

三角网格去噪算法综述与展望

资政^{1,2}, 仲彦军^{1,2*}, 王潇旖^{1,2}, 曹航宾¹

¹新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆师范大学CAD&CG实验室, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年9月7日; 录用日期: 2025年10月8日; 发布日期: 2025年10月15日

摘要

三角网格去噪是数字几何处理的基础和核心步骤, 对提高模型的质量和保障后续处理的效果有着关键的作用。随着三维数字化的发展, 三维数据的获取变得容易, 但受限于扫描仪的精度、物体表面光线反射等问题, 获取的三维数据往往包含各种噪声, 对后续数据的使用造成影响, 因此网格去噪显得尤为重要。根据三角网格去噪算法的类型, 将算法分为了优化法、滤波法和数据驱动法, 并从理论框架、技术演进和应用场景三个维度深入分析了优化法、滤波法和数据驱动法三类去噪方法。简述了三种常用的评价指标, 通过对比实验, 对优化法、滤波法和数据驱动法在是否具有保持特征能力、有无顶点漂移现象、是否保持体积、是否存在面片翻转现象等方面进行了阐述, 并通过评价指标进行比较。评估了各类方法在不同模型上的去噪效果及其优缺点, 探讨了各方法的适用场景和发展方向, 并对实时去噪、自适应参数调整以及深度几何学习等前沿方向进行了展望。

关键词

三角网格, 数字几何处理, 特征保持, 网格去噪, 深度几何学习

Triangular Mesh Denoising Algorithms: A Review and Prospects

Zheng Zi^{1,2}, Yanjun Zhong^{1,2*}, Xiaoyi Wang^{1,2}, Hangbin Cao¹

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

²CAD&CG Laboratory, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: September 7, 2025; accepted: October 8, 2025; published: October 15, 2025

Abstract

Triangular mesh denoising is fundamental and core step to digital geometry processing, playing a crucial role in enhancing model quality and ensuring the effectiveness of downstream processing. The

*通讯作者。

文章引用: 资政, 仲彦军, 王潇旖, 曹航宾. 三角网格去噪算法综述与展望[J]. 计算机科学与应用, 2025, 15(10): 67-84.
DOI: 10.12677/csa.2025.1510251

widespread use of 3D digitization facilitates data acquisition, yet scanner inaccuracies and surface light reflections introduce noise into acquired 3D data. This contamination significantly compromises downstream processing tasks, establishing mesh denoising as a critical preprocessing step in 3D data analysis. Triangular mesh denoising algorithms are categorized into optimization methods, filtering methods, and data-driven methods. This study systematically examines these three categories through a tripartite analytical framework encompassing theoretical foundations, technological evolution, and application scenarios. Three evaluation metrics are introduced. Comparative experiments examine optimization methods, filtering methods, and data-driven methods regarding feature preservation capability, vertex drift phenomena, volume retention, and mesh flipping artifacts, with systematic comparisons conducted using the metrics. A comprehensive evaluation demonstrates the denoising performance of various methods across different models, along with their respective advantages and disadvantages, and the applicability scenarios and future development directions for each method are explored. The study proposes future directions emphasizing real-time processing, adaptive parameter optimization, and deep geometric learning.

Keywords

Triangular Mesh, Digital Geometry Processing, Feature Preservation, Mesh Denoising, Deep Geometric Learning

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

三维数字化技术的发展促进了三角网格建模在电影制作、数字孪生、人机交互和虚拟现实等领域的应用。然而，由于扫描设备精度限制、复杂表面光线散射以及数据配准误差等因素的影响，网格数据常受到混合噪声的影响。这种噪声在几何特征区域表现出各向同性分布的特点，可能引起模型表面曲率变化和拓扑结构异常。传统去噪方法在处理非均匀采样数据时，常常面临特征保持和噪声抑制之间的矛盾：如果平滑过度，则会损失模型的细微纹理特征；但如果处理过于保守，又无法彻底去除噪声。这直接影响三维模型在精密检测、逆向工程中的应用中的精度。

当前三角网格去噪研究面临多种转变：传统微分几何理论与图神经网络的深度融合，使去噪方法从人工设定规则转向自动学习几何特征；量子计算等新型算力架构对全局优化方法的颠覆性重构，大幅提升了计算效率和计算成本，使百万级网格面片的实时处理成为可能；融合混合噪声数据驱动的自适应去噪体系，突破单一数字几何信息处理的难题。通过系统分析网格去噪技术的发展历程，为解决这些转变中的关键问题提供参考，对构建自主可控的三维几何处理技术具有指导价值。

本文系统比较了各类方法的优缺点，并总结关键特性，为工程实践中解决三角网格去噪问题提供了实用参考。

2. 三角网格的基本定义

三角网格是三维几何模型最常用的离散表示形式，如图 1 所示。

其数学定义为顶点集合 $V = \{v_i\}_{i=1}^n$ 、边集合 $E = \{e_j\}_{j=1}^m$ 和三角面片集合 $F = \{f_k\}_{k=1}^p$ 的拓扑组合。每个顶点 $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in R^3$ 表示三维空间中的坐标，每条边 $e_j = (v_{j1}, v_{j2})$ 连接两个顶点，每个三角面片 $f_k = (v_{k1}, v_{k2}, v_{k3})$ 由三个有序顶点构成闭合曲面片。工程实践中普遍采用 OBJ 等格式实现存储优化，通过

分离顶点坐标与面片索引显著降低数据冗余。

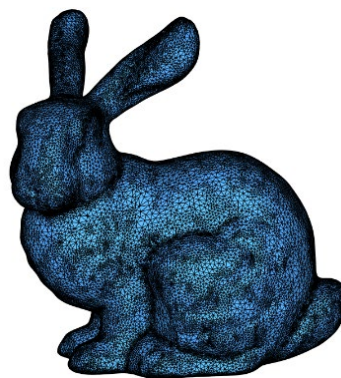


Figure 1. Triangular mesh model

图 1. 三角网格模型

3. 三角网格曲面去噪共性问题

当三角网格模型受到噪声的污染时, 会导致模型的质量下降, 尽管目前已经出现很多网格去噪的方法, 但网格去噪领域仍然存在一些共性问题。

1) 特征保持与噪声区分困难。低噪声情况下, 噪声与微弱特征在频域相近, 去噪时难以区分, 导致细节丢失。高噪声情况下, 现有方法(如双边滤波[1]-[3]等方法)可能将噪声识别为特征或过度平滑特征, 导致去噪效果不理想。

2) 参数敏感。传统算法通常涉及大量参数(如 L_0 优化[4]、双边滤波[1]-[3]等方法), 参数调整往往只能根据经验, 调参过程繁琐冗余, 且对非均匀采样或噪声强度变化敏感, 参数选择有微弱的变化得到的结果可能会有较大的差别。

3) 复杂结构与噪声模式的挑战。对于不规则采样与高噪声模型, 部分方法易导致阶梯状与锯齿噪声, 且扫描数据中的复杂噪声破坏面法向差异, 难以区分特征与噪声。

4) 计算效率与实时性瓶颈。全局优化方法(如 L_0 优化[4]、 L_1 优化[5])需多次迭代, 计算复杂度高, 导致计算的时间成本较大。数据驱动方法(如 NormalNet [6])依赖大量的训练数据, 且训练和推理耗时。

