

Curvature Estimation Methods and Its Application in Surface Detection

Xiaofang Shao, Zhigang Peng

Qingdao Branch of NAEI, Qingdao Shandong
Email: pugongying_0532@163.com

Received: Jun. 7th, 2015; accepted: Jun. 26th, 2015; published: Jun. 29th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Curvature extraction is required for many applications in image processing and computer vision. Therefore, curvature estimation is a basic task of these applications. This paper gives a classification and summary for existing curvature estimation methods to facilitate further investigations based on describing the original mathematical curvature, Gauss curvature, circle-based discrete curvature, parabola-based curvature, Gauss-Bonnet based curvature, Euler-based curvature etc. Experimental results show that curvature information can improve the robustness to noise in surface detection.

Keywords

Curvature, Curvature Estimation, Orientation

曲率估计及其在曲面检测中的应用

邵晓芳, 彭志刚

海军航空工程学院青岛校区, 山东 青岛
Email: pugongying_0532@163.com

收稿日期: 2015年6月7日; 录用日期: 2015年6月26日; 发布日期: 2015年6月29日

摘要

曲线或曲面的曲率信息是图像处理和计算机视觉的许多应用领域均需提取的重要信息, 因而曲率估计成

为底层处理的基本任务之一。在对原始曲率、高斯和平均曲率，基于圆的离散曲率，基于抛物线的离散曲率、基于Gauss-Bonnet理论的算法和基于Euler理论的算法等曲率计算方法进行基本描述的基础上，将现有的曲率估计方法进行了分类和总结，并通过实验验证了加入曲率估计可有效提高曲面检测方法的抗噪性。

关键词

曲率，曲率估计，取向

1. 引言

曲线或曲面的曲率信息是计算机图形学、计算机动画、流体仿真、模式匹配、形状分析、几何建模、纹理识别、人脸识别、散乱点云数据处理[1]、虹膜识别[2]等应用领域中经常利用的重要信息之一，在与曲线或曲面的几何特性相关的应用中更为重要。而在这些应用中，曲线或曲面上的点通常是离散的、不规则的，因而可靠的曲率估计成为一项基本需求。

本文旨在对曲率估计方法进行综述的基础上，通过实验验证曲率信息在曲面检测中的应用。本文主要内容安排如下：第二节是问题描述，从数学角度介绍几种常用的曲率计算方法；第三节对图像处理和计算机视觉领域的曲率估计算法进行了分类和总结；第四节通过实验验证了曲率信息在曲面检测中的应用；最后是结束语。

2. 问题描述

如图1所示，对于二维曲线而言，曲率代表了曲线上各点的切向角相对于弧长的变化率；推而广之，三维曲面的曲率为曲面上各点切向的立体角相对于曲面面积的变化率。二维曲率最直观的计算方法如式1所示，即计算切线角相对于弧长的变化率：

$$\kappa = \frac{d\varphi}{ds} \quad (1)$$

式中， κ 表示曲率， φ 表示切线角， s 表示弧长。

对于已知数学解析式的曲线，设其数学解析式为 $y = f(x)$ ，且为二阶连续函数，则其曲率计算式为：

$$\kappa = \frac{\left| \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|}{\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

对于三维曲面，设其数学解析式为 $S(x, y)$ ， $C(t)$ 为曲面上包含的曲线集合，则曲面上一点 (x_0, y_0) 处的曲率计算方式为计算经过该点的曲线 $C(t_0)$ 对应的点的曲率，如下式所示：

$$\kappa = \frac{|C'(t_0) \times C''(t_0)|}{\langle C'(t_0), C'(t_0) \rangle^{\frac{3}{2}}} \quad (3)$$

式中， $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示矢量的内积，而经过 (x_0, y_0) 的正交曲率 κ_n 与 κ 之间的关系为Meusnier定理所描述：

$$\kappa_n = \kappa \cos \varphi \quad (4)$$

式中， φ 为 (x_0, y_0) 处计算曲率时采用的曲线的法线与曲面法向的夹角。

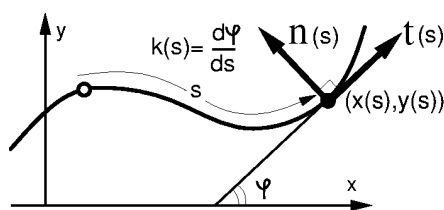


Figure 1. Geometrical meaning of curvature
图 1. 曲率的几何意义

由于实际应用中的曲线或曲面通常是没有显式的解析式的，为简化计算，研究者们引入了以下五种曲率计算方式：

- ◆ 高斯和平均曲率(Gaussian and mean curvature)

