

波利亚解题思想下可视化技术赋能高中圆锥曲线动点最值问题的探究

——以GeoGebra辅助解题为例

冯瑞珍¹, 黄春丽^{1*}, 王加翠²

¹广东外语外贸大学数学与统计学院, 广东 广州

²大成岳家湾实验学校, 浙江 杭州

收稿日期: 2026年9月10日; 录用日期: 2026年10月17日; 发布日期: 2026年10月30日

摘 要

《普通高中数学课程标准(2022版)》要求发展学生直观想象、逻辑推理、数学建模等核心素养。圆锥曲线是高考高频考点, 试题难度系数0.3~0.4, 区分度较好, 动点最值问题是学生学习的主要难点。受静态习题呈现形式限制, 学生难以想象点、线的动态变化, 解题过程易出现思维卡顿与畏难情绪。本文以波利亚解题表的“理解题意、拟订方案、执行计划、回顾反思”四阶段为框架, 结合GeoGebra可视化平台, 选取椭圆双动点最值问题开展教学案例研究, 落实“观察-猜想-验证”的探究过程。借助软件轨迹、滑动条、动画演示功能直观呈现几何关系, 先通过可视化提出几何猜想, 再完成严格数理证明, 并通过变式探究提炼圆锥曲线与定圆联动最值问题的一般规律。教学实践表明, 将GeoGebra融入波利亚解题流程, 能够降低学生认知负荷, 培养动态几何思维, 落实数学核心素养。

关键词

波利亚解题思想, GeoGebra, 圆锥曲线, 动点最值

Visualizing Moving-Point Extrema on Conic Sections: A Pólya-Inspired Approach in High School Mathematics

—A Case Study of GeoGebra-Assisted Problem Solving

Ruizhen Feng¹, Chunli Huang^{1*}, Jiacui Wang²

¹School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

*通讯作者。

文章引用: 冯瑞珍, 黄春丽, 王加翠. 波利亚解题思想下可视化技术赋能高中圆锥曲线动点最值问题的探究[J]. 创新教育研究, 2026, 14(10): 791-800. DOI: 10.12677/ces.2026.1410845

Abstract

The General Senior High School Mathematics Curriculum Standards (2022 Edition) calls for developing students' core competencies, including intuitive imagination, logical reasoning, and mathematical modeling. Conic sections are a frequent topic in the college entrance examination, with a difficulty coefficient ranging from 0.3 to 0.4 and a good degree of discrimination. The problem of finding the maximum or minimum values of moving points is the main difficulty for students. Due to the limitations of the static presentation form of exercises, students find it difficult to imagine the dynamic changes of points and lines, and the problem-solving process is prone to thinking blockages and feelings of difficulty. This article takes the four stages of "understanding the problem, formulating a plan, executing the plan, and reviewing and reflecting" from Polya's problem-solving table as the framework, combines the GeoGebra visualization platform, selects the problem of the maximum or minimum values of the double moving points of an ellipse for teaching case research, and implements the "observation-conjecture-verification" exploration process. The article uses the software's trajectory, slider, and animation demonstration functions to present geometric relationships intuitively. First, it proposes a geometric conjecture through visualization, then completes a strict mathematical proof, and through variations, refines the general rules of the linkage maximum or minimum value problem of conic sections and fixed circles. Teaching practice shows that integrating GeoGebra into Polya's problem-solving process can reduce students' cognitive load, cultivate dynamic geometric thinking, and implement core mathematical literacy.

Keywords

Polya's Problem Solving Framework, GeoGebra, Conic Curves, Moving Point Max-Min Problems

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

《普通高中数学课程标准（2022 版）》将直观想象、逻辑推理、数学建模确立为高中数学核心素养，直观想象是发现和提出数学问题、分析和解决数学问题的重要手段，是探索和形成论证思路、进行逻辑推理、构建抽象结构的思维基础；逻辑推理是得到数学结论、构建数学体系的重要方式，是数学严谨性的基本保证，是人们在数学活动中进行交流的基本思维品质；数学建模是沟通数学与现实世界的桥梁，是综合发展学生各种数学能力、发展学生核心素养的有效载体。要求教学重视几何对象运动变化的探究，引导学生挖掘题目隐含的几何关系[1]。圆锥曲线是高中解析几何的核心内容，试题难度维持在 0.3~0.4，中等偏上，区分度较强，综合考查学生运算、推理与几何分析能力。其中动点最值问题融合轨迹识别、代数运算、几何转化等考点，是教学的重难点。

