

NMF Blind Source Separation Algorithm with Orthogonal Constraint

Tao Chen, Wensheng Sun, Yu Zhou, Mali Chen

School of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou
Email: 411533714@qq.com

Received: Oct. 5th, 2014; revised: Nov. 6th, 2014; accepted: Nov. 15th, 2014

Copyright © 2014 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In order to enhance the performance of the Blind Source Separation Algorithm and reduce the complexity of Blind Source Separation Algorithm, NMF Blind Source Separation Algorithm with orthogonal constraint (NMF-DSO) is presented in this paper. This optimized algorithm adds orthogonal constraint to NMF objective function to optimize objective function and uses the multiplicative updated rule to get the updated formula which gets the number of multiplications each time less than NMF blind source separation algorithm with constraints (NMF-DSC). Theoretical analysis and simulations all show that the performance of the proposed method is superior to that of the NMF Blind Source Separation Algorithm with orthogonal constraint (NMF-DSC) algorithm.

Keywords

Orthogonal Constraint, Blind Source Separation, Multiplicative Update, Non-Negative Matrix Factorization

正交约束的NMF盲源分离算法

陈 韬, 孙文胜, 周 钰, 陈玛丽

杭州电子科技大学通信工程学院, 杭州
Email: 411533714@qq.com

收稿日期: 2014年10月5日; 修回日期: 2014年11月6日; 录用日期: 2014年11月15日

摘 要

为了提高盲源分离的效果和减小盲源分离算法的复杂度, 该文将正交约束条件引入盲源分离, 提出基于

正交约束的NMF盲源分离算法(NMF-DSO), 该算法把正交约束添加到NMF优化目标函数中, 使目标函数得到优化, 并采用乘性更新规则得到更新公式, 得到每次更新所需的乘法次数少于相关约束条件下的NMF盲源分离算法(NMF-DSC)。理论分析和仿真结果均表明NMF-DSO算法的性能优于NMF-DSC算法。

关键词

正交约束, 盲源分离, 乘性更新, 非负矩阵分解

1. 引言

盲源分离(Blind Source Separation, BSS)是近年来, 信号处理领域的一个研究热点[1]。由于该技术运用很少的先验信息, 所以在图像处理、数字通信、语音信号处理、生物医学信号处理等领域获得了广泛应用[2]。独立分量分析(ICA)是解决 BSS 问题的主要方法。但是该方法只能用于源信号间相互独立的情况, 在某些实际应用中 ICA 算法并不适用[3]。因此, 赵知劲等人将 NMF 引入盲源分离, 提出了基于约束 NMF 的盲源分离算法(NMF-DSC), 该算法在 NMF 的目标函数上添加行列式、相关性、稀疏度等约束条件, 可有效地分离出源信号[4]。为了进一步提高 NMF-DSC 的分离性能, 本文提出了基于正交约束的 NMF 盲源分离算法[5]。

2. 基于正交约束的 NMF 盲源分离算法

NMF 的优化问题可以利用原始非负矩阵 V 与重构的非负矩阵 $\tilde{V} = WH$ 之间的欧式距离来度量它们之间的相似度, 其目标函数可以写为:

$$\begin{aligned} \min_{W, H} D(W, H) &= \frac{1}{2} \|V - WH\|^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} (v_{ij} - (WH)_{ij})^2 \\ \text{subject to } &W_{ai} \geq 0, H_{bj} \geq 0, \quad \forall i, a, b, j. \end{aligned} \quad (1)$$

在基于 NMF 的盲源分离算法中, 需要在 NMF 的优化目标函数上施加合适的约束条件, 已有算法采用的约束条件是行列式约束, 稀疏度约束和相关性约束, 其优化目标函数为:

$$\begin{aligned} F(W, H) &= \frac{1}{2} \|V - WH\|^2 + \mu \text{vol}(W) + \gamma J(H) + \lambda C(H) \\ \text{subject to } &W_{ik}, H_{kj} > 0, \quad \sum_i W_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (2)$$