令 $\kappa_1(x_0, y_0)$ 和 $\kappa_2(x_0, y_0)$ 分别表示 (x_0, y_0) 出的最大和最小曲率，而这两个曲率所决定的切线方向为曲面在该点的主方向，设为 P_1 和 P_2 ，则高斯曲率为

$$K(x_0, y_0) = \kappa_1(x_0, y_0) \cdot \kappa_2(x_0, y_0) \quad (5)$$

平均曲率为

$$H(x_0, y_0) = \frac{\kappa_1(x_0, y_0) + \kappa_2(x_0, y_0)}{2} \quad (6)$$

- ◆ 基于圆的离散曲率(Circle-Based Discrete Curvature)

这一方法用曲线的泰勒展开式对曲线进行描述，通过曲线上点之间的距离来计算曲率，并假定曲率相近的点都在某一圆周上，

$$\kappa_c^p(p_i) = \frac{2N \cdot (p_i - p)}{\|p_i - p\|^2} \quad (7)$$

式中， N 表示点 p_i 处的法矢量， p_i 处的曲率则通过选取另一点 p 与 p_i 的距离来计算。

- ◆ 基于抛物线的离散曲率(Parabola-Based Discrete Curvature)

这种方法用抛物面局部近似曲面，根据抛物面的数学解析式(8)，

$$z = ax^2 + bxy + cy^2 \quad (8)$$

则高斯曲率和平均曲率分别为：

$$K = 4ac - b^2 \quad (9)$$

$$H = a + c \quad (10)$$

式中，对于各三角化网格顶点，其抛物面近似参数 a 、 b 、 c 根据其周围 6 个邻域点的坐标值列方程求得。

- ◆ 基于 Gauss-Bonnet 理论的计算方法

$$K = \frac{2\pi - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i}{\frac{1}{3}A} \quad (11)$$

式中， A 是三角化网格的面积， α_i 为三角化网格第 i 个顶点处相邻两边的内夹角，可以看出，这是一种针对网格曲面的曲率计算方法。

- ◆ 基于 Euler 理论的计算方法

在切线 T 方向上的正交曲率 κ_T 为

$$\kappa_T = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta \quad (12)$$

式中, θ 为曲面的主方向 P_1 与 T 的夹角。

在具体计算中, 涉及的一些特殊问题有:

- 由于曲率计算涉及二阶导数, 因而对图像噪声和量化噪声都非常敏感;
- 图像中某些区域, 像自然图像中山脊和谷地之类的地方, 由于梯度值较低, 甚至接近于零, 曲率估计的结果准确性很低, 文献[3]运用参数化的曲线模型度量梯度能量, 部分解决了这一问题。

上述计算方法中, 公式(1)~(3)描述的是原始的数学曲率计算公式, 由于涉及一阶或二阶微分, 在实际应用中易受噪声影响, 而且需要有曲线或曲面的数学解析式, 因而在图像处理和计算机视觉领域中很少采用; 其他五种计算方法各有千秋, 一般情况下, 高斯曲率用于对曲率计算结果的平滑; 基于圆和抛物线的曲率计算分别针对不同类型的曲线进行, 有用圆弧或者抛物线进行拟合的性质; 基于 Gauss-Bonnet 理论的计算方法主要用于三角化网格的曲面曲率计算; 基于 Euler 理论的计算方法实质上是将曲率与取向角之间建立了联系, 在本文下一小节所述的基于取向估计的曲率估计方法中被一些研究者采用。

3. 相关工作

曲率估计的相关研究工作始于十九世纪八十年代, Kacnderink 等人[3]率先将微分几何的概念引入计算机视觉, 并提出了曲率估计的概念。1980-1995 年可划分为曲率估计研究的第一阶段, 这一阶段以曲面拟合法为主, P. J. Flynn 等人于 1989 年发表了第一篇对这一阶段相关工作进行比较研究的论文[4], 他们的结论是在此期间提出的算法适合于计算曲率的正负, 而曲率值的计算受量化噪声的影响很大; 六年后文献[5]得出了相同的结论。1996~2005 年可划分为研究的第二阶段, 在此阶段离散方程近似法得到重视, 许多基于数学微积分和卷积的方法被提出[6]; 2006 年至今为研究的第三阶段, 一些基于取向估计的方法被陆续提出, 尤其是张量演算和投票机制的引入, 给曲率估计的研究注入新的活力。下面进行具体描述。

