

三体作用对一维扩展Hubbard模型基态相图的影响

张俊, 丁汉芹*

新疆大学物理科学与技术学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2023年3月23日; 录用日期: 2023年5月9日; 发布日期: 2023年5月16日

摘要

我们在一维扩展Hubbard模型($t-U-V$)的基础上增加对角三体相互作用(P), 研究了一维 $t-U-V-P$ 模型的基态特性。通过玻色化方法和重整化群理论, 我们在半满情况下得到了模型的基态相图。研究表明, 三体作用会改变 $t-U-V$ 模型的量子特性, 导致更为丰富的基态相图。三条相变线把相平面分为四个不同的相区, 即电荷密度波、自旋密度波、单相超导和三相超导态。此外, 我们利用量子仿真讨论了相变性质。

关键词

扩展Hubbard模型, 三体作用, 相图, 半满

Effects of Three-Body Interaction on the Ground-State Phase Diagram of One-Dimensional Extended Hubbard Model

Jun Zhang, Hanqin Ding*

School of Physical Science and Technology, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang

Received: Mar. 23rd, 2023; accepted: May 9th, 2023; published: May 16th, 2023

Abstract

Based on the one-dimensional extended Hubbard model ($t-U-V$), we study the ground state characteristics of the one-dimensional $t-U-V-P$ model by adding a diagonal three-body interaction (P). Using the bosonization approach and renormalization group theory, we obtain a ground-state phase diagram of the model at half-filling. The result shows that the three-body interaction modifies the struc-

*通讯作者。

ture of quantum properties of the t - U - V model and leads to a much richer phase diagram, which consists of four different phases by three transition lines, including the CDW, SDW, SS and TS phases. Besides, we use quantum simulation to discuss the nature of transitions.

Keywords

Extended Hubbard Model, Three-Body Interaction, Phase Diagram, Half-Filling

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 低维系统中的电子关联和超导性深受广大研究[1] [2] [3], 关联作用在一维半满填充下会对体系量子特性产生很大的影响。哈伯德模型被公认为是处理电子关联效应的原型, 在位排斥相互作用($U > 0$)对 umklapp 散射过程有着至关重要的影响, 导致一维电子系统在半填充时成为绝缘体。哈伯德模型是人们理解强相关系统的基础, 尽管如此, 它的标准哈密顿量中势能项只包含在同一位置自旋相反二个电子之间的相互作用, 如果扩展到包括长程相互作用, 预计将改变系统的量子行为。强关联电子系统一直以来因其拥有的丰富相图和带来的独特材料性质备受研究者的青睐[4] [5]。近年来, 一些关于具有强偶极矩的分子和原子的超冷费米气体的实验[6] [7] [8]从全新的角度揭示了强关联系统的特殊性质。与以往的强关联电子系统不同的是, 实验者们通过一些特殊实验手段[9] [10]探测到了不能被传统费米液体理论所解释的相互作用, 例如长程耦合和多体耦合[11] [12]。对此类材料的实验研究以及相关的理论研究将加深我们对强关联电子系统的理解, 拓宽材料物理的研究界限。实验中三体相互作用存在的直接证据已在光晶格或磁光阱中的 Rb^{87} 里德堡原子观察到[13]。实际上, 作为非常规相互作用的代表, 研究者们热衷于对三体相互作用的探究, Johnson 等人[14]的研究表明, 在三维光学晶格中处于最低振动状态的原子的二体碰撞可以产生有效的三体相互作用。Büchler 等人[15]发现, 由微波场驱动的极性分子会产生强烈的三体相互作用。Hammer 等人[16]也证明了三体相互作用在多体系统中存在的可能性和合理性。

实际上, 关于三体相互作用的一维理论很早就有相关报道。一方面, 一维模型的理论研究更加理想化, 另一方面, 一维模型的物理性质也更加特殊。作为一维强关联电子系统的典型模型, 一维扩展 Hubbard 模型(t - U - V)被广泛用于各类模型的搭建。 t - U - V 模型的哈密顿量为:

$$H_{UV} = -t \sum_{j,\alpha} (c_{j+1,\alpha}^\dagger c_{j,\alpha} + H.c.) + U \sum_j n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} + V \sum_j n_j n_{j+1} \quad (1)$$

式中, $c_{j,\alpha}^\dagger$ ($c_{j,\alpha}$) 为电子的产生(湮灭)算符, $n_{j,\alpha} = c_{j,\alpha}^\dagger c_{j,\alpha}$ 为数密度算符。 t - U - V 模型已得到了广泛的研究, 在半满情况下, 强耦合[17]和弱耦合[18]理论都表明, 该模型在 $U = 2V$ 附近存在 CDW-SDW 绝缘相变。在 t - U - V 模型的基础上, 区别于非对角三体相互作用[19] [20], 我们增加对角化三体相互作用[21], 其哈密顿量可表示为:

$$H_P = P \sum_j (n_{j,\uparrow} n_{j,\downarrow} n_{j+1} + n_{j+1,\uparrow} n_{j+1,\downarrow} n_j)$$