其中 μ , γ , λ 均被称作平衡参数, $\text{vol}(W)$, $J(H)$, $C(H)$ 分别为行列式约束、稀疏性约束和相关性约束, 其数学表达式为:

$$\text{vol}(W) = \begin{cases} \sqrt{\det(WW^T)} & (m < n) \\ |\det(W)| & (m = n) \\ \sqrt{\det(W^T W)} & (m > n) \end{cases} \quad (3)$$

$$J(H) = \|H\|^1 = \sum_{i,j} |H_{ij}|^1 \quad (4)$$

subject to $V = WH$

$$C(H) = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \log((HH^T)_{ii}) - \log |HH^T| \right] \quad (5)$$

由乘性更新规则分别对式(2)的 \mathbf{W}_{ik} 与 \mathbf{H}_{kj} 求导并取合适的步长因子得迭代公式为:

$$\mathbf{W}_{ik} \leftarrow \mathbf{W}_{ik} \cdot \frac{[\mathbf{V}\mathbf{H}^T]_{ik} - \mu \det(\mathbf{W}\mathbf{W}^T) \left[(\mathbf{W}\mathbf{W}^T)^{-1} \mathbf{W} \right]_{ik}}{[\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{H}^T]_{ik} + \varepsilon} \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_{kj} \leftarrow \mathbf{H}_{kj} \cdot \frac{[\mathbf{W}^T \mathbf{V}]_{kj} - \gamma - \lambda \left(\frac{\mathbf{H}_{kj}}{[\mathbf{h}_k \mathbf{h}_k^T]_{kj}} - [(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)^{-T} \mathbf{H}]_{kj} \right)}{[\mathbf{W}^T \mathbf{W}\mathbf{H}]_{kj} + \varepsilon} \quad (7)$$

其中 \mathbf{h}_k 是 \mathbf{H} 的第 k 行向量。

式(6)和式(7)就是 NMF-DSC 算法的迭代公式, 该算法每次更新需要乘法次数为 $M_{\text{DSC}} = N(3n^2 + 2mn + n + 1) + (2m^2n + 2n^2m + mn)$, 并且需要两次矩阵逆运算。

正交性约束能提升聚类效果, 使原数据分解后得到的非负矩阵稀疏性增强, 从而使得表征原有数据的基之间的区别进一步增强。其数学定义式为:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I} \quad (8)$$

把 NMF-DSC 算法中的相关性约束改成正交性约束, 就形成了本文所提出的基于正交约束的 NMF 盲源分离算法, 简记为 NMF-DSO, 该算法的目标函数为:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{W}, \mathbf{H}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\mathbf{H}\|^2 + \mu \text{vol}(\mathbf{W}) + \gamma J(\mathbf{H}) \\ \text{subject to } &\mathbf{W}_{ik}, \mathbf{H}_{kj} > 0, \quad \sum_i \mathbf{W}_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq n, \quad \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)虽然可以在正交约束下求出最佳解, 但是运算量非常大, 于是本文采用线性规划的方法将正交约束添加到目标函数中一起就行优化, 于是得到函数(10):

$$\begin{aligned} F(\mathbf{W}, \mathbf{H}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\mathbf{H}\|^2 + \mu \text{vol}(\mathbf{W}) + \gamma J(\mathbf{H}) + z \|\mathbf{H}\mathbf{H}^T - \mathbf{I}\|^2 \\ \text{subject to } &\mathbf{W}_{ik}, \mathbf{H}_{kj} > 0, \quad \sum_i \mathbf{W}_{ik} = 1, \quad 1 \leq k \leq n. \end{aligned} \quad (10)$$

采用乘性更新规则可得 \mathbf{W}_{ik} 的更新公式为式(6), \mathbf{H}_{kj} 的更新公式为式(11):

$$\mathbf{H}_{kj} \leftarrow \mathbf{H}_{kj} \cdot \frac{[\mathbf{W}^T \mathbf{V}]_{kj} + 2z\mathbf{H}}{[\mathbf{W}^T \mathbf{W}\mathbf{H}]_{kj} + 2z\mathbf{H}\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \varepsilon} \quad (11)$$

式(6)与式(11)就是 NMF-DSO 算法。该算法每次迭代需要乘法次数为 $M_{\text{DSO}} = N(3n^2 + 2mn + 2n) + (2m^2n + 2n^2m + mn)$ 和一次矩阵逆运算。