5) 几何变形与拓扑问题。现有方法在处理网格去噪时易导致体积缩小、顶点漂移、面片翻转等问题。

6) 数据依赖性与泛化能力。数据驱动方法(如 DNF-Net [7])在处理未见过的噪声或几何结构时表现往往不佳, 且手动设计的几何描述符难以适用于特殊场景或者复杂场景。

7) 鲁棒性不足。现有方法往往存在假设局限性, 算法基于均匀采样或简单几何假设, 处理不规则网格(如真实扫描模型)时效果往往不佳。

4. 三角网格去噪算法分类

三角网格去噪算法可按照算法是否具有保持网格特征的能力分为各向同性方法和各向异性方法, 也可按照算法的具体实现步骤分为 1 步法、2 步法和多阶段法, 本文采用按照数学模型的方法, 将三角网格去噪算法分为优化法、滤波法和数据驱动法。

4.1. 优化法

优化法是通过数学优化技术来处理和优化三角网格数据, 通常构建一个目标能量函数并对其最小化, 从而去除噪声的目的, 并加入约束条件达到同时保持模型的特征的效果。其数学形式可表示为:

$$\min \mathcal{D}(X, X_0) + \lambda \mathcal{R}(X) \quad (1)$$

其中, X_0 为含噪网格, 数据保真项 $\mathcal{D}$ 约束去噪结果与输入数据的相似性, 正则项 $\mathcal{R}(X)$ 用于特征保持。该方法的核心挑战在于设计具有强特征保持能力的正则化约束。

4.1.1. 几何正则化

几何正则化通过几何属性(如曲率、法线连续性、区域分割)构建正则化项, 保持几何平滑性和特征完整性。如经典的 Laplacian 平滑算法[8], 其原理是将每个顶点的相邻顶点位置信息进行加权平均, 然后替换原来顶点的位置信息, 所以此方法在经过多次迭代后会使得网格的体积发生变化, 如图 2 所示, 随着迭代次数的增加, 网格的表面越来越光滑, 但是网格的体积收缩变得越来越严重。

$$v_i' = v_i + \lambda \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{v_j - v_i}{|N(i)|} \quad (2)$$

其中, v_i' 是顶点 v_i 平滑后的新位置, $N(i)$ 是顶点 v_i 的 I 环领域, $|N(i)|$ 是 v_i 的邻接点的个数, λ 为平滑参数, 控制平滑的程度[9]。

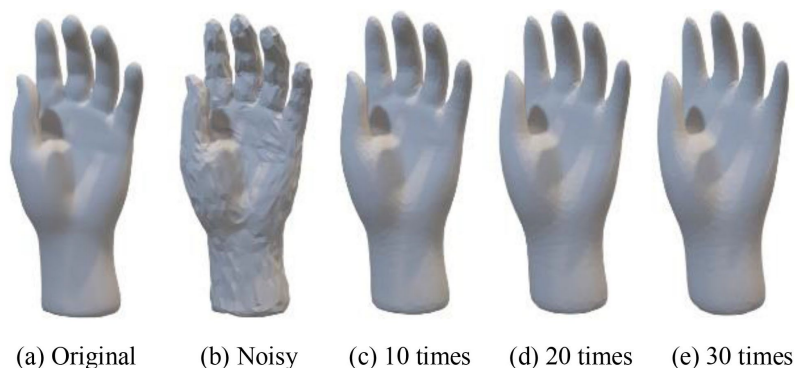


Figure 2. Laplacian smoothing with different iteration counts
图 2. 不同迭代次数的 Laplacian 平滑

由 Laplacian 算法的原理可以得知其顶点会向着重心的方向移动, 通过不断迭代最终会收缩到重心位置。Taubin [10] 在 1995 年提出一种线性低通滤波器, 它通过迭代应用高斯平滑步骤, 并结合正负尺度因子来防止收缩, 从而实现了多边形曲线和多面体表面的平滑。Vollmer 等人[11]在 1999 年提出 HC-algorithm, 同时考虑顶点位置信息及其邻接点位置信息, 通过在 Laplacian 算法的基础上添加一个修正步骤, 将顶点向其原始位置或前一步的位置推动, 从而减少网格在平滑过程中的变形和收缩现象。Desbrun 等人[12]在 1999 年指出, Taubin [9]的方法基于对任意连通性网格的频率进行离散近似, 对于不规则网格, 可能导致在平滑过程中产生几何形变问题, 并提出了尺度依赖的拉普拉斯算子和曲率流算子, 以改进扩散过程并提供更好的平滑效果, 同时避免在平滑过程中产生几何形变和收缩问题。一般的 Laplacian 算法的顶点会向着重心的位置移动, 而 Desbrun 等人提出的基于平均曲率流的平滑算法的顶点会向着顶点法线相反的位置移动。Meyer 等人[13]在 2003 年进一步改进了 Desbrun 等人的方法, 使其能够处理各向异性并保留特征, 他们的方法被称为预设的均值曲率流。

Zhang 等人[14]在 2007 年提出了一种基于顶点的扩散方法用于三维网格去噪。该方法通过求解一个非线性离散偏微分方程, 以充分保留数据的几何结构。Liu 等人[15]在 2020 年提出了一种基于 Mumford-Shah (MS)模型的新型网格去噪框架, 该框架通过定义边缘函数空间及其相关的微分算子, 有效地离散化了收敛近似的 Mumford-Shah 模型。这种方法直接在网格边缘上扩散不连续函数, 而不是通过现有离散化

中的逐点扩散来计算近似的不连续函数,从而避免了现有技术中的一些局限性。Wang 等人[16]在 2023 年提出了一种新颖的分割驱动网格去噪方法。首次提出了基于边缘特征的区域生长分割策略,通过融合法线相似性阈值与几何边缘检测算子,实现噪声鲁棒的网格分区。这种方法通过排除各向异性邻接面对去噪结果和细节保持的负面影响,有效地保留了网格模型的特征,同时分析了传统分割方法在噪声环境中的局限性,为几何处理与计算机视觉的跨领域结合应用提供了新思路。

4.1.2. 稀疏优化

Xu 等人[17]在 2011 年提出一种通过最小化 L_0 梯度来实现图像平滑,同时增强主要的边缘特征的方法。其基本思想是最小化图像中非零梯度的数量,从而在全局范围内控制图像的边缘数量。

He 等人[4]在 2013 年创新性地将 L_0 最小化方法引入网格中,通过最大化平坦区域抑制噪声,同时保留尖锐特征。在这一过程中,作者构建了一种针对任意三角形网格的离散微分算子,该算子即使在退化三角剖分的情况下也具有鲁棒性。但对于大部分稀疏特征,该方法易在光滑区域产生阶梯伪影,且目标函数是非凸非线性的,求解的时间成本较大。Cheng 等人[18]在 2014 年提出了一种新颖且高效的近似算法,该算法基于融合坐标下降框架,通过优化变量并将值相等的相邻变量融合在一起避免陷入局部最优解。Centin 等人[19]在 He 等人 L_0 最小化方法的基础上进行了改进,通过引入曲率显著性图和几何抗锯齿校正,进一步提高了去噪效果和特征保留的能力。