传统课堂多依靠黑板手绘图形，仅能呈现某一时刻下的几何位置，图形精度有限，难以完整复现动点变化过程。部分教学偏重代数解题套路训练，重计算、轻几何分析，缺乏代数与几何的内在关联，学生掌握的只是程序化解题步骤，并未形成动态几何思维。GeoGebra 作为一款“专为教与学的动态数学软

件”，内嵌有计算代数系统和指令输入方式，可对几何对象进行直接代数化处理，从而实现“形”（几何 Geometry）与“数”（代数 Algebra）的完美融合[2]。波利亚解题表提供完整的问题解决框架，将二者结合，以 GeoGebra 作为各解题环节的实践载体，构建“理解题目－拟定方案－执行方案－回顾反思[3]”的探究链条，对改进圆锥曲线动点教学具有现实价值。本文结合椭圆双动点最值实例，研究波利亚解题思想指导下 GeoGebra 的课堂应用路径。

2. 基于波利亚解题思想的高中圆锥曲线 GeoGebra 可视化教学的优势

2.1. 波利亚解题思想

波利亚指出：“学习数学最重要的是培养解决问题的智慧”[3]。国内诸多学者从不同角度阐述了对波利亚解题模型的理解。学者陈汉君认为波利亚解题模型所体现的解题观重视数学思维的教学。波利亚以解题为手段，启迪学生思维，从而培养学生分析解决问题的能力[4]。罗增儒分析了波利亚解题思想，并将其归纳为：解题系统程序化、过程分析重在启发、想法诱发重在开放、问题转化强调探索，并给出十种求解方法，使得波利亚解题模型再次焕发生命力[5]。Schoenfeld 高度评价了波利亚解题理论，认为波利亚的解题观念对于数学教育来说是一次时代的划分，并在波利亚解题模型的基础上细化了“分析与理解”、“探索”和“验证解答”三个环节，为解题提供更为具体的指导[6]。Passmore、Tim 认可波利亚在数学教育与问题解决方面所做的工作。他们整理了波利亚的解题教学成果和基于此的拓展性研究，认为虽然在波利亚思想的影响下，解题研究逐渐被关注，但在教学中仍存在困难，由此，他们提出了对解题教学研究未来方向的思考[7]。

2.2. GeoGebra 的核心优势

向引在《信息技术条件下的高中数学实验教学》一文中提出，在探究式数学实验课重视教师“引”、学生“做”的探究和实验过程，GeoGebra 是高中数学教科书中处理数学问题的首推工具[8]。何威，关恩在《GeoGebra 辅助立体几何教学案例与模型剖析》一文中，针对一块黑板、一支粉笔难以培养学生空间想象能力的研究现状，作者结合近期高三复习的问题，利用 GeoGebra 软件 5.0 版设计了两个教学案例（空间几何体、三视图）并给出详细图形绘制步骤，为教师教和学生学提供了可视化资源[9]。王永，刘菲菲在《用 GeoGebra 的 3D 功能解一道高考立体几何题》一文中，利用 GeoGebra 的 3D 功能动态解答了 2018 年全国理科 I 卷的选择题 12 题，不仅激发了学生学习数学的兴趣，使之感受到数学的无穷魅力，也让读者感受到 GeoGebra 的优越性。GeoGebra 是开源动态数学软件，集成几何绘图、代数运算、数值测量、动画交互功能，几何视图与代数视图双向实时联动，图形改动对应代数表达式同步更新。软件对硬件要求低，便于教师与学生使用[10]。

2.3. 与圆锥曲线动点问题的适配性

在圆锥曲线教学中融合 GeoGebra 工具，可极大改善概念的生成过程，将定义从教师直接告知转向引导学生自主发现，将性质从学生机械记忆转向学生主动归纳，教学中将知识间的关联从孤立状态转向有机整合。这种变化不仅是教学方法的进步，更反映了教学理念从以教师讲授为中心向以学生学习为中心的深刻转变[11]。借助信息技术开展椭圆概念可视化教学，契合从具体到抽象从直观到严谨的认知规律，能让学生在做数学的过程中，自主发现概念归纳特征论证结论，实现知识建构与核心素养的协同发展[12]。利用 GeoGebra 软件作出椭圆、双曲线和抛物线模型，再通过控制变量的方式改变动点位置和方程的参数来动态演示图形的变化过程，让学生观察两直线关系的变化情况并确定影响这一关系的关键因素，进而将实验结论推广到更一般的情形，同时通过代数推理给予严谨的验证[13]。基于 GeoGebra 的圆锥曲线变