第一阶段的曲率估计方法大多数用局部曲面拟合, 可以用二次曲面、三次曲面、多项式曲面, 还有一些方法对曲面进行网格化处理, 然后通过计算各网格顶点邻域多边形的夹角计算曲率。其中抛物面拟合法[7] [8]比较典型, 应用也很广泛。为计算三角化后的曲面上各点的曲率和方向, 该方法用一个小抛物面根据最小二乘原理去拟合各点及其邻域点, 这一过程同求解一组线性方程即可实现, 拟合后根据抛物面的方程式即可计算该点的曲率及方向。由于曲面拟合并计算二阶偏导(对噪声敏感), Sander 和 Zucker 提出了一种经典的算法, 他们在文献[9]中对局部曲面拟合法进行了综合描述, 并在曲面拟合的基础上进行迭代优化提取曲面参数; 文献[10]将局部曲面拟合与表面法矢方向相结合; Stewart [11]提出了一种简称为 MINPRAN 的方法, 该方法通过随机抽样可以大大减小外部点和噪声的影响; 文献[12]提出了一种多相方法估计模型参数; Zhao 等[13]应用水平集算法拟合任意形状的曲面, 进而计算曲率; 文献[14]对于 1997 年以前的曲面拟合法进行了比较。

离散方程近似法利用三维空间中的点及其邻域信息建立方程, 这类方法往往为了提高运算速度而以降低准确率为代价。比较典型的是基于 Gauss-Bonnet 原理的方法[15] [16], 该方法将空间中的点作为图的顶点, 而顶点之间的连线为边, 再加上边之间的夹角信息可以优化求解根据 Gauss-Bonnet 原理建立的积分方程, 该方程在多边形情况下的解就对应了各点的高斯曲率; 在许多情况下, 曲率计算可以依据通过该点的曲线及其邻接点的信息, 于是有人结合 Euler-Meusnier 理论[17]提出了曲率估计的方法, 方法用与物体表面相切的圆去逼近表面, 然后应用 Euler-Meusnier 理论计算各点的曲率; Watanabe 和 Belyaev 提出针对网格抽取问题的算法[18], 该方法用三角化网格逼近目标曲面, 然后应用欧拉方程求解曲面曲率, 对三维物体的遥感图像实验效果较好; 文献[19]通过线积分的方式估计曲线上离散点的曲率, 自适应调整

积分区域的大小提高了估计结果的鲁棒性和准确性。

卷积法是对结肠 CT 图像进行息肉检测过程中进行曲率估计的常用的方法,文献[20]的研究表明,如加入有效的平滑,其曲率估计的准确率和鲁棒性将得到很大改善。多尺度分析技术也被引入曲率估计中来,比较有代表性的研究工作是[21],其计算结果依赖于高斯滤波的结果。这类方法的优势是可以同时解决像插值、平滑和分割等多个问题[22]。但是,多尺度平滑被引入对图像进行预处理。这样会使曲率的计算值偏小。

基于取向估计的方法将每一点的切线方向与曲率联系在一起,以采用张量演算和投票机制的方法居多。比较典型的是 Taubin 的[23]的方法,该方法通过对曲面各点的切矢量积分构造各点的张量矩阵,然后通过求取矩阵的特征值计算各点的曲率,算法的运行结果显示出对自然图像的实验效果很好;文献[24]对这一算法进行了扩展并改进了积分过程中各切矢量的加权方式;文献[25]针对图像中狭长结构的曲率估计问题,首先将图像与一个核函数进行卷积,然后计算取向矩阵,最后通过对取向矩阵进行特征值分析得出曲率估计结果;采用投票机制的方法,提到了曲率估计的准确率;文献[26]引入投票机制对基于张量演算的方法进行改进并应用于大型网格线曲率的计算中;文献[27]进一步提高了这类方法计算的准确率;文献[28]提出了一种基于张量投票的方法,并指出未来的研究方向之一是建立张量投票和贝叶斯最大似然估计之间的理论联系;Bårman 等针对有解析式的曲线或样条曲线,通过对图像进行 Fourier 变换,利用 Fourier 变换及其可导特性采用分层数据结构在频域对信号进行滤波,进行取向估计并用矢量域的方式表示取向信息[6],对取向估计和曲率估计建立了一个统一的计算框架。