我们得到受三体相互作用影响的一维扩展 Hubbard 模型:

$$H_{UVP} = H_{UV} + H_P \quad (2)$$

它是标准对角二体相互作用 U 和 V 的推广, 然而它并不直接来自两体库仑排斥相互作用, 而是反映了多体相互作用。与 U 和 V 项不同的是, P 项在物理中可以是排斥作用, 也可以是吸引作用。该模型满足自旋 $SU(2)$ 对称性和电荷 $U(1)$ 对称性, 它的相图是二体相互作用和三体相互作用之间竞争的结果。在有效场论中, 三体相互作用和更多体相互作用的介入, 在强相互作用的量子系统中尤为突出。三体相互作用在量子力学和量子多体问题中发挥着重要作用。在凝聚态物理学中, 各种三体相互作用被增加到已有的二体模型中, 被认为是获得新相的新颖尝试, 尽管多数情况下, 在重整化群意义下, 它们是无量纲。通常假设多体系统的物理主要是考虑两体相互作用来描述, 但这些被忽略的项不能总被认为与所有系统的物理无关。对于费米子系统, 多数研究的三体耦合是关联跃迁项, 这是半填充下出现 Haldane 电荷序的一个物理原因。对于玻色子系统, 已证明三体耦合能够导致超导关联和电荷调制的超固体相。不仅如此, 目前冷原子和冷分子系统的实验进展允许人们通过可控方式研究一维晶格系统中多体作用的影响。一维光晶格中多种超冷气体和非零偶极矩的实验为二阶以上的多体相互作用开辟了道路, 在磁光阱中的冷 Rb-Rydberg 原子中也观察到了三体相互作用。目前缺乏对角三体相互作用对扩展哈伯德模型相图影响的详尽描述, 所考虑的模型(2)正致力于这个问题的研究。此外, 哈密顿量(2)可以为超导态的实现提供一种理论方案。众所周知, 相互作用是相互关联的多体量子相位的核心, 特别是高阶多体相互作用可能产生新的量子相。目前, 由微波场驱动的光学晶格中的极性分子自然产生了具有强最近邻相互作用的哈伯德模型。所有这些都促使我们考虑哈伯德模型的进一步推广, 其中就包括最近相邻的粒子密度-密度耦合(P)为特征的高阶相互作用。研究表明, 吸引 P 相互作用在 U 、 V 排斥作用下能够导致半填充时的超导基态。对于 $U < 2V$, P 耦合导致 SS-CDW 相变, 而对于 $U > 2V$, P 耦合驱动 Mott-TS 相变。

2. 玻色化和重整化群理论

玻色化[22]和重整化群理论[23] [24]给一维强关联电子系统的弱耦合分析提供了强有力的理论支持, 是分析此类模型相图的最有效的解析方法。

2.1. 玻色化

我们首先将哈密顿量中的产生(湮灭)算符在低能条件下展开:

$$c_{j,\alpha} \rightarrow e^{ik_F ja} \psi_{R\alpha}(x) + e^{-ik_F ja} \psi_{L\alpha}(x) \quad (3)$$

再代入玻色化公式:

$$\psi_{L\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-i\sqrt{\pi}[\phi_\alpha(x) - \theta_\alpha(x)]}, \quad \psi_{R\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{i\sqrt{\pi}[\phi_\alpha(x) + \theta_\alpha(x)]} \quad (4)$$

式中, $\phi_\alpha(x)$ 和 $\theta_\alpha(x)$ 是一对共轭玻色场。经过一系列复杂的数学计算[25], 哈密顿量可以写成如下自旋-电荷分离的形式:

$$H = \sum_{\mu=c,s} v_\mu \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left[(\partial_x \phi_\mu)^2 + (\partial_x \theta_\mu)^2 \right] + \frac{m_\mu}{\epsilon^2} \cos \sqrt{8\pi K_\mu} \phi_\mu \right\} \quad (5)$$

其中,

$$K_\mu = (1 - g_\mu)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{g_\mu}{2} \quad (6)$$

$$v_\mu = \frac{v_F}{K_\mu} \approx v_F \left(1 - \frac{g_\mu}{2} \right) \quad (7)$$

$$m_c = \frac{g_{3\perp}}{2\pi}, m_s = \frac{g_{1\perp}}{2\pi} \quad (8)$$

$$g_c = g_{\parallel} - g_{2\parallel} - g_{2\perp} \quad (9)$$

$$g_s = g_{\parallel} - g_{2\parallel} + g_{2\perp} \quad (10)$$

方程(5)表示 Sine-Gordon 模型[26], g_{1-4} [27]代表了电子之间的四种散射关系, \perp, \parallel 分别表示散射的电子的自旋方向相反和相同。将哈密顿量改写成上述形式的好处是, 描述电荷激发和自旋激发的电荷场和自旋场是分离的, 这样就能清楚知道每种激发对相图的贡献。