式教学实践表明,这种创新教学方法能有效激发学生的求知欲和探究动机。与传统教学方式相比,学生表现出更高的参与度和学习兴趣。他们通过直接操作软件进行交互式学习,不仅加深了对知识要点的理解,更增强了对抽象数学概念的直观认知能力。信息技术提供了一个将“数”“形”紧密结合的平台,这不仅降低了学生在学习过程中的心理负担,而且有利于他们牢固掌握数学知识,并培养他们的数学核心素养[14]。

综上可知,大多数学者集中于从波利亚解题模型所体现的解题思维上来理解。在 GeoGebra 与立体几何的融合的相关研究目前仍然较少,并且案例设计大多基于教材中的新授课,对习题课进行变式探究的案例设计很少,本研究将 GeoGebra 嵌入波利亚解题四阶段:理解题目阶段完成条件可视化;拟订方案阶段借助动画猜想轨迹与最值位置;执行计划阶段完成严谨演算证明;回顾反思阶段开展变式拓展,探讨圆锥曲线动点问题的解题策略,提炼一般规律,为教师的教和学生的学提供案例参考。

3. 基于波利亚解题思想的高中圆锥曲线 GeoGebra 可视化教学策略探索

3.1. 试题呈现

题目: 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 下顶点为 A , 右顶点为 B , 若 $|AB| = \sqrt{10}$, C 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

(1) 求 C 的方程。

(2) 已知点不在 y 轴上, 点 R 在射线 AP 上, $|AR||AP| = 3$ 。

(i) 设 $P(m, n)$, 求 R 的坐标(用 m, n 表示);

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上的动点, 直线 OR 的斜率为直线 OP 的斜率的 3 倍, 求 $|PQ|$ 的最大值。

本题以椭圆为载体, 综合考察圆锥曲线性质、坐标运算和动点最值问题。

第(1)问考察了圆锥曲线的基本性质, C 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$, 过程略。下面重点分析第(2)问。

第(2)问第(i)小问考察了运用多种方法求解点的坐标问题: 根据已知条件 $|AR||AP| = 3$, 不难发现运用向量法更加简单。 $\vec{AP} = (m, n+1)$, 设 $\vec{AR} = \lambda \vec{AP} (\lambda > 0)$, 则点 R 的坐标为 $(\lambda m, -1 + \lambda(n+1))$, 因此 $\lambda |\vec{AP}| |\vec{AP}| = 3$ 。由 $|\vec{AP}|^2 = m^2 + (n+1)^2$, 得 $\lambda = \frac{3}{m^2 + (n+1)^2}$, 代入可得点 R 的坐标为

$$\left(\frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, -1 + \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} \right)。$$

第(2)问第(ii)小问: 探究两个动点的最值问题, 相较于一个动点的最值问题更为困难, 下面我们基于波利亚解题思想, 借助 GeoGebra 工具进行解题。

3.2. 教学过程

师: 本题条件较为复杂, 一时不知如何入手, 我们可以借助波利亚《怎样解题表》开展分析。该解题表将解题过程划分为理解题意、拟定方案、执行计划、回顾反思四个阶段, 这四个阶段可作为解题框架, 引导我们有序开展问题探究。

3.2.1. 理解题目

有效的审题有助于快速定位解题切入点, 因此通过反复研读题干, 抓取关键信息, 把文字条件转化为数学符号语言, 识别条件所具备的等式结构特征, 由此建立合理联想, 生成解题思路, 选择恰当的数学思想方法, 发展学生数学能力。只有形成对问题的透彻理解, 方可进入拟定方案的后续环节。

师: 这个问题的已知是什么? 条件要求是什么?

