案例。

8. 结语

新工科背景下数学专业偏微分方程课程改革,应把能力要求落实到课程目标、教学内容、学习任务和评价证据之中。本文参照逆向设计与建构性对齐思想,以 Hadamard 适定性为主线组织模型、解析理论、定性分析、弱解和数值方法,并通过基础、提高和拓展三个层次处理内容扩张与有限学时之间的矛盾。一维热方程单元表明,建模、存在性、唯一性、连续依赖和数值稳定性可以围绕同一定解问题组织。同时,将 Perona-Malik 非线性扩散与物理信息神经网络设置为拓展项目,并通过课堂讲授与课外阅读的分层安排、在线预备学习单元和单班试点教学,处理学时限制和学生基础差异。该方案属于课程设计,其实施效果尚需依据学生学习成果和规范的数据分析进行检验与修订。

基金项目

湖南省普通高等学校教学改革研究一般项目(编号:HNJG-20230375);湖南省学位与研究生教学改革项目(编号:2021JGYB134);湖南省普通高等学校教学改革研究重点项目(编号:HNJG20210065);湖南省普通高等学校教学改革研究一般项目(编号:HNJG-2022-0603)。

参考文献

- [1] 吴爱华,侯永峰,杨秋波,等.加快发展和建设新工科 主动适应和引领新经济[J].高等工程教育研究,2017(1):1-9.
- [2] 黄云清.基于新工科理念推进大学数学教学改革[J].中国大学教学,2020(z1):28-31.

-
- [3] 刘斯丽, 赵勇. 新工科背景下数学物理方程教学内容优化研究[J]. 新教育时代电子杂志(教师版), 2025(45): 39-41+45.
- [4] 朱长江, 蒋咪娜, 阮立志. “偏微分方程”研究型教学的理论与实践[J]. 数学教育学报, 2012, 21(2): 53-55.
- [5] 娄本东. 数学物理方程知识点关系图[J]. 高等数学研究, 2020, 23(1): 82-84.
- [6] 童雷雷. 偏微分方程课程思政教学探索[J]. 教育信息化论坛, 2022(5): 120-122.
- [7] 王秋玲, 张开银, 刘乙飞, 等. 问题导向结合数学建模在“数学物理方法”教学中的应用[J]. 安阳工学院学报, 2020, 19(4): 103-106.
- [8] 朱长江, 阮立志. 偏微分方程简明教程[M]. 第2版. 北京: 高等教育出版社, 2022.
- [9] Wiggins, G. and Mctighe, J. (2005) Understanding by Design: Expanded 2nd Edition. ASCD.
- [10] Biggs, J. (1996) Enhancing Teaching through Constructive Alignment. *Higher Education*, **32**, 347-364. <https://doi.org/10.1007/bf00138871>
- [11] Jegdic, K. (2011) Teaching Partial Differential Equations Using Technology. 2011 *Electronic Proceedings of the 23rd Annual International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, Denver, 17-20 March 2011, Paper 23C013.
- [12] Freeman, S., Eddy, S.L., McDonough, M., Smith, M.K., Okoroafor, N., Jordt, H., *et al.* (2014) Active Learning Increases Student Performance in Science, Engineering, and Mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **111**, 8410-8415. <https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111>
- [13] Perona, P. and Malik, J. (1990) Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **12**, 629-639. <https://doi.org/10.1109/34.56205>
- [14] Raissi, M., Perdikaris, P. and Karniadakis, G.E. (2019) Physics-Informed Neural Networks: A Deep Learning Framework for Solving Forward and Inverse Problems Involving Nonlinear Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*, **378**, 686-707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>