但是, Sine-Gordon 模型是基于二体相互作用的理论, 三体相互作用项不能直接计算得到上述形式, 需要约化, 约化方法可以参考[28], 或文献[29] [30]的算符乘积展开, 我们选择后者。经过约化和计算, 我们得到耦合常数:

$$g_s = g_{1\perp} = \frac{1}{2\pi t}(U - 2V) \quad (11)$$

$$g_c = -\frac{1}{2\pi t}(U + 6V + 8P) \quad (12)$$

$$g_{3\perp} = -\frac{1}{2\pi t}(U - 2V) \quad (13)$$

2.2. 重整化群理论

在重整化群理论中, 有效耦合常数与标度长度 l 有关。根据一环微扰重整化群方程:

$$\frac{dg_{3\perp}}{dl} = -g_c g_{3\perp}, \quad \frac{dg_c}{dl} = -g_{3\perp}^2 \quad (14)$$

$$\frac{dg_{1\perp}}{dl} = -g_s g_{1\perp}, \quad \frac{dg_s}{dl} = -g_{1\perp}^2 \quad (15)$$

和流向图[31], 由裸耦合常数之间的关系得到如下不同性质的区域:

1) 当 $g_{c(s)} \geq |g_{3(1)\perp}|$ 时, 系统处于弱耦合区域。随着重整化的进行, $g_{3(1)\perp} \rightarrow 0$, 有效质量 $m_{c(s)} \rightarrow 0$, 模型退化为高斯模型 $H_{c(s)} = v_{c(s)} \int dx \left[(\partial_x \phi_{c(s)})^2 + (\partial_x \theta_{c(s)})^2 \right] / 2$ 。这表明电荷(自旋)激发是无能隙的, 系统由标量场描述, 关联函数相应呈幂律形式衰减:

$$\begin{aligned} \langle e^{i\sqrt{2\pi K}\phi(x)} e^{-i\sqrt{2\pi K}\phi(x')} \rangle &\sim |x - x'|^{-K} \\ \langle e^{i\sqrt{2\pi K}\theta(x)} e^{-i\sqrt{2\pi K}\theta(x')} \rangle &\sim |x - x'|^{-\frac{1}{K}} \end{aligned} \quad (16)$$

2) 当 $g_{c(s)} < |g_{3(1)\perp}|$ 时, 系统处于强耦合区域。根据 $m_{c(s)}$ 的初始值, 有效质量 $m_{c(s)} \rightarrow \pm\infty$, 电荷(自旋)激发是有能隙的。相场的真空期望值为:

$$\langle \phi_{c(s)} \rangle = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{8K_{c(s)}}} & (m_{c(s)} > 0) \\ 0 & (m_{c(s)} < 0) \end{cases} \quad (17)$$

3. 相图

我们现在可以得到一维扩展 Hubbard 模型在三体相互作用影响下的基态相图, 如图 1(a)和图 1(b)所

示。为了确定一个区域内的主导关联态, 我们采用了表 1 中玻色化形式的序参量[32]:

Table 1. Order parameters
表 1. 序参量

序参量	玻色化形式
$\Delta_{CDW} = (-1^n)(\rho_{n,\uparrow} + \rho_{n,\downarrow})$	$\sin(\sqrt{2\pi K_c} \phi_c) \cos(\sqrt{2\pi K_s} \phi_s)$
$\Delta_{SDW} = \rho_{n,\uparrow} - \rho_{n,\downarrow}$	$\cos(\sqrt{2\pi K_c} \phi_c) \sin(\sqrt{2\pi K_s} \phi_s)$
$\Delta_{BOW} = (-1^n)(\hat{Q}_{n,n+1,\uparrow} + \hat{Q}_{n,n+1,\downarrow})$	$\cos(\sqrt{2\pi K_c} \phi_c) \cos(\sqrt{2\pi K_s} \phi_s)$
$\Delta_{BSDW} = \hat{Q}_{n,n+1,\uparrow} - \hat{Q}_{n,n+1,\downarrow}$	$\sin(\sqrt{2\pi K_c} \phi_c) \sin(\sqrt{2\pi K_s} \phi_s)$
$\Delta_{SS} = R_{\uparrow}^{\dagger}(x)L_{\downarrow}^{\dagger}(x) - R_{\downarrow}^{\dagger}(x)L_{\uparrow}^{\dagger}(x)$	$\exp\left(i\sqrt{\frac{2\pi}{K_c}}\theta_c\right) \cos(\sqrt{2\pi K_s} \phi_s)$
$\Delta_{TS} = R_{\uparrow}^{\dagger}(x)L_{\downarrow}^{\dagger}(x) + R_{\downarrow}^{\dagger}(x)L_{\uparrow}^{\dagger}(x)$	$\exp\left(i\sqrt{\frac{2\pi}{K_c}}\theta_c\right) \sin(\sqrt{2\pi K_s} \phi_s)$