生：由已知可解得椭圆方程，直线 OR 的斜率为直线 OP 的斜率的 3 倍。

师：“点 R 在射线 AP 上， $|AR||AP|=3$ ”，通过三点共线和它们之间的关系可以联想到哪些知识？

生：向量共线和坐标之间的关系。

师：可以列出等式吗？

生：可以(生尝试运用向量坐标法得出第(2)问第(i)问)。

师：通过“ Q 是 C 上的动点，直线 OR 的斜率为直线 OP 的斜率的 3 倍”表示什么意思？

生：是斜率之间的关系，但是比较抽象。

师：需要建立坐标系和画图来理解题意吗？

学生：需要。

师：看来我们需要用到数形结合思想帮助分析。

3.2.2. 拟订方案

拟定方案阶段，学生需要借助转化与化归思想拆解问题，把复杂问题分解为若干易于处理的子问题，这是解题顺利推进的关键。构思解题方案需兼顾条件与结论，综合使用分析法、综合法，建立条件到结论的逻辑链条。该环节的思考要点包括：是否遇到过同类问题？涉及哪些知识点与数学思想方法？已知条件是否得到充分运用。

师：通过图形观察，之前是否遇到过同类问题？

生：有，直线斜率的坐标表达。

师：可以通过这个条件解出点 P 的轨迹吗？

生：可以。

师：有了点 P 的轨迹方程，我们可以借助 GeoGebra 动态观测，什么情况下 $|PQ|$ 的最大值，面对双动点问题，怎么处理比较好呢？

生：我们可以先假设其中一个动点 Q 不动，讨论这时 $|PQ|$ 的最大值所要满足的条件，再讨论动点 Q 移动的情况。

师：这个思路很好。我们先借助 GeoGebra 动态观察，发现什么结论呢？

教师借助 GeoGebra，生成 P 、 Q 的运动轨迹，任选点 Q 保持不变，在点 P 处设置“启动动画”，观察线段的数值变化，发现在过圆心时取得最大值；通过变化点的位置，继续上述观察，可发现结论依然成立，因此可知最大值必过圆心 E ，如图 1 所示。

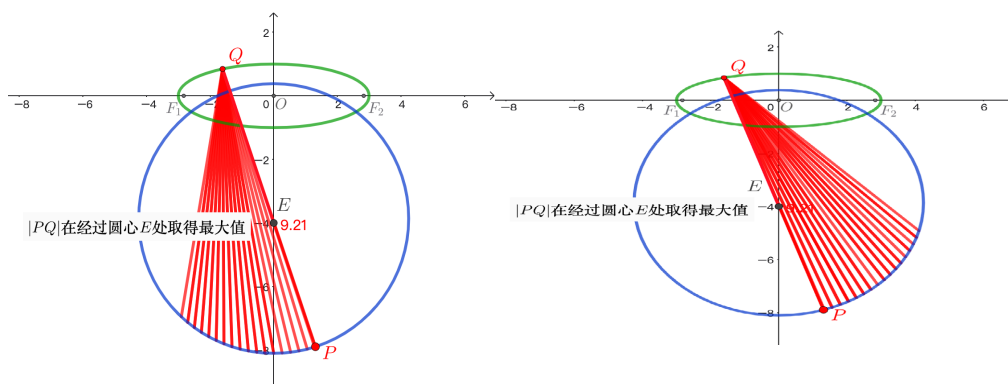


Figure 1. Preliminary exploration of the Maximum Value of $|PQ|$

图 1. 定点 Q 到动点 P 的最值探究

生：|PQ|经过点P的轨迹构成的圆的圆心E时，取得最大值。

师：这时你有什么新发现？

生：题目转换为求EQ的最大值。

师：题目转化为固定点到动点最值问题了，能不能通过借助观察动态图形发现有什么特征呢？

教师借助 GeoGebra 为线段EQ设置“显示轨迹”、点Q设置“启动动画”，此时观察到线段EQ随点Q的变化而变化，且其长度在某处达到最大值，此处EQ与点Q在椭圆上点切线垂直，如图2所示。