针对 L_0 范数的非凸性,Zhao 等人[20]在 2018 年提出了一种改进的交替极小化方法来求解优化问题,具有更好的收敛性以及良好的延拓性,可扩展至点云去噪领域。

Donoho 等人[21]证明了在一定条件下 L_1 范数和 L_0 范数可以得到相同的结果且比范数更易求解,王鹏等人[5]在 2014 年提出了一种基于 L_1 范数稀疏性的全局网格去噪方法。该方法通过优化全局能量函数来去除网格模型的噪声,同时能够保持网格模型的特征结构,这种全局方法避免了现有滤波方法可能出现的不收敛问题。Wang 等人[22]和 Wu 等人[23]将 L_0 范数转换为 L_1 范数,从而将非凸优化问题转换为求解凸优化问题,降低了求解难度,但这种方法可能会带来较大的误差。Zhong 等人[24]在 2019 年提出了一种基于三重稀疏性先验的网格去噪方法。该方法创新性地将多阶稀疏先验统一于网格去噪框架,突破单一稀疏约束的局限性。通过采用变量分裂和增广拉格朗日优化方法,配合动态权重调整机制,该方法能有效处理高斯噪声、脉冲噪声及其混合噪声。实验验证表明,该方法在激光扫描和 Kinect 等多种噪声数据下的性能均优于传统优化算法。

4.1.3. 低秩恢复

针对传统去噪方法易丢失几何细节的问题,Li 等人[25]在 2018 年提出基于表面面片几何相似性的低秩恢复模型。该方法的核心创新是设计了引导式法片协方差(G-NPC)描述符,通过分析局部法线场的协方差矩阵来准确评估面片相似度。此外,Li 等人还提出了一种基于改进的截断 γ 范数的目标函数,并采用 ADMM 和 IRLS 技术来求解优化问题。

Zhang 等人[26]在 2015 年提出了一种基于全变分(TV)和分段常数函数空间的新型变分模型,有效解决了特征保持与伪影抑制的平衡难题,克服了传统顶点法向场梯度稀疏性不足的缺陷。Zhong 等人[27]在 2018 年提出了一种结合全变分和加权拉普拉斯正则化的网格去噪方法,该方法通过法向量场全变分约束强化特征连续性,引入动态高斯权重调节邻域平滑程度,突破传统方法特征保留与曲面光滑的权衡瓶颈,有效减少了平滑区域中的阶梯效应。Wei 等人[28]在 2019 年提出基于面片法线协同滤波的 PcFilter 方法。该方法创新性地引入非局部相似性先验,通过核空间低秩恢复实现多尺度特征保持下的高效去噪,有效地优化了非线性非凸目标函数。

如图 3 所示,Liu 等人[29]在 2019 年提出了一种基于二阶正则化的方法,该方法通过增强拉格朗日

方法和动态权重策略来求解。这种方法首次在三角网格上定义离散二阶正则项，克服了拉普拉斯类算子模糊特征的缺陷。此外，Liu 等人[30]在 2019 年提出了一种基于各向异性二阶正则化的新方法，通过各向异性二阶正则化模型来恢复噪声网格的面法线，与传统一阶梯度或拉普拉斯正则化相比，该二阶算子能更好地抑制平滑区域的阶梯伪影，同时保持锐利几何特征。

受到 TGV 方法在图像处理方面巨大成功的启发[31]-[36]，Liu 等人[37]在 2022 年提出了一种基于全广义变分(TGV)的网格去噪方法。TGV 模型通过自适应的变阶平衡机制，在特征区主导一阶差分约束，在平滑区强化二阶微分约束，有效克服 TV 方法的阶梯伪影与高阶方法的特征模糊缺陷。

Zhang 等人[38]在 2022 年提出了一种基于松弛的二阶全广义变分(RTGV)模型的新方法。该方法通过结合梯度算子和加权散度算子，设计了包含面法向滤波和顶点更新的两阶段迭代去噪框架。Wang 等人[39]在 2023 年提出了一种快速、高效的显式三维网格去噪算法，该算法基于 Allen-Cahn 方程[40]，利用相场模型精确描述网格表面特征，并构建包含保真项的能量泛函来精确控制去噪过程。

针对可展曲面的去噪问题，Pan 等人[41]在 2024 年提出了一种关注于恢复模型可扩展性的方法，方法通过交替优化法向量场稀疏性与顶点位置，在抑制噪声的同时恢复曲面可展特性。

作为三角网格去噪的理论基础，优化方法通过构建能量泛函的最小化，在数学层面实现了噪声去除与特征保持的平衡。现有优化方法仍面临尖锐特征处的曲率不连续、非均匀噪声下对参数敏感，以及百万级面片的计算困难等核心挑战。未来研究需着力于构建自适应正则化体系，探索新型优化架构，并加强与滤波法和深度学习的跨方法融合，以实现去噪技术向更高精度与实时处理的突破。

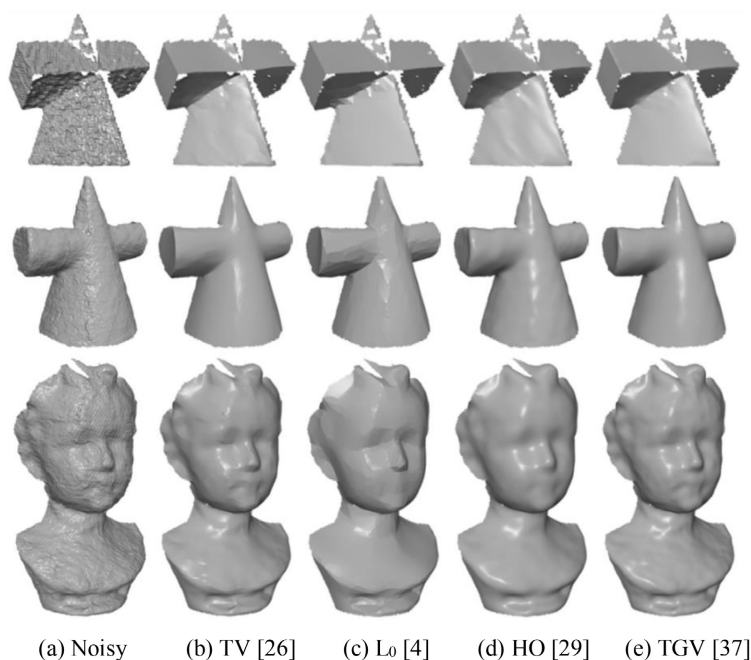


Figure 3. Comparison of denoising effects using different optimization methods [37]
图 3. 不同优化法去噪效果对比[37]

4.2. 滤波法

三角网格去噪的滤波法主要基于去除高频噪声的思想，其核心原理是将噪声视为高频信号，通过各种滤波器对三角网格的顶点或面法向进行处理，以减少噪声的影响。

早期的滤波算法在平滑网格和保持特征两方面很难做到统一，可能会模糊网格的几何特征。Tomasi

等人[42]在 1998 年提出双边滤波(Bilateral Filter)。双边滤波是一种非线性滤波方法,它结合了高斯滤波的思想,通过考虑像素之间的空间接近度和强度相似性来保留图像的边缘信息,同时减少噪声。