首先, 当 $g_c \geq |g_{3\perp}|$ 时, 有效质量 $m_c \rightarrow 0$, 电荷激发无能隙。如果 $U < 2V$, 那么有 $-(U + 6V + 8P) \geq -(U - 2V) \rightarrow V \leq -P$ 且 $g_s < 0$, 此时自旋场真空期望值 $\langle \phi_s \rangle = 0$, CDW、BOW 和 SS 相的序参量都有可能处于最大值, 但是 SS 相的关联 $\langle \Delta_{SS}(x)\Delta_{SS}(x') \rangle$ 衰减慢于另外两相, 因此系统处于单重超导(SS)态。如果 $U > 2V$, 那么有 $-(U + 6V + 8P) \geq U - 2V \rightarrow U + 2V \leq -4P$, 此时电荷激发和自旋激发都是无能隙的, 所有的绝缘相都被抑制, 系统处于三重超导(TS)态。

其次, 当 $g_c < |g_{3\perp}|$ 时, 有效质量 $m_c \neq 0$, 电荷激发有能隙。如果 $U < 2V$, 那么有 $-(U + 6V + 8P) < -(U - 2V) \rightarrow V > -P$ 且 $g_s < 0$, $g_{3\perp} > 0$, 此时电荷场和自旋场的真空期望值分别为 $\langle \phi_c \rangle = \sqrt{\pi/8K_c}$ 、 $\langle \phi_s \rangle = 0$, 容易算出 CDW 相的序参量取最大值, 系统处于电荷密度波(CDW)态。如果 $U > 2V$, 那么有 $-(U + 6V + 8P) < U - 2V \rightarrow U + 2V > -4P$ 且 $g_s > 0$, $g_{3\perp} < 0$, 自旋激发是无能隙的, 电荷场的真空期望值 $\langle \phi_c \rangle = 0$, BOW 相和 SDW 相的序参量都可能取最大值, 但是 SDW 相的关联衰减慢于 BOW 相, 因此系统处于自旋密度波(SDW)态。

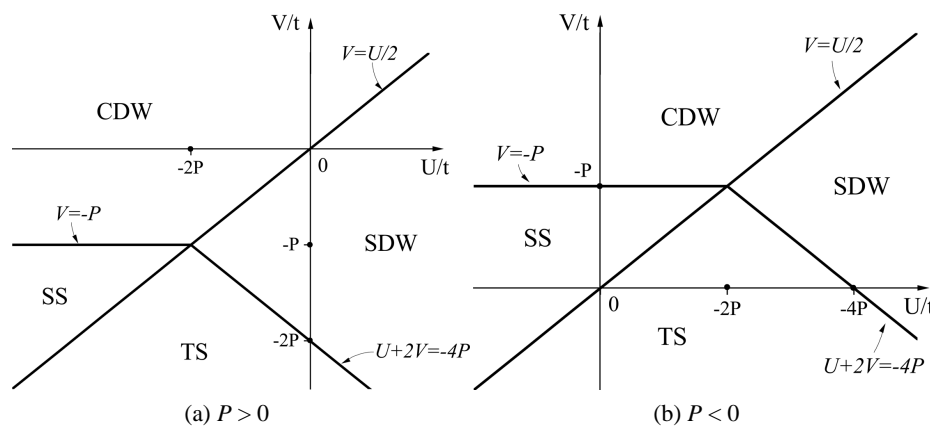


Figure 1. The phase diagram of t - U - V - P model
图 1. t - U - V - P 模型的基态相图

4. 量子仿真

为了进一步探究三体相互作用的影响, 我们再进行量子仿真。量子仿真技术主要分为两类, 一类是数值量子仿真[33], 另一类是类比量子仿真[34], 我们选择了更加直接的数值量子仿真。数值量子仿真方法也有多种选择, 如适用于自旋系统的 Suzuki Trotter 方案[35] [36] [37] [38]和 Handscomb [39]方案, 还有适用于相互作用系统的世界线[40]和行列式[41] [42] [43]方法。我们采用世界线方案, 相较于其他方案, 该方案更便于直接考虑各种相互作用之间的竞争。首先, 我们再现了文献[44]中 t - U - V 模型的表现, 在 $t=1$ 、 $U=4$ 、时间步长 $\Delta\tau=0.25$ (本文默认 $t=1$, $\Delta\tau=0.25$)的条件下, 经过 10,000 次循环计算, 每 5 次循环统计一次参数, 得到了 CDW 序参量的绝对值 $|m| = \left| (-1^n) (\rho_{n,\uparrow} + \rho_{n,\downarrow}) \right|$ 在 V 从 1 至 3.5 以步长 0.1 增加时的增长过程, 得到图 2, 仿真结果符合 t - U - V 模型在 $U=2V$ 发生 SDW-CDW 绝缘相变的理论预测。