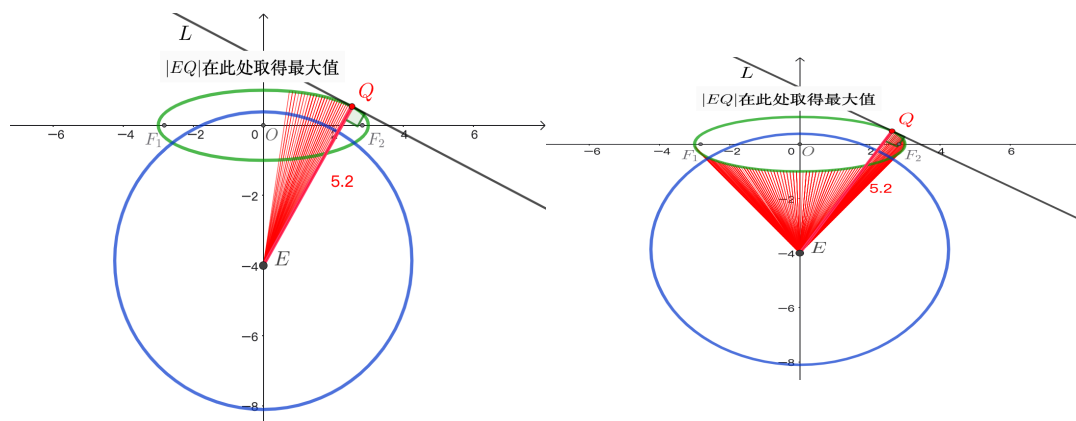


Figure 2. Extremum of the distance from center E to moving point Q

图2. 圆心E到动点Q的最值探究

生：EQ与点Q所在椭圆的切线相垂直的时候，取得最大值。

师：这些是借助 GeoGebra 观察而得的猜想，你能用严谨的数学逻辑证明吗？

生：可以，已知圆心E坐标，根据两点间距离公式。

在波利亚解题的拟订方案环节，GeoGebra 承担猜想工具的作用。通过动态实验形成猜想：Q的轨迹为圆，该双动点最值问题等价于“椭圆上动点到定圆上动点距离最值”模型，为后续数学证明指明方向。需要注意，软件测量输出为小数近似值，可视化结果仅属于猜想，不能作为数学结论，必须进入执行计划环节完成严谨推证。

3.2.3. 执行计划阶段

拟定方案后进入执行计划阶段，需要对预设解题方案进行规范落实。该阶段有一些规范要求需要教师引导提醒学生注意：合理使用数学符号开展推理运算，保证书写规范；运算兼顾准确与效率；推理论证以公理、定理为依据；结合题意绘制图形，做到详略得当。同时需要开展过程性校验：本步推理、计算是否正确？推证所使用的公式、定理是什么？运算依托哪些数学知识？

师：通过 GeoGebra 动画的直观展示和数据化表达，大家对EQ的最大值有了更深入的理解，但因GeoGebra 线段距离测量单位是保留小数，因此无法精确到无理数，此时我们可通过数学逻辑推理进行严谨计算。

师生共同完成解答过程：根据两直线的斜率关系 $k_{OR} = 3k_{OP}$ ，可知 $\frac{-1 + \frac{n+1}{m^2 + (n+1)^2}}{3m} = 3\frac{n}{m}$ ，化简可得

m 、 n 的关系式为: $m^2 + (n+4)^2 = 18$, 因此点 P 的轨迹是过圆心 $(0,4)$ 、半径为 $3\sqrt{2}$ 的圆。设点 Q 坐标为 (x_0, y_0) , 得到 $\frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$, 代入两点间距离公式 $EQ = \sqrt{x_0^2 + (y_0 + 4)^2} = \sqrt{-\left(y_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + 27}$, 当时 $y_0 = \frac{1}{2}$, EQ 取得最大值 $3\sqrt{3}$, 此时点 E 到 Q 点在椭圆上点切线距离, 根据点到直线的距离公式, 同样可得结果为 $3\sqrt{3}$, 因此 PQ 的最大值为 $PQ_{MAX} = EP + EQ_{MAX} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$ 。

基于 GeoGebra 得到的猜想开展代数推导。根据两条直线斜率倍数关系进行化简, 得到 Q 点横纵坐标满足的方程, 确定 Q 的轨迹是定圆, 写出圆心与半径。设椭圆上动点 P 坐标, 写出 PQ 两点间距离表达式, 利用几何模型: 椭圆上点到圆上点距离最大值等于该点到圆心距离加上圆半径。结合椭圆方程对表达式化简, 求解函数最值, 得到 PQ 最大值, 同时使用点到直线距离公式交叉验证结果, 完成解题。

3.3. 回顾反思阶段

波利亚解题思想强调解题完成之后要进行回顾反思: 复盘解题思路, 判断结论是否具有—般性, 更换条件后结论是否成立, 尝试迁移到其他题型。针对本题, 需要进一步思考: 椭圆背景下椭圆动点的最值规律能否推广?