4.2.1. 基于顶点的双边滤波

Fleishman 等人[2]在 2003 年将图像的双边滤波算法引入网格中,算法使用两个权重函数,一个是基于空间距离的高斯权重函数 W_c ,用于控制邻域内顶点的权重;另一个是基于强度差异的权重函数 W_s ,在强度差异较大时减少权重。算法通过计算每个顶点的位移并更新其位置来去噪,顶点仅沿着法线方向移动,从而避免了网格的不规则性增加。Jones 等人[43]在 2003 年提出了一种非迭代网格平滑方法,通过局部切平面预测建立顶点位置估计模型,但这种方法本身不保证体积保持,且单次处理无法增强特征。Vialaneix 等人[44]在 2011 年根据 Jones 等人[43]的方法提出了一种可分离近似方法,即 SBL (Separable Bilateral)滤波技术,通过沿主曲率方向实施两次一维滤波,将二维邻域搜索简化为正交方向遍历,从而显著提高了双边滤波的效率。

Choudhury 等人[45]2005 年在 Tomasi 等人[42]的方法上进行改进,提出了三边滤波(Trilateral Filter),通过引入倾斜滤波窗口和自适应区域增长方法进行改进。这些改进使得滤波器在高梯度区域更有效地保留边缘特征,同时实现更强的噪声降低和异常值排除,尤其在对比度图像和三维网格平滑中表现出色。Wang 等人[46]在 2020 年提出的三边滤波器通过改进双边滤波器实现高效边缘保持平滑。该算法引入梯度平滑域和自适应邻域检测技术,单次处理即可生成分段线性近似,克服传统方法在高梯度区域的噪声敏感问题。该方法的全局优化策略提高了去噪性能,且只需要一个用户设定的参数,增强了算法的鲁棒性和实用性。

基于顶点的滤波方法主要通过空间距离和邻域关系调整顶点位置,在保留尖锐特征的同时去除噪声。然而,当噪声水平较高时,这种方法往往会导致顶点法向的误差增大,去噪效果不佳。相比之下,基于面法向的滤波方法通常采用更复杂的权重计算方法,综合考虑法向量的相似性和几何结构,因此能够更好地保持网格的几何特征。

4.2.2. 基于面法向的双边滤波

早期的面法线滤波方法对噪声水平较高的网格数据效果不佳,如 Yagou 等人[47]在 2002 年提出的方法,通过对面法向量进行均值和中值滤波来平滑网格,这种方法在处理噪声较小的网格时能够保持原有特征,但很难处理高噪声数据。Sun 等人[48]在 2007 年通过加权平均相邻面法线来迭代过滤嘈杂的面法线,因为权重函数能够给予与当前面法线接近的邻域面法线更高的权重,而对于远离当前面法线的邻域面法线则给予较低的权重或忽略。

Zheng 等人[1]指出,Sun 等人[48]的方法在处理法线时没有考虑输入网格的参数化信息,这意味着在处理具有高度不规则采样的输入网格时去噪效果可能不够理想,并在 2010 年提出双边法向滤波(BNF),该滤波器将网格法向量视作原始网格上的表面信号,综合考虑空间距离和法向量差异,以实现去噪与特征保持。为了提升网格去噪的效果,可采用多次迭代双边滤波进行处理。这种方法能够扩大算法的空间作用范围,使每个网格面的几何特征修正不仅参考相邻的面片信息,同时也会综合较远区域网格面片的信息。

Wei 等人[49]在 2014 年提出的双边滤波方法创新性地结合了面法向量和顶点法向量信息。该方法首先基于张量投票分类特征顶点,将邻接面聚类为多个平滑区域,分别拟合顶点法线并构建全局约束优化面法线场,最后通过二次优化融合双边法线场更新顶点位置。Hurtado 等人[50]在 2024 年基于其 2022 年的点云去噪方面的研究,提出了改进的拓扑感知多阶段优化算法。这种方法引入了顶点更新松弛机制,结合加权质心投影抑制拓扑形变,并采用双边滤波协同去噪,有效地减少了网格伪影,并提高了去噪质量。

4.2.3. 引导法向滤波

虽然双边法向滤波在网格去噪中表现不错,但如果噪声过强,计算出的法向量加权平均值会与原始网格的法向量相差很大,影响结果的可信度。为了解决这个问题,Zhang 等人[3]在 2015 年受图像领域的联合双边滤波器的启发,即强度权重不是从输入图像计算得出,而是来自另一张引导图像,并将其原理应用于网格中,提出了引导法线滤波器(GNF),其公式为:

$$n_{t+1}^i = K_i \sum_{j \in N(i)} \zeta_{ij} W_c(\|c_i - c_j\|) W_s(\|gn_t^i - gn_t^j\|) n_t^j \quad (3)$$

其中, n_{t+1}^i 是面片 f_i 的滤波法线, K_i 是归一化因子,确保所有权重的和为 1,以便在更新过程中保持总和不变。 ζ_{ij} 为表面采样率的权重。 gn_t^i 为邻接面 f_j 的引导法线, n_t^j 为邻接面 f_j 的原始法线, $N(i)$ 为 f_i 的 I 环领域。

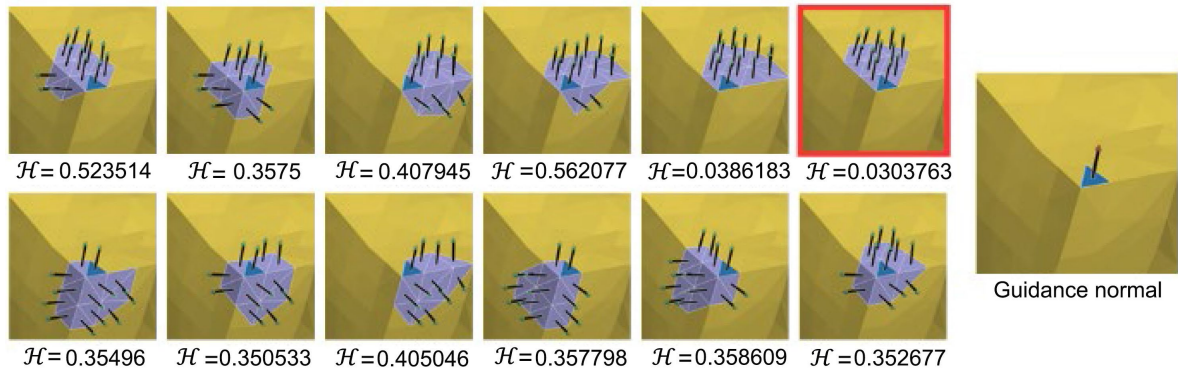


Figure 4. Patch-based construction of a guidance normal [3]

图 4. 基于面片的引导法线构建[3]

该方法与 Zheng 等人[1]的方法相似,但 Zheng 等人[1]的方法依赖于输入网格的法线场,而 Zhang 等人[3]的方法通过寻找与面片法向最一致的相邻块来计算引导法线。为了实现这一点,Zhang 等人[3]为每个面片定义了一个各向同性邻域。在该邻域内,所有面片的法线几乎一致,如图 4 所示。然后,所选邻域的平均法线被用作该面片的引导法线。从图 4 中我们可以看到,相邻的块停留在尖锐特征的一侧,不会越过边缘,因此生成的引导法线是特征感知的,从而具有更好的特征保持能力。不过,这种方法的一个主要限制是需要准确找到引导法线,并且该方法可能会导致角缺失的情况。