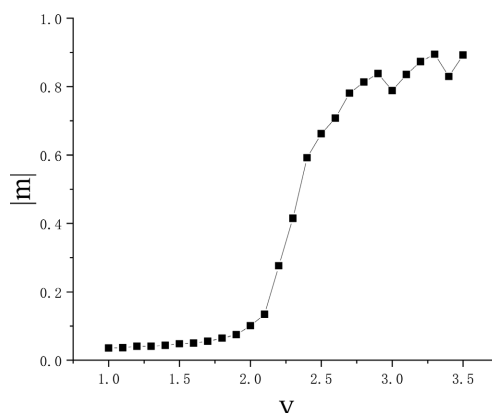


Figure 2. The rise of $|m|$ in the t - U - V model

图 2. t - U - V 模型 $|m|$ 的增长

我们再考虑三体作用与二体作用的竞争, 在相同设定下(假定 $P < 0$)研究了 CDW 相的边界, 即 $V = -P$ 和 $U = 2V$ 两条相变线。如图 3, $t=1$, U 从 -2 到 6 以 0.1 的步长增长, V 也在合适的范围内以 0.1 的步长增长, 每个像素代表一次固定参数的仿真, 每次仿真的循环计算次数达到 10,000 次, 统计参数的样本达到 1000 个, 像素的颜色代表了该固定参数下 CDW 序参量绝对值 $|m|$ 的统计平均值的大小, 从紫色到红色逐渐增加, 虚线代表理论预测的相变线($V = -P$, $U = 2V$)。

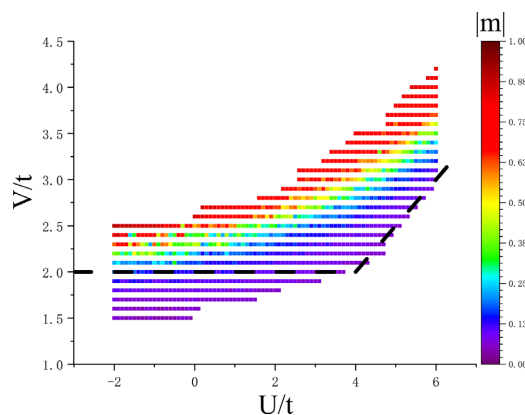


Figure 3. The distribution of $|m|$ in t - U - V - P model

图 3. t - U - V - P 模型 $|m|$ 的统计

图 3 给出了一些有价值的结果。首先, 在三体相互作用项的影响下, 相变线附近 $|m|$ 的改变并不迅速, 如图 4 所示为例 ($t = 1, U = 0, P = -2$), 这代表着相变可能是连续相变, 理论预测的相变线附近可能有其他关联态的存在, 系统的相分布并不像理论那样单一。另外, 相较于 U 变化的两端, 四相交汇点附近的仿真结果与理论预测的偏差更大, 与两端形成一个较为平滑的曲线, 这代表着四相交汇点附近的情况甚至更加复杂。这种偏差可能是由三体相互作用的约化导致的, 另一个原因是本文所用的理论是一个微扰理论。尽管如此, 理论分析还是在一定程度上揭示了 t - U - V - P 模型的相区分布, 附录中附图 1 展示了各种参数下展现的相区特征。

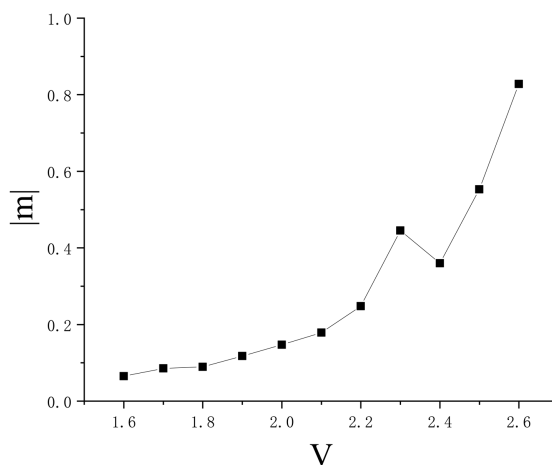


Figure 4. The rise of $|m|$ in the t - U - V - P model

图 4. t - U - V - P 模型 $|m|$ 的增长

5. 结论

本文在一维 t - U - V 模型的基础上, 加入了对角三体相互作用项, 得到 t - U - V - P 模型。我们运用玻色化和重整化群理论, 研究了三体相互作用对 t - U - V 模型基态相图的影响。理论研究发现, 相变线 $U = 2V, V = -P, U + 2V = -4P$ 将整个区域分为 4 个相区, 当 $U < 2V, V \leq -P$ 时, 电荷激发无能隙, 自旋场真空期望值 $\langle \phi_s \rangle = 0$, 系统处于 SS 态; 当 $U < 2V, V > -P$ 时, 电荷和自旋激发都有能隙, 系统处于 CDW 绝缘态; 当 $U > 2V, U + 2V \leq -4P$ 时, 电荷和自旋激发都无能隙, 所有的绝缘相都被抑制, 系统处于 TS 态; 当 $U > 2V, U + 2V > -4P$ 时, 电荷激发有能隙, 自旋激发无能隙, 系统处于 SDW 态。随后, 我们用数值量子仿真研究了 t - U - V - P 模型, 发现尽管上述理论在一定程度上成功预测了该模型的相区分布, 但是并未完全揭示该模型相变的性质, 对 CDW 相变线附近的序参量统计发现, 相关相变可能是连续相变, 且存在着更加复杂的关联态。