上述各类方法中,第一阶段研究较多的曲线/曲面拟合法的计算思路与原始的数学曲率计算方式较为接近,由于易受噪声影响而受到限制;离散方程近似法和卷积法一般针对具体应用设计;基于取向估计的方法由于理论基础雄厚、计算方式灵活、应用范围较广而越来越受到研究者的关注。

4. 曲率估计在曲面检测中的应用

为说明曲率估计对曲面检测的影响,我们采用张量投票方法[28]进行曲面检测,在此过程中加入曲率估计,比较有无曲率估计对曲面检测的影响。之所以选择张量投票方法,主要是因为这种方法本身就可以进行取向估计和曲率估计,同时还可应用于曲面检测,因而采用这一方法进行实验。

实验结果如图 2 所示,其中图 2(a)为原始的空间点集;图 2(b)为对图 2(a)添加了均值为 0.05 的椒盐

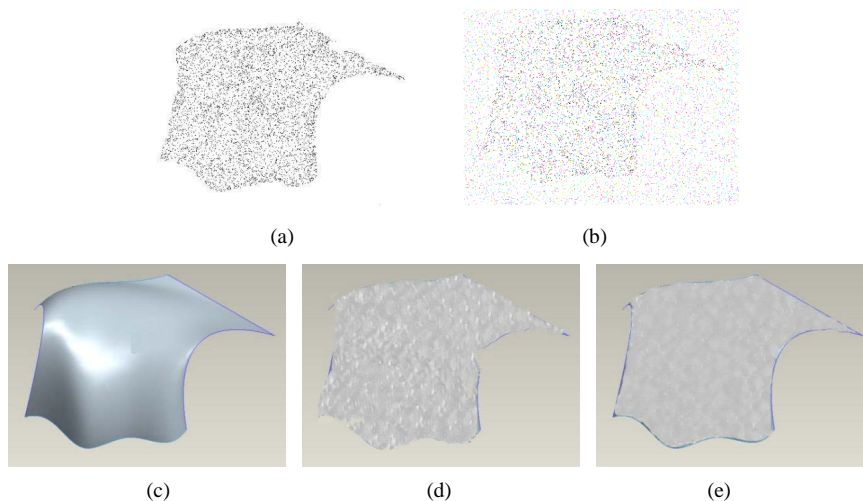


Figure 2. Experimental results of tensor voting for surface detection

图 2. 张量投票方法进行曲面检测的实验结果

噪声的点集图像；图 2(c)为无噪情况下提取的空间三维曲面；图 2(d)和图 2(e)分别展示了加入曲率估计前后的曲面检测结果。从这组实验中可以看出，加入曲率估计之后可以明显提高曲面检测结果的平滑度，且边界模糊现象较少。

5. 结束语

本文在对曲率估计进行数学描述的基础上，对现有的曲率估计方法进行了比较全面的分类总结，并通过实验验证了曲率估计对曲面检测的影响，从而有利于开展进一步的研究工作。由于曲率估计方法多是在具体应用中设计的，因而无论是国内还是国外，都缺乏系统的理论分析和实验研究，国内的研究更是寥寥无几。我们将在本文工作的基础上，对现有的方法做一个量化比较，并进一步探究曲率信息在张量投票方法中的应用。

参考文献 (References)