Wang 等人[51] 2015 年在 Zhang 等人[3]的方法上提出了一种简单有效的尺度感知网格平滑滤波器,称为滚动引导法线滤波器(RGNF),用于处理不同尺度的三角形网格几何特征,与去噪不同,这种方法运用于平滑几何特征,其思想是迭代平滑小尺度的特征,同时保留大尺度的特征。Zhang 等人[52]在 2019 年通过利用静态和动态引导提出一种新方法静态/动态(Static/Dynamic, SD)滤波器,静态引导通常是基于输入信号的结构信息,可以直接控制滤波过程,但可能与输入信息不一致,导致不理想的结果,而动态引导根据当前信号值进行调整,但对噪声和异常值敏感,同时考虑静态引导和动态引导的影响使得该方法对去除噪声和平滑小尺度特征的效果较为良好。

Zhao 等人[53]在 2018 年提出一种多尺度相似性增强的网格去噪方法,通过构建 k-Ring 多尺度面片表征局部几何结构。创新性地采用 k-Ring 环面片的加权相似度计算策略,克服单尺度面片对噪声敏感或特征模糊的缺陷。Liu 等人[54]在 2018 年提出了一种基于面片分类的特征保持网格去噪算法。通过多尺度张量投票将面片分为特征面和非特征面,特征面分布在形状边缘区域,并结合几何邻域和局部邻域进行联合双边滤波,在尖锐特征保持方面优于 Zhang 等人[3]的方法。Zhao 等人在之前的工作上[53]进一步

发展了特征检测的策略,在2019年[55]提出了一种基于图的特征保持网格法线滤波方案,通过图模型和迭代归一化割算法来更准确地区分和保留网格特征。

Zhong 等人[56]在2021年提出了一种形状感知的网格法线滤波方法,首先为每个面选择一个候选补丁,然后利用谱分析和最小化来精炼这些候选补丁,以形状感知的方式生成不包含任何几何特征的精炼补丁。这些补丁随后用于估计可靠的引导法线场,从而准确描述了噪声存在下的底层表面形状。Guo 等人[57]在2021年提出了一种基于自适应一致邻域的网格去噪方法。该方法通过两阶段方案构建用于引导法线滤波的自适应一致邻域,通过使用这些构建的自适应一致邻域,他们计算出更准确的引导法线场。Li 等人[58]在2019年提出了一种特征确信的网格去噪方法(FCMD)。该方法通过在噪声网格的副本上进行特征边的识别和迭代修正,有效地解决了在大噪声背景下锐边与平滑区域的混淆问题,在合成噪声模型和真实扫描数据上均取得更优的几何保真度。Han 等人[59]在2022年设计了一个特征增强滤波器,与常规的滤波器结合使用,以便在去除噪声的同时增强特征。

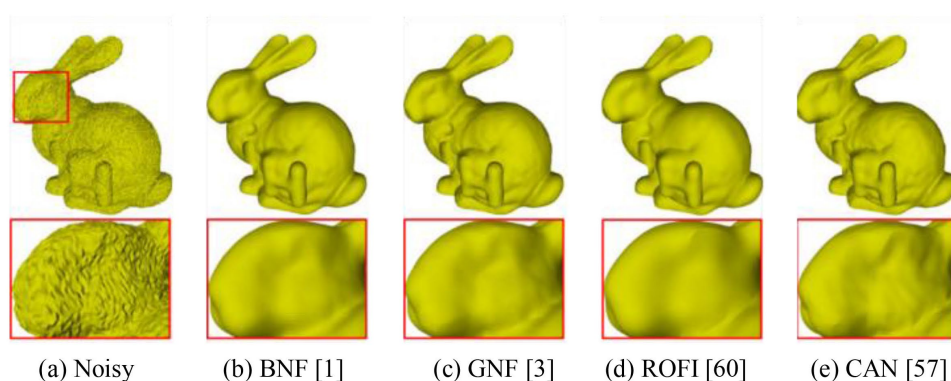


Figure 5. Comparison of denoising effects using different filtering methods [57]
图 5. 不同滤波法去噪效果对比[57]

如图5所示,由于滤波法的计算效率高、具有明确的几何意义等特点,在工程实践中得到广泛应用。然而,现有的滤波法仍存在局部邻域假设固定的问题,在处理非均匀噪声时易产生伪特征,且在尖锐特征与平滑区域的交界处容易导致曲率变化,使得去噪的效果差。未来研究需重点突破动态邻域的构建,并与数据驱动技术融合,构建满足实时处理需求的混合滤波策略。

4.3. 数据驱动法

对于非均匀采样或者含有不同噪声的网格,优化法和滤波法往往会陷入假设困境,导致去噪效果不佳,并且参数调整过程繁琐,为了解决这些问题,数据驱动法被广泛采用。

Wang 等人[22]在2014年提出了一种通过加权 L_1 分析压缩感知来解耦噪声和特征的方法。该方法首先通过拉普拉斯正则化构建基础网格,消除高频噪声,然后采用 L_1 分析压缩感知技术从残差场中提取特征信息。实验表明,该方法在保持尖锐特征的同时,能够有效抑制各向同性噪声引起的法向异常变化。Wang 等人[61]在2016年构建了级联法线回归框架,采用法线描述符(FFND)编码局部几何特征,通过级联神经网络逐步回归真实法线场。与传统方法相比,该框架突破性地引入增量式特征学习机制,通过多阶段回归器逐步精确法线估计,在保持曲面连续性的同时实现噪声的渐进式去除。该方法不需要预先设定噪声的分布模型,在非均匀采样网格中展现出良好的性能。

针对大噪声场景下的几何恢复难题,Wang 等人[62]在2019年提出双阶段深度学习架构。第一阶段通过相似面片聚类构建低秩约束,利用非局部相似性先验抑制随机噪声;第二阶段引入逆向法线滤波算

子,通过残差学习捕获高频几何特征,该方法首次将低秩恢复理论与深度特征学习相结合。Zhao 等人[63]在 2019 年提出了 NormalNet,首次将 CNN 引入网格去噪领域。针对网格拓扑不规则性,设计体系化策略将局部结构转化为规则 4D 张量输入 CNN,通过多阶段迭代训练优化法线估计。采用合成数据生成机制平衡特征样本,结合引导滤波保留几何细节。