参考文献

- [1] Yu, J. and Ding H.Q. (2023) Phase Diagram of a Generalized Penon-Kolb-Hubbard Chain with the Occupation-Dependent Hopping. *Results in Physics*, **44**, Article ID: 106169. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.106169>
- [2] Baykusheva, D.R., Kalthoff, M.H., Hofmann, D., et al. (2023) Witnessing Nonequilibrium Entanglement Dynamics in a Strongly Correlated Fermionic Chain. *Physical Review Letters*, **130**, Article ID: 106902. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.106902>
- [3] Kreisel, A., Andersen, B.M., Rømer, A.T., Eremin, I.M. and Lechermann, F. (2022) Superconducting Instabilities in Strongly Correlated Infinite-Layer Nickelates. *Physical Review Letters*, **129**, Article ID: 077002. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.129.077002>

-
- [4] Murakami, Y., Takayoshi, S., Kanekoet, T., Läuchli, A.M. and Werner, P. (2023) Spin, Charge, and η -Spin Separation in One-Dimensional Photodoped Mott Insulators. *Physical Review Letters*, **130**, Article ID: 106501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.106501>
- [5] Shao, C., Lu, S.T., Yu, C., Tohyama, T. and Lu, R. (2022) High-Harmonic Generation Approaching the Quantum Critical Point of Strongly Correlated Systems. *Physical Review Letters*, **128**, Article ID: 047401. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.047401>
- [6] Ni, K.K., Ospelkaus, S., De Miranda, M.H.G., *et al.* (2008) A High Phase-Space-Density Gas of Polar Molecules. *Science*, **322**, 231-235. <https://doi.org/10.1126/science.1163861>
- [7] Lu, M., Burdick, N.Q. and Lev, B.L. (2012) Quantum Degenerate Dipolar Fermi Gas. *Physical Review Letters*, **108**, Article ID: 215301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.215301>
- [8] Wu, C.H., Park, J.W., Ahmadi, P., Will, S. and Zwierlein, M.W. (2012) Ultracold Fermionic Feshbach Molecules of $^{23}\text{Na}^{40}\text{K}$. *Physical Review Letters*, **109**, Article ID: 085301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.085301>
- [9] Sowiński, T., Dutta, O., Hauke, P., Tagliacozzo, L. and Lewenstein, M. (2012) Dipolar Molecules in Optical Lattices. *Physical Review Letters*, **108**, Article ID: 115301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.115301>
- [10] Greif, D., Tarruell, L., Uehlinger, T., Jördens, R. and Esslinger, T. (2011) Probing Nearest-Neighbor Correlations of Ultracold Fermions in an Optical Lattice. *Physical Review Letters*, **106**, Article ID: 145302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.145302>
- [11] Köhl, M., Moritz, H., Stöferle, T., Günter, K. and Esslinger, T. (2005) Fermionic Atoms in a Three Dimensional Optical Lattice: Observing Fermi Surfaces, Dynamics, and Interactions. *Physical Review Letters*, **94**, Article ID: 080403. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.080403>
- [12] Lewenstein, M., Sanpera, A., Ahufinger, V., Damski, B., Sen, A. and Sen, U. (2007) Ultracold Atomic Gases in optical Lattices: Mimicking Condensed Matter Physics and Beyond. *Advances in Physics*, **56**, 243-379. <https://doi.org/10.1080/00018730701223200>
- [13] Han, J. (2010) Direct Evidence of Three-Body Interactions in a Cold ^{85}Rb Rydberg Gas. *Physical Review A*, **82**, Article ID: 052501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.052501>
- [14] Johnson, P.R., Tiesinga, E., Porto, J.V. and Williams, C.J. (2009) Effective Three-Body Interactions of Neutral Bosons in Optical Lattices. *New Journal of Physics*, **11**, Article ID: 093022. <https://doi.org/10.1088/1367-2630/11/9/093022>
- [15] Büchler, H.P., Micheli, A. and Zoller, P. (2007) Three-Body Interactions with Cold Polar Molecules. *Nature Physics*, **3**, 726-731. <https://doi.org/10.1038/nphys678>
- [16] Hammer, H.W., Nogga, A. and Schwenk, A. (2013) Colloquium: Three-Body Forces: From Cold Atoms to Nuclei. *Reviews of Modern Physics*, **85**, Article No. 197. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.197>
- [17] Van Dongen, P.G.J. (1994) Extended Hubbard Model at Strong Coupling. *Physical Review B*, **49**, Article No. 7904. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.49.7904>
- [18] Voit, J. (1992) Phase Diagram and Correlation Functions of the Half-Filled Extended Hubbard Model in One Dimension. *Physical Review B*, **45**, Article No. 4027. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.45.4027>
- [19] Aligia, A.A., Arrachea, L. and Gagliano, E.R. (1995) Phase Diagram of an Extended Hubbard Model with Correlated Hopping at Half Filling. *Physical Review B*, **51**, Article ID: 13774. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.51.13774>
- [20] Aligia, A.A. and Arrachea, L. (1999) Triplet Superconductivity in Quasi-One-Dimensional Systems. *Physical Review B*, **60**, Article ID: 15332. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.15332>
- [21] De Boer, J., Korepin, V.E. and Schadschneider, A. (1995) η Pairing as a Mechanism of Superconductivity in Models of Strongly Correlated Electrons. *Physical Review Letters*, **74**, Article No. 789. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.789>
- [22] Gogolin, A.O., Nersisyan, A.A. and Tsvelik, A.M. (1998) *Bosonization and Strongly Correlated Systems*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [23] Wiegmann, P.B. (1978) One-Dimensional Fermi System and Plane xy Model. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **11**, Article No. 1583. <https://doi.org/10.1088/0022-3719/11/8/019>
- [24] Boyanovsky, D. (1989) Field-Theoretical Renormalisation and Fixed-Point Structure of a Generalised Coulomb Gas. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **22**, Article No. 2601. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/13/051>
- [25] Von Delft, J. and Schoeller, H. (1998) Bosonization for Beginners—Refermionization for Experts. *Annalen der Physik*, **7**, 225-305. <https://doi.org/10.1002/andp.19985100401>
- [26] Voit, J. (1995) One-Dimensional Fermi Liquids. *Reports on Progress in Physics*, **58**, Article No. 977. <https://doi.org/10.1088/0034-4885/58/9/002>
- [27] Xu, Y. and Ding H.Q. (2022) Ground-State Properties of the One-Dimensional Modified Penson-Kolb-Hubbard Model.