师: 上述题目是动点分别在椭圆和圆上的双动点问题, 如果把椭圆替换为双曲线、抛物线后结论是否成立? 改变定圆的生成条件, 模型是否仍然有效? 下面设置变式开展拓展探究。

3.3.1. 改变题设背景, 探究最值变化

题目: 圆锥曲线方程 $C: x^2 + (1-e^2)y^2 - 2py = 0$, 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上的动点, P 为圆 $x^2 + (y+5)^2 = 4$ 上的动点, 求 $|PQ|$ 的最小值。

在 GeoGebra 中输入圆锥曲线方程 $C: x^2 + (1-e^2)y^2 - 2py = 0$, 设置滑动条 e 、 p , 且 $0 < e < 5$, $p > 0$ 。当 $0 < e < 1$ 时, 图形 C 为椭圆; $e > 1$ 时, 图形 C 为双曲线, 此时 $|PQ|$ 的长度随 P 、 Q 的移动而变化, 通过直观观察和数值显示, 当 PQ 与点 Q 在双曲线上的切线垂直时, 取得最小值 $|PQ|_{MIN} = |EQ|_{MIN} - |EP|$; 若图形 C 为抛物线 $y^2 = 2px$ 时, 该解法同样适用, 如图 3 所示。

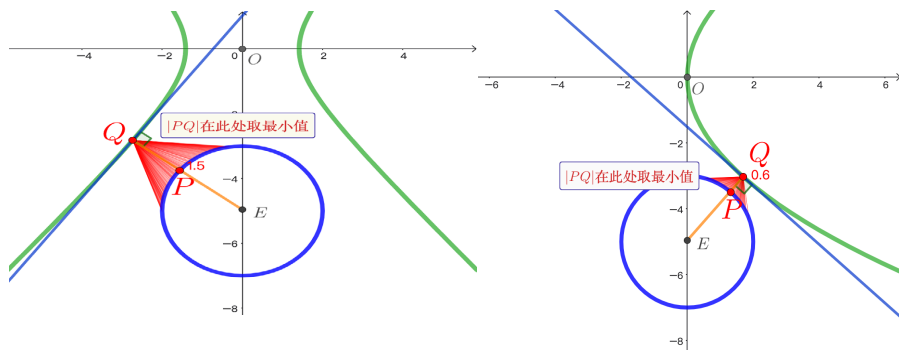


Figure 3. Extremum values of $|PQ|$ for Hyperbola and Parabola replacing the Ellipse

图 3. 椭圆替换为双曲线、抛物线后 $|PQ|$ 的最值探究

GeoGebra 软件作为教学有力助手, 能直观呈现几何图形的动态变化过程从椭圆到双曲线、抛物线的拓展验证, 让学生清晰感知圆锥曲线家族“变”与“不变”的规律, 突破抽象理解难点, 同时也让学生体会到信息技术“化抽象为直观”的独特价值, 为数学学习提供了强大的可视化支持[15]。

3.3.2. 改变圆的生成方式，探究最短距离

原题中 Q 的圆轨迹由斜率关系生成，若改变定圆生成条件，考察最值模型是否仍然适用。

本次例题是根据线段乘积和斜率的关系得到点 P 的轨迹是圆。如果改变圆的生成方式，能得到类似结果吗？

题目：已知 A 、 B 为椭圆 $C: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上的两点， O 为中心，且 $OA \perp OB$ ，过 O 点作的垂线，垂足为 Q 。求 Q 到椭圆 C 上一点 P 的最短距离。