Armando 等人[64]在 2022 年提出了一种基于图卷积网络的端到端学习策略。这种方法通过构建一个图卷积网络,构建了一个多尺度特征提取机制,能够同时捕获模型不同规模的几何特征。该方法的一个重要特点在于其训练过程不需要依赖显式的数据对应关系,这使得它能够处理真实扫描模型的噪声数据。Li 等人[7]在 2021 年提出了深度法线滤波网络 DNF-Net,该方法采用多尺度特征嵌入单元来获取不同层次的几何信息,结合残差学习策略分离噪声和特征,并设计深度监督联合损失函数。Shen 等人[65]在 2022 年提出了一种名为 GCN-Denoiser 的新型数据驱动方法,利用三角形网格双空间构建图结构,结合静态和动态边卷积操作,同时捕捉显性和隐性的邻域关联特征。通过级联 GCN 模块渐进回归无噪声的面法向,并引入法向张量投票机制实现局部特征对齐。Hattori 等人[6]在 2022 年提出 DDMP 方法,构建了一个基于双图卷积网络的去噪框架,通过顶点位置网络(PosNet)和面法线网络(NormNet)的协同训练机制实现端到端优化。其中 PosNet 专注于学习顶点位移特征,而 NormNet 则直接回归法线方向,这种设计规避了传统方法的迭代顶点更新过程,并且该方法结合了拉普拉斯平滑、双边滤波以及位置-法线一致性损失等多种优化策略。且 DDMP 方法只需要单一样本即可学习网格的自先验特征,这一设计使其摆脱了对大规模训练数据集的依赖,提升了方法的适用范围。

Xing 等人[66]在 2022 年提出一种基于循环神经网络(RNN)的网格去噪方法,通过 k-means 聚类方法将网格面片按几何特征聚类,针对每类单独训练 RNN 模型。该方法利用 RNN 的时序反馈特性,构建三级级联回归模块,将原始特征描述符精确地转换为去噪后的法向量。Zhao 等人[67]在 2022 年提出局部表面描述符(LSD),将网格表面转换为规则 2D 网格,结合极坐标与笛卡尔坐标转换实现几何特征保留。通过均匀采样生成包含法向与几何信息的 LSD 矩阵,利用标准 ResNet 直接处理,避免复杂网络设计。实验表明,该方法在保留几何细节和去噪效果上优于现有基于图卷积网络的方法。

为解决现有图卷积网络(GCN)在三角网格去噪中因图结构固定而导致泛化性弱、全局嵌入导致特征过度平滑的问题,Tang 等人[68]在 2023 年提出了一种基于密集局部图神经网络(DOGNET)的去噪方法。该方法通过局部邻域节点特征聚合实现动态嵌入,结合密集连接增强特征传播,在保持几何特征的同时有效去除噪声。Wang 等人[69]在 2024 年提出了一种名为 Hy-per-MD 的新型去噪方法。这种方法通过超网络动态定制去噪参数,能够根据每个面片的噪声强度和几何特征动态调整参数,解决了 Shen 等人[65]、Zhao 等人[63]、Li 等人[7]和 Zhang 等人[3]没有充分考虑每个网格面片的具体噪声强度的问题。

为解决传统扩散模型在网格去噪任务中存在的结构无法保留以及难以处理不规则拓扑结构网格的问题,Lee 等人[70]在 2025 年提出了结构保留的扩散过程和拓扑无关的网格扩散模型 DMESH。通过将顶点投影到多个二维视图中,使用深度网络学习优化的扩散过程,使得这种方法不受网格拓扑结构的限制。Wang 等人[71]在 2024 年提出一种联合噪声与几何感知的网格去噪方法 FCL,通过滤波系数学习器动态生成滤波系数,以实现对不同网格的动态优化。

Zhao 等人[72]在 2024 年提出首个基于 Transformer 的网格去噪框架 SurfaceFormer,通过结合深度学习和 Transformer 架构,开发了局部表面描述符(LSD),结合几何和空间信息,提高了去噪性能。Zhou 等人[73]在 2025 年提出 ResGEM 网格去噪网络,通过双分支结构平衡平滑度与几何细节。并且采用多尺度图嵌入模块提取特征,避免了传统图池化的拓扑信息丢失问题(图 6)。

数据驱动方法通过深度神经网络对噪声模式的隐式学习,开创了网格去噪的智能处理方法。当前的数据驱动方法在保持尖锐特征与处理非均匀噪声方面均有很大的优势,但仍存在训练数据匮乏导致的适

用范围较小的问题，且在处理千万级面片方面存在效率的问题。

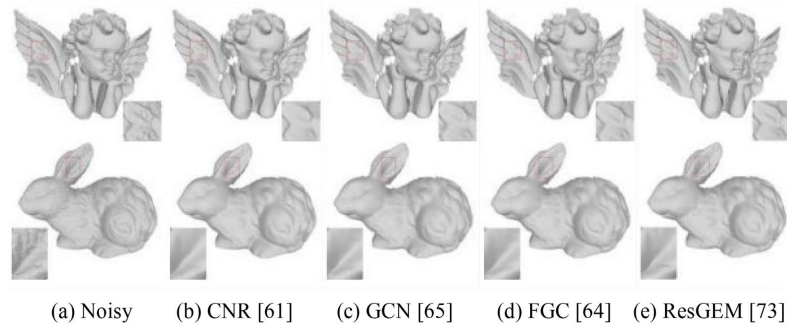


Figure 6. Comparison of denoising effects using different data-driven methods [73]
图 6. 不同数据驱动法去噪效果对比[73]

5. 实验结果与比较

本文选择了均方角误差、Hausdorff 距离和基于顶点的 L_2 误差度量三种常用的网格去噪效果评估方法，并且针对不同的模型给出了不同去噪算法的结果对比图以及三种评估方法的结果比较。

5.1. 均方角误差(Mean Squared Angular Error, MSAE)

均方角误差是指去噪后网格的法向量与原始网格的法向量之间的差异。MSAE 越小，说明去噪后网格的法向量与原始网格的法向量越接近，即去噪效果越好。

$$E_a = E[\angle(n', n)] \quad (4)$$

其中， E 表示期望值， $\angle(n', n)$ 是去噪后的法向量 n' 与原始法向量 n 之间的夹角。

5.2. Hausdorff 距离

Hausdorff 距离衡量两个点集之间的最大距离，则 Hausdorff 距离越小，去噪后的网格与原始网格越接近，去噪效果越好。设 A 和 B 是两个点集，Hausdorff 距离定义为：

$$d_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \right\} \quad (5)$$

其中， $\|a - b\|$ 表示点 a 和点 b 之间的欧氏距离。

5.3. 基于顶点的 L_2 误差度量

基于顶点的 L_2 误差度量考虑了网格中所有顶点及其相邻面，并计算去噪后顶点位置与原始网格顶点位置之间的平均平方距离。

$$E_v = \sqrt{\frac{1}{3 \sum_{k \in F} A_k} \sum_{i \in V} \sum_{j \in F_v(i)} A_j d(x'_i, T)^2} \quad (6)$$

其中， $d(x'_i, T)$ 是去噪后顶点 x'_i 的位置到原始网格中与该顶点相邻的面片 T 最近的距离。

5.4. 算法比较与分析

本文采用几种常用的经典去噪算法分别对 CAD 模型(Block 模型)、真实扫描模型(angel 模型)和细节丰富的模型(armadillo 模型)进行去噪处理，并在表 1 和表 2 中给出了各种去噪算法的 Hausdorff 距离、均