- Results in Physics*, **41**, Article ID: 105921. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105921>
- [28] Aligia, A.A., Gagliano, E., Arrachea, L. and Hallberg, K. (1998) Superconductivity with s and p Symmetries in an Extended Hubbard Model with Correlated Hopping. *The European Physical Journal B—Condensed Matter and Complex Systems*, **5**, 371-378. <https://doi.org/10.1007/s100510050456>
- [29] Dolcini, F. and Montorsi, A. (2013) Quantum Phases of One-Dimensional Hubbard Models with Three- and Four-Body Couplings. *Physical Review B*, **88**, Article ID: 115115. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.115115>
- [30] Japaridze, G.I. and Kampf, A.P. (1999) Weak-Coupling Phase Diagram of the Extended Hubbard Model with Correlated-Hopping Interaction. *Physical Review B*, **59**, Article No. 12822. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.59.12822>
- [31] Chen, W.T., Ding H.Q. and Zhang J. (2022) Theoretical Investigation of Four-Body Interaction in the One-Dimensional Extended Hubbard Model. *Results in Physics*, **34**, Article ID: 105250. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105250>
- [32] Xu, Y., Chen, W.T. and Ding H.Q. (2019) Coexistence of Superconductivity and Density Wave Orders in a One-Dimensional Correlated System. *Chinese Journal of Physics*, **67**, 222-229. <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2020.07.006>
- [33] Lloyd, S. (1996) Universal Quantum Simulators. *Science*, **273**, 1073-1078. <https://doi.org/10.1126/science.273.5278.1073>
- [34] Georgescu, I.M., Ashhab, S. and Nori, F. (2014) Quantum Simulation. *Reviews of Modern Physics*, **86**, Article No. 153. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.86.153>
- [35] Suzuki, M. (1976) Relationship between d -Dimensional Quantal Spin Systems and $(d + 1)$ -Dimensional Ising Systems: Equivalence, Critical Exponents and Systematic Approximants of the Partition Function and Spin Correlations. *Progress of Theoretical Physics*, **56**, 1454-1469. <https://doi.org/10.1143/PTP.56.1454>
- [36] Suzuki, M., Miyashita, S. and Kuroda, A. (1977) Monte Carlo Simulation of Quantum Spin Systems. I. *Progress of Theoretical Physics*, **58**, 1377-1387. <https://doi.org/10.1143/PTP.58.1377>
- [37] Barma, M. and Shastri, B.S. (1978) Classical Equivalents of One-Dimensional Quantum-Mechanical Systems. *Physical Review B*, **18**, Article No. 3351. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.18.3351>
- [38] Cullen, J.J. and Landau, D.P. (1983) Monte Carlo Studies of One-Dimensional Quantum Heisenberg and XY Models. *Physical Review B*, **27**, Article No. 297. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.27.297>
- [39] Handscomb, D.C. (1964) A Monte Carlo Method Applied to the Heisenberg Ferromagnet. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **60**, 115-122. <https://doi.org/10.1017/S030500410003752X>
- [40] Hirsch, J.E., Sugar, R.L., Scalapino, D.J. and Blankenbecler, R. (1982) Monte Carlo Simulations of One-Dimensional Fermion Systems. *Physical Review B*, **26**, Article No. 5033. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.26.5033>
- [41] Blankenbecler, R., Scalapino, D.J. and Sugar, R.L. (1981) Monte Carlo Calculations of Coupled Boson-Fermion Systems. I. *Physical Review D*, **24**, Article No. 2278. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.24.2278>
- [42] Hirsch, J.E. (1985) Two-Dimensional Hubbard Model: Numerical Simulation Study. *Physical Review B*, **31**, Article No. 4403. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.31.4403>
- [43] White, S.R., Scalapino, D.J., Sugar, R.L., Loh, E.Y., Gubernatis, J.E. and Scalettar, R.T. (1989) Numerical Study of the Two-Dimensional Hubbard Model. *Physical Review B*, **40**, Article No. 506. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.506>
- [44] Hirsch, J.E. (1984) Charge-Density-Wave to Spin-Density-Wave Transition in the Extended Hubbard Model. *Physical Review Letters*, **53**, Article No. 2327. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.2327>