- [1] Zhang, X.P., Li, H.J., Cheng, Z.L. and Zhang, Y.K. Robust curvature estimation and geometry analysis of 3D point cloud surfaces.
- [2] Chanwimaluang, T., Fan, G.L., Yen, G.G. and Fransen, S.R. (2009) 3-D retinal curvature estimation. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, **13**, 997-1005.
- [3] Koenderink, J.J. (1990) Solid shape. The MIT Press.
- [4] Flynn, P.J. and Jain, A.K. (1989) On reliable curvature estimation. *Conference on Computing Vision and Pattern Recognition*, 110-116.
- [5] Trucco, E. and Fisher, R.B. (1995) Experiments in curvature-based segmentation of range data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **17**, 177-182.
- [6] Bårman, H. (2002) Hierarchical curvature estimation in computer vision. Ph.D. Thesis, Linköpings Universitet, Institutionen för Systemteknik, Bildbehandling.
- [7] Stokely, E.M. and Wu, S.Y. (1992) Surface parameterization and curvature measurement of arbitrary 3d-objects: Five practical methods. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **14**, 833-840.
- [8] Krsek, P., Lukacs, C. and Martin, R.R. (1998) Algorithms for computing curvatures from range data. In: Ball, A., et al., Eds., *The Mathematics of Surfaces VIII, Information Geometers*, 1-16.
- [9] Sander, P.T. and Zucker, S.W. (1986) Stable Surface Estimation. *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition*, Vol. 1, 1165-1167.
- [10] Shi, P., Robinson, G. and Duncan, J. (1994) Myocardial motion and function assessment using 4D images. *Proceedings of the IEEE Conference on Vision and Biomedical Computing*.
- [11] Stewart, C.V. (1995) MINPRAN: A new robust estimator for computer vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **17**, 925-938.
- [12] Werghi, N., Fisher, R.B., Ashbrook, A. and Robertson, C. (1998) Modeling objects having quadric surfaces incorporating geometric constraints. *Proceedings of the 5th European Conference on Computer Vision*, Freiburg, 2-6 June 1998, 185-201.
- [13] Zhao, H.-K., Osher, S., Merriman, B. and Kang, M. (1999) Implicit and non-parametric shape reconstruction from unorganized data. Using a variational level set method. UCLA Computational and Applied Mathematics Reports 98-7, February 1998, Revised February 1999.
- [14] McIvor, A.M. and Valkenburg, J. (1997) A comparison of local surface geometry estimation methods. *Machine Vision and Applications*, **10**, 17-26.
- [15] Kim, S.J., Kim, C.-H. and Levin, D. (2001) Surface simplification using a discrete curvature norm. *Proceedings of the Third Israel-Korea Binational Conference on Geometric Modeling and Computer Graphics*, Seoul, 11-12 October 2001.
- [16] Meek, D.S. and Walton, D.J. (2000) On surface normal and Gaussian curvature approximations given data sampled from a smooth surface. *Computer Aided Geometric Design*, **17**, 521-543.
- [17] DoCarmo, M. (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Upper Saddle River.
- [18] Watanabe, K. and Belyaev, A.G. (2001) Detection of salient curvature features on polygonal surfaces. *Eurographics*, **20**.

-
- [19] Lin, W.-Y., Chiu, Y.-L., Widder, K.R., Hu, Y.H. and Boston, N. (2010) Robust and accurate curvature estimation using adaptive line integrals. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, **2010**, Article ID: 240309.
- [20] Campbell, S.R. and Summers, R.M. (2007) Analysis of kernel method for surface curvature estimation. *Proceedings of the SPIE*, **6511**, Article ID: 65112I.
- [21] Mokhtarian, F., Khalili, N. and Yuen, P. (2002) Estimation of error in curvature computation on multi-scale free-form surfaces. *IEEE Journal of Computer Vision*, **48**, 131-149.
- [22] Dudek, G. and Tsotsos, J.K. (1997) Shape representation and recognition from multiscale curvature. *Computer Vision and Image Understanding*, **68**, 170-189.
- [23] Taubin, G. (1995) Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation. *Proceedings of the Fifth International Conference on Computer Vision*, Cambridge, MA, 20-23 June 1995, 902-907.
- [24] Gopi, M., Krishnan, S. and Silva, C.T. (2000) Surface reconstruction based on lower dimensional localized delaunay triangulation. *Journal of Eurographics*, **19**.
- [25] Franken, E.M., Duits, R. and ter Haar Romenij, B.M. (2007) Curvature estimation for enhancement of crossing curves. *Proceedings of the 8th MMBIA Workshop*, Rio de Janeiro, 14-20 October 2007.
- [26] Page, D.L., Sun, Y., Paik, J. and Abidi, M.A. (2002) Normal vector voting: Crease detection and curvature estimation on large, noisy meshes. *Graphical Models*, **64**, 199-229.
- [27] Tong, W.S. and Tang, C.-K. (2005) Robust estimation of adaptive tensors of curvature by tensor voting. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **27**, 434-449.
- [28] Lombardi, G., Casiraghi, E. and Campadelli, P. (2008) Curvature estimation and curve inference with tensor voting: A new approach. *Lecture Notes in Computer Science*, **5259**, 613-624.