方角误差和基于顶点的误差度量结果。

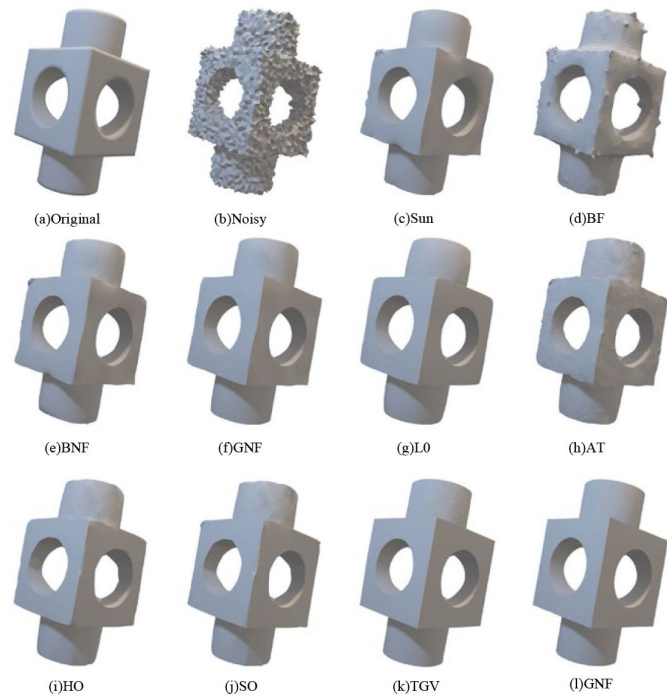


Figure 7. Comparison of denoising effects of various algorithms on CAD model (Block 0.5)
图 7. 各种算法对 CAD 模型(Block 0.5)的去噪效果比较

由图 7 可知，对于 CAD 模型，BNF [1]对于噪声去除的效果较好，但同时也会导致特征过度平滑。TGV 方法[30]由于正则化项对法向场的保护作用显著，使得其法线精度优于其他方法，对于噪声去除的效果较好，但在顶点恢复方面表现得不够优秀。BF 方法[2]对于 CAD 模型的去噪效果较差，且会导致边缘钝化。 L_0 优化[4]通过最小化网格中非零梯度的数量，使得在去噪过程中能够有效保留 CAD 模型的尖锐特征。GNF 方法[3]和其他方法虽然都能保持锋利的边缘，但同时也会造成轻微的扭曲。

Table 1. Hausdorff distance
表 1. Hausdorff 距离

去噪算法	Block $ F = 17,550$	Angel $ F = 48,090$	Armadillo $ F = 52,000$
Sun [48]	0.835643	0.31553	0.916377
BF [2]	1.0991	0.488635	0.840271
BNF [1]	0.1742	0.002755	1.01242
GNF [3]	0.446288	0.336547	0.882546
L_0 [4]	0.962841	0.363683	0.873992
AT [15]	3.24117	0.428791	3.37436
HO [29]	0.84302	0.285073	5.67724
SO [30]	1.65254	0.295869	4.40421
TGV [37]	0.837322	0.211918	1.04704
GCN [65]	0.30808	0.178627	0.125442

由图 8 可知,对于真实扫描模型,双边法向滤波[1]、引导法向滤波[3]均未能达到较好的去噪效果,这是由于法线场的优化可能损失了局部顶点位置的精度。而 HO [29]、SO [30]等方法虽然能够较好地去除噪声,但由于这些方法对正则化参数敏感,也导致了特征纹理细节被分割为块状,破坏了网格的连续性。

综上,通过不同的对比试验可以得知,基于优化的去噪方法对于 CAD 模型的细节保留能力较强,并且能够很好地消除噪声的影响,而对于真实扫描模型,优化法虽然能够去除噪声的影响,但会过度平滑特征,且会产生阶梯状的伪影。对于细节丰富的模型,优化法并不能很好地区分噪声与特征,导致陷入去除噪声与保持特征平衡的困境,因此优化法更适用于 CAD 模型。滤波法对于低噪声的 CAD 模型噪声去除能力较强,但容易扭曲模型的边。对于真实扫描模型,滤波法能够有效去除噪声的影响,并且在一定程度上能够保持模型的细节特征。对于细节丰富的模型,滤波法会陷入去除噪声与保持特征平衡的困境。因此,滤波法适用于噪声较低的场景下,且对于真实扫描模型效果较好。数据驱动法对于各种模型的去噪和特征保持的效果都较为突出,但其仍然存在对数据依赖性强和计算成本高的问题。

通过选取尖锐特征保持能力、有无顶点漂移、体积保持能力、是否去除异常值、是否具有抵抗面片翻转能力等方面作为依据,具体分析了数十种不同的方法,并将结果统计到表 3 中,为工程实践中解决三角网格去噪问题提供了实用参考。

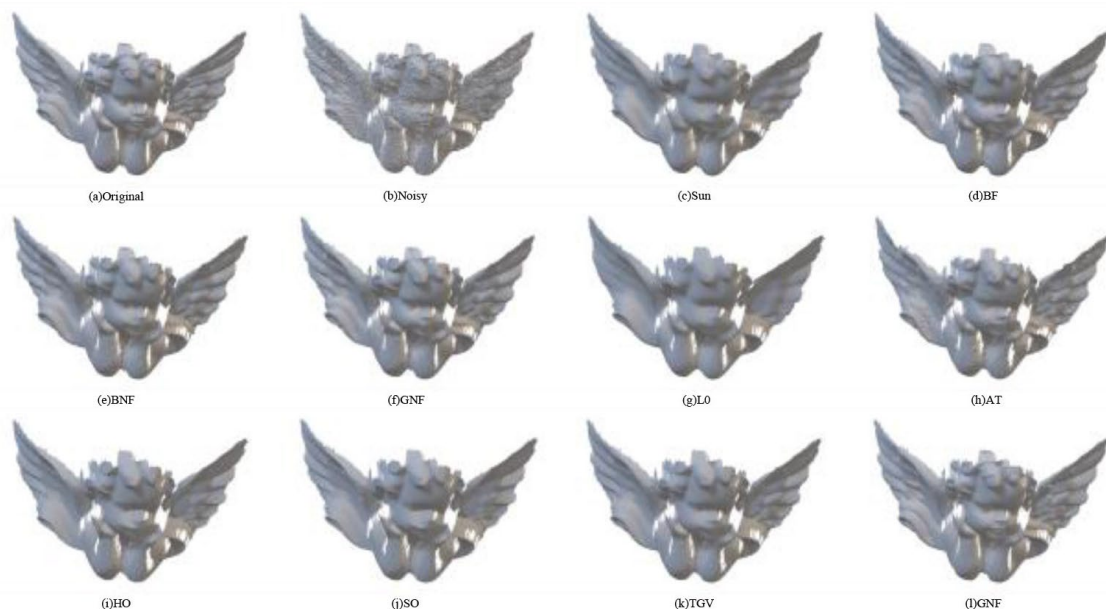


Figure 8. Comparison of denoising effects of various algorithms on kinect-scanned models (Angel 0.3)
图 8. 各种算法对真实扫描模型(Angel 0.3)的去噪效果比较

Table 2. MSAE and vertex-based L_2 error metric
表 2. 均方角误差和基于顶点的 L_2 误差度量

去噪算法	Block	$ F = 17,550$	Angel	$ F = 48,090$	Armadillo	$ F = 52,000$
	E_a	E_v	E_a	E_v	E_a	E_v
Sun [48]	0.152156	0.0428401	0.333253	0.0207271	0.272569	0.0807336
BF [2]	0.272763	0.121023	0.243945	0.013657	0.208572	0.0907364
BNF [1]	0.130952	0.038648	0.227882	0.0089437	0.261041	0.0851376
GNF [3]	0.0813179	0.0281054	0.231632	0.00788684	0.241151	0.0735867