附录

图片从仿真过程中截取而来, 其中黑色的上半圆代表格点被自旋向上的电子占据, 白色的下半圆代表格点被自旋向下的电子占据, 灰色的圆代表双占据, 空白代表没有电子, 每行表示一个可能的中间态, 从下至上为世界线方向, 详情见[40]。

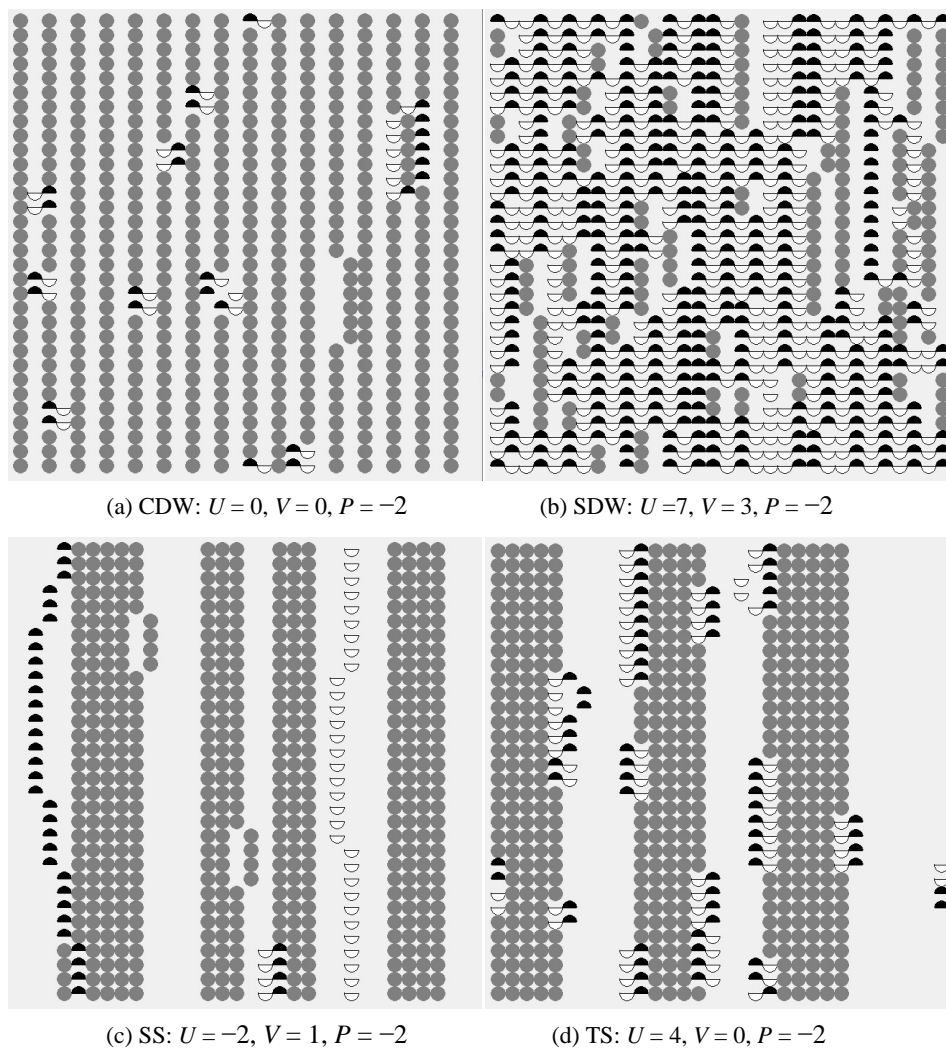


Figure S1. The characteristics of different states
附图 1. 不同相区的特征