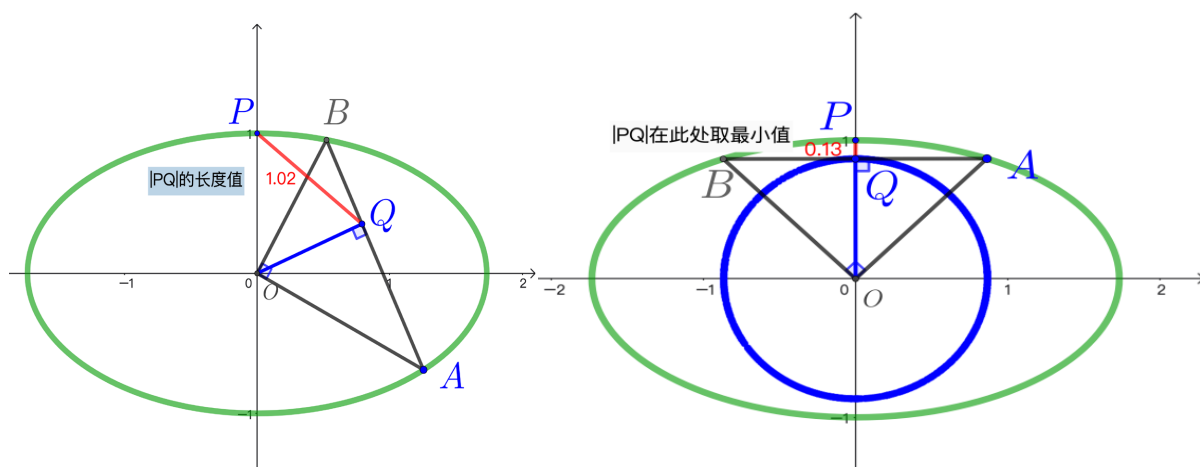


Figure 4. Extremum values of $|PQ|$ with altered generation mode

图 4. 转变生成方式后 $|PQ|$ 的最值探究

通过 GeoGebra 作图，此时不难发现， Q 的轨迹是以 O 为圆心， OQ 为半径的圆，连接 PQ ，通过观察可知，当 OQ 垂直于 x 轴，且位于 y 轴上方时， $|PQ|$ 取得最小值 $|PQ|_{\min} = |OP|_{\min} - |OQ|$ 。

由图形的几何关系得： $|OQ| = \frac{|OA||OB|}{|AB|}$ ， $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$ ，所以 $|OQ| = \frac{(|OA||OB|)^2}{|OA|^2 + |OB|^2} = \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ ，因此

$$|PQ|_{\min} = |OP|_{\min} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}。$$

在 GeoGebra 完成建模，追踪 H 点运动轨迹，可见 Q 的轨迹同样为定圆。播放动画观测距离变化，记录取最小值时的几何位置(图 4)。结合几何关系完成代数演算。变式结果表明：无论定圆由何种几何条件生成，只要问题转化为圆锥曲线上动点到定圆上动点的距离问题，最值求解的几何模型保持一致。

4. 教学启示

4.1. 依托可视化工具，发展动态几何思维

圆锥曲线动点问题的主要学习障碍是运动过程不可见。GeoGebra 将抽象几何关系转化为连续动态图像，学生通过拖动点、开启动画、生成轨迹完成观察，在“观察-猜想-验证”循环中突破静态图形思维局限，建立动态几何视角。

需要明确 GeoGebra 是思维辅助工具，不是答题工具。教学应当对应波利亚解题四阶段：理解题意阶段用软件翻译题干条件；拟订方案阶段开展猜想；执行计划阶段回归纸笔完成证明；回顾反思阶段进行变式拓展。工具服务于思维训练，不能代替学生运算与推导，应当避免课堂只播放动画、学生被动观看

的浅层教学。

4.2. 开展探究式教学，突出学生主体地位

传统习题课多以教师讲授解题步骤为主，学生被动接收解法。融合波利亚解题思想与 GeoGebra 的课堂属于探究式教学，以高考真题为载体，把观察、猜想的探究活动交给学生。学生操作软件，提出猜想，再完成证明，通过变式挖掘题型本质，从知识接收者转变为探究主体。教师作为引导者，可以借鉴波利亚解题表中的启发性问题设问：“已知条件是什么？”“求解目标是什么？”“动点受到哪些约束？”“猜想的轨迹能否证明？”“条件改变后结论是否仍然成立？”通过系列问题推进探究活动。

4.3. 发挥软件开源优势，助力教育资源均衡

GeoGebra 开源免费，跨设备可用，硬件门槛低。城乡各类学校只要具备基础多媒体设备就可以开展可视化教学，学生课后也可自主下载软件进行探究练习。该软件能够为不同地区、不同层次学校提供信息化教学资源，一定程度缩小城乡数学信息化教学差距。教师应当主动提升信息技术应用能力，推动信息技术与解析几何教学深度融合。

4.4. 教学方法的潜在局限性与风险防范

波利亚解题思想结合 GeoGebra 的探究教学对课堂条件、师生能力均存在一定要求，教学实践中需要适当取舍，避免增加认知负荷。

第一，存在学生过度依赖可视化技术的风险。动态图像直观的测量结果容易诱导学生直接采用视觉效果输出，弱化逻辑推演意识，降低代数运算、几何推演的抽象思维。课堂需要明确技术的定位：软件只承担猜想启发功能，必须经过严格的数学逻辑推理证明。