3. 算法的仿真分析

本文分析比较 NMF-DSO 算法和 NMF-DSC 算法的分离性能。用信号重构信噪比

$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{\|\mathbf{S}\|^2}{\|\hat{\mathbf{S}} - \mathbf{S}\|^2} \right)$ 作为评价指标, 其中 $\hat{\mathbf{S}}$ 是对 \mathbf{S} 的估计。分离信号的 SNR 越大, 则说明算法的分离性能越好。

3.1. 分离性能分析

四个非稀疏信号如图 1 所示, 随机生成 6×4 的混合矩阵, 混合信号如图 2 所示, 根据 NMF-DSO 算

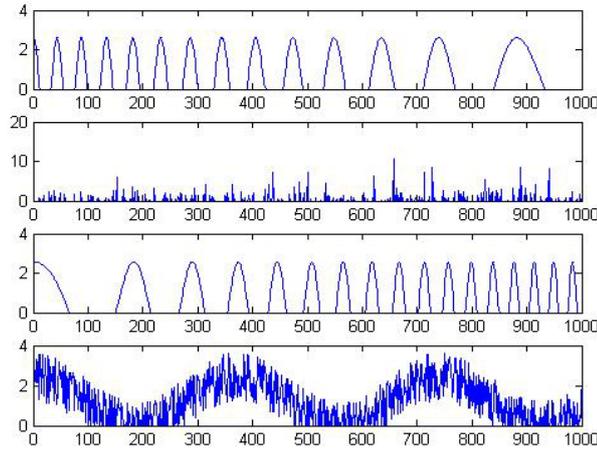


Figure 1. Source signals

图 1. 源信号

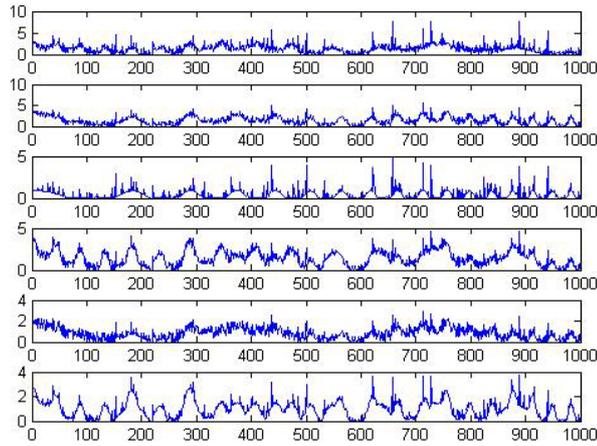


Figure 2. Mixed sign

图 2. 混合信号

法分离得到的信号如图 3 所示, 根据 NMF-DSC 算法得到的信号如图 4 所示, 分别使用 NMF-DSO 算法和 NMF-DSC 算法对混合信号进行矩阵分解, 求恢复源信号的 SNR 值, 如表 1 所示。

对于非稀疏信号, 两种盲分离算法都可以有效的分离出源信号。由表 1 可知, NMF-DSC 算法分离信号的 SNR 在 25 dB 和 47 dB 之间, 其中第一个和第四个在 32 dB 以下, 而 NMF-DSO 算法分离信号的 SNR 都在 45 dB 以上, 其中第一个和第四个信号的 SNR 高出 NMF-DSC 算法 20 dB 左右。由此可见, NMF-DSO 算法的分离性能优于 NMF-DSC 算法。

3.2. 复杂度分析

由上文的两种算法所需乘法次数之比为 $\frac{M_{\text{DSC}}}{M_{\text{DSO}}}$, 因为 m 和 n 相差较小, 所以假设两者相等, 且 n 取值在 1000 左右, 故舍去没有 n 的项, 可得:

$$R = \frac{M_{\text{DSC}}}{M_{\text{DSO}}} = \frac{N(3n^2 + 2mn + n + 1) + (2m^2n + 2n^2m + mn)}{N(3n^2 + 2mn + 2n) + (2m^2n + 2n^2m + mn)} \approx \frac{N(3n^2 + 2mn + n + 1)}{N(3n^2 + 2mn + 2n)} \approx \frac{5n^2 + n + 1}{5n^2 + 2n} \quad (12)$$

由此可得 $0 < R \leq 1$, 即 NMF-DSC 算法乘法次数略少于 NMF-DSO 算法, 然而 NMF-DSC 每次迭代

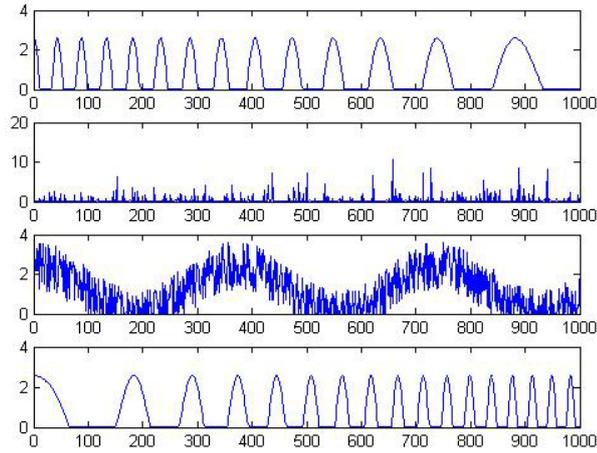


Figure 3. The separated signal of NMF-DSO
图 3. NMF-DSO 分离的信号

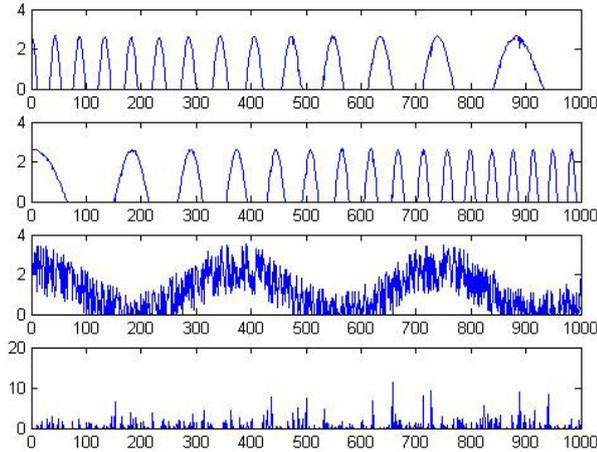


Figure 4. The separated signal of NMF-DSC
图 4. NMF-DSC 分离的信号

Table 1. The SNR of separated signal based on two algorithms
表 1. 基于两种算法的分离信号的 SNR

算法	s_1	s_2	s_3	s_4
NMF-DSC 算法 SNR 值[dB]	25.9324	46.4189	42.8089	30.1718
NMF-DSO 算法 SNR 值[dB]	47.5131	44.1458	45.4216	48.8739

需要两次矩阵逆运算，而 NMF-DSO 算法只需一次矩阵逆运算，因此两种算法的复杂度相差不大。

4. 结束语

本文针对 NMF-DSC 盲源分离算法复杂度高及分离性能不足的缺点，提出了基于正交约束 NMF-DSO 算法，实验表明 NMF-DSO 算法的分离性能优于 NMF-DSC 算法。然而，该算法依然是在三重约束下进行盲分离，如何减少约束条件是以后研究的重点。

参考文献 (References)

[1] 吕智高 (2012) 一种非负矩阵分解方法研究以及在盲源分离中的应用. 硕士论文, 武汉科技大学, 武汉, 9-14.

- [2] 冷洪勇 (2013) 基于信号特征条件约束的欠定盲源分离技术研究. 硕士论文, 新疆大学, 乌鲁木齐, 10-13.
- [3] 黄雯雯 (2013) 基于非负矩阵分解的盲信号分离方法研究. 硕士论文, 杭州电子科技大学, 杭州, 30-41.
- [4] 赵知劲, 卢宏, 徐春云 (2010) 基于约束 NMF 的盲源分离算法. *压电与声光*, **6**, 1049-1051.
- [5] 叶军, 金忠 (2013) 基于平滑范数正交子空间非负矩阵分解. *计算机应用研究*, **3**, 768-771.