第二，该模式对教师综合能力提出更高要求。教师不仅要精通圆锥曲线知识与波利亚解题教学逻辑，还需要掌握 GeoGebra 绘图、轨迹设置等操作；课前需要完成课件预设、预判课堂中学生操作产生的各类生成性问题。若教师信息技术准备不足，容易出现课堂演示卡顿、探究活动流于形式，反而降低课堂效率。

第三，存在不适合使用该方法的问题情境。对于概念记忆、纯代数运算、简单静态解析几何习题，引入 GeoGebra 不会带来认知增益，反而挤占课堂时间；对于考试限时训练场景，学生无法借助软件，不能将可视化探究作为解题的常规手段。该教学模式更适合动点轨迹、动态最值、多对象联动等几何变化特征突出的重难点习题课；常规巩固训练、试卷讲评应当回归纸笔训练，实现技术探究与传统习题训练互为补充。

综上，可视化探究教学的目的是提高学生的直观想象能力和空间建模能力，教师应当根据教学内容、课堂条件合理选择使用时机，平衡技术演示、学生动手操作、逻辑推理三者的占用时间。

瑞士数学家欧拉(L. Euler)指出，观察可以帮助人们发现数学新性质，之后再对性质加以证明。对于圆锥曲线动点这类涉及连续变化的问题，GeoGebra 能够复现几何对象运动全过程，把隐藏在代数条件背后的几何规律直观呈现。但工具本身不能自动提升解题能力，教学需要以波利亚解题思想为框架，完整落实理解题意、拟订方案、执行计划、回顾反思的解题流程。教师备课时要把握题目几何本质，设计层次合理的探究活动，平衡可视化探究与纸笔逻辑证明，引导学生兼顾猜想观察与严谨推演，切实提升解析几何问题解决能力，落实数学核心素养。

基金项目

2025 年浙江省杭州市教育学会课题《基于数学文化的跨学科综合与实践教学研究》(课题编号：

2025XK0218); 2025 年浙江省教育信息化专项课题“三阶双轨: 人机协同提升学生提问能力的教学模式研究”(课题编号: 2025ETC057)。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [2] 郭衍, 曹一鸣. 动态数学软件 GeoGebra 使用指南[J]. 中学数学教学参考(上旬), 2012(1): 129-131.
- [3] 波利亚. 怎样解题: 数学思维的新方法[M]. 涂泓, 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2018.
- [4] 陈汉君, 时丽霞, 王信林. 波利亚数学教育思想研究综述[J]. 数学通讯, 2004(9): 1-4.
- [5] 罗增儒. 数学解题学引论[M]. 西安: 陕西师范大学出版社, 2000: 125-360.
- [6] Schoenfeld, 韩斌. 纪念波利亚《怎样解题》中文版 60 周年[J]. 内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版), 2009(5): 599-603+609.
- [7] Passmore, T. (2007) Polya's Legacy: Fully Forgotten or Getting a New Perspective in Theory and Practice? *Australian Senior Mathematics Journal*, **21**, 44-53.
- [8] 向引. 信息技术条件下的高中数学实验教学[J]. 数学学习与研究, 2021(18): 16-17.
- [9] 何威, 关恩. GeoGebra 辅助立体几何教学案例与模型剖析[J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2020(14): 53+1-2.
- [10] 王永, 刘菲菲. 用 GeoGebra 的 3D 功能解一道高考立体几何题[J]. 中学数学月刊, 2020(2): 48.
- [11] 赵意扬, 李鑫, 许笛. 基于 GeoGebra 的高中数学圆锥曲线概念生成教学研究[J]. 中小学数学(高中版), 2026(3): 59-61.
- [12] 王海亮. 信息技术赋能椭圆概念可视化教学的实践与反思[J]. 中学数学教学参考, 2026(19): 73-75.
- [13] 闫伟. 基于 GeoGebra 平台的可视化探究教学——以 2024 年高考全国甲卷理科数学第 21 题为例[J]. 实验教学与仪器, 2025, 42(8): 133-135+138.
- [14] 马广宇. 基于 GeoGebra 的圆锥曲线变式教学研究[J]. 数学之友, 2025(15): 75-77+80.
- [15] 洪凯. 基于 GeoGebra 平台对椭圆经典试题的多维探究与推广[J]. 中学数学研究, 2026(3): 25-30.