续表

<i>L₀</i> [4]	0.115292	0.0599658	0.312741	0.0220372	0.241535	0.0828186
AT [15]	0.145881	0.440301	0.289588	0.0399907	0.275261	0.163398
HO [29]	0.104001	0.051227	0.274035	0.0165927	0.233019	0.621281
SO [30]	0.0869724	0.251042	0.266984	0.0268029	0.271169	0.49045
TGV [37]	0.0674852	0.232974	0.0128641	0.0114639	0.220871	0.103884
GCN [65]	0.0331487	0.0111943	0.132255	0.00341578	0.050471	0.027728

Table 3. Comparison of triangular mesh denoising algorithms

表 3. 三角网格去噪算法对比

方法	尖锐特征 保持	顶点 漂移	体积 保持	去除 异常值	抗面 片翻转	具体表现
He [4]	√	√	×	×	×	保留尖锐特征，易产生阶梯伪影，时间成本大
Cheng [18]	√	√	×	×	×	特征保持和平滑效果好
王鹏[5]	√	×	×	×	×	保持特征，参数简单
Zhao [20]	√	×	√	×	×	保持几何特征，适应大尺度噪声，可延展至点云
Li [25]	√	×	√	√	×	基于顶点法向的低秩恢复方法，细节保留能力强
Zhang [26]	√	×	√	√	×	对小尺度特征保护能力强，平衡特征与伪影抑制
优化法	Liu [29]	√	×	√	√	抑制阶梯效应，适用复杂几何形状，计算成本较高
Liu [30]	√	×	√	√	√	抑制阶梯伪影，同时保持尖锐特征
Liu [15]	√	×	√	√	√	克服了传统方法对不连续函数模糊化问题
Liu [37]	√	×	√	√	√	结合 TGV 的一阶和二阶项，优于[15]
Zhang [38]	√	×	×	√	√	同时保持尖锐特征和防止面片翻转，参数调整复杂
Wang [39]	√	×	×	√	√	高效，适合大规模网格处理，但参数较多
Wang [16]	√	×	×	√	√	分割避免邻域干扰，但非均匀网格易折叠
滤波 (1 步法)	Meyer [13]	×	√	√	×	各向异性，能够精确估计法向量和曲率
Fleishma [2]	×	√	×	×	×	基于顶点的双边滤波迭代方案，算法高效
Jones [43]	√	√	×	√	×	非迭代方案，特征增强能力有限
滤波 (2 步法)	Yagou [47]	×	√	√	×	在防止过度平滑方面优于文献[8] [10] [12]
Sun [48]	√	√	×	×	×	简单高效，顶点更新算法收敛，适用于大规模网格
Zheng [1]	√	√	√	×	×	提供局部迭代和首次提出全局非迭代方案
Zhang [3]	√	×	√	×	×	通过可靠的引导法线，提供良好的特征保持结果
Yadav [60]	√	×	√	√	×	对于微小的特征保持效果良好
Guo [57]	√	×	√	√	×	构建自适应一致邻域计算引导法线场
滤波 (多阶段)	Wei [49]	√	×	√	√	二次优化结合双法向约束，减少顶点漂移
Wang [51]	√	×	√	√	√	有效去除小尺度几何纹理并保持大尺度特征
Zhang [52]	√	×	×	√	√	结合静态、动态引导，去除小纹理保留大特征
Zhao [53]	√	×	×	√	√	结合引导法线和非局部相似性实现多尺度滤波
Liu [54]	√	×	×	√	√	对特征面片和非特征面片分别优化

续表

	Zhao [55]	√	×	×	√	√	图割和归一化割算法，避免伪特征的产生
	Zhong [56]	√	×	√	√	√	通过形状感知的引导法线场，有效保持尖锐特征
	Li [58]	√	×	√	√	×	处理高噪声水平的网格时表现出色
	Hurtado [50]	√	×	√	√	√	通过噪声水平估计，能够自动设置大多数参数
	Wang [61]	√	√	√	×	×	通过级联回归逐步优化法线
	Wang [62]	√	×	√	√	√	去噪 + 几何恢复，高噪声水平下能保持良好的效果
	Zhao [63]	√	√	√	×	√	通过学习生成可靠引导法线，能有效恢复尖锐特征
	Armand [64]	√	×	√	√	√	首个端到端的图卷积网络直接处理网格拓扑
	Li [7]	√	×	√	√	√	局部-全局特征提取，平衡细节保留与噪声抑制
	Shen [65]	√	×	√	√	√	首个基于 GCN 的去噪方法，效率优于文献[63]
数据 驱动法	Hattori [6]	√	×	√	√	√	同步优化顶点位置和法线，避免传统迭代更新过程
	Xing [66]	√	×	√	√	√	首次将 RNN 引入网格去噪，不需要大量数据集
	Tang [68]	√	×	√	√	√	局部图神经网络，避免 GCN 全局平滑问题
	Wang [69]	√	×	√	√	√	引入超网络，解决了传统方法泛化性差的问题
	Lee [70]	√	×	√	√	√	将 3D 网格投影到多个 2D 视图中，效率高于 GCN
	Wang [71]	√	×	√	√	√	滤波系数不依赖固定假设，适用多种噪声和结构
	Zhao [72]	√	×	√	√	√	几何 + 空间提取特征，Transformer 实现全局聚合
	Zhou [73]	√	×	√	√	√	ResGEM 网络结构结合了静态和动态图卷积

6. 结语

三角网格去噪作为数字几何处理的核心技术，历经数十年发展已形成众多有效的方法。实验表明，不同方法在 CAD 模型、真实扫描数据和细节丰富模型等场景中呈现明显的性能差异。TGV [30]等高阶优化方法在规则几何特征保持方面优势明显，而引导法向滤波[3]在复杂曲面去噪中更具鲁棒性。深度学习方法在各项指标上均表现优异，但其可解释性和计算成本仍是实际应用的瓶颈。当前的研究方向应着重解决几个关键的问题：

- 1) 构建多种类型噪声联合处理框架，突破传统方法对单一噪声的假设限制。
- 2) 设计可解释的深度学习模型，例如在网络中融入微分方程求解方法，提升模型透明度。
- 3) 构建复杂网格的实时去噪方法，满足 AR/VR 等场景的毫秒级响应需求[50]。
- 4) 建立满足实际制造精度要求的自适应参数调整方法，从而更精准地控制误差。

值得关注的是，新兴的几何深度学习技术既能考虑网格的几何特征，又能准确识别出噪声，为特征保持与去噪的平衡提供了新思路。Wang 等人[69]在 2024 年提出的超网络参数动态调整方案，Lee 等人[70]在 2024 年构建的拓扑无关扩散模型，均标志着网格去噪领域正从经验驱动向理论指导的方向转变。未来的研究方向需融合微分几何、最优化理论与人工智能等方法，构建具有可解释性的新一代去噪方法等，为人机交互、数字孪生等国家战略需求提供核心技术支撑。

基金项目

- 1) 自治区自然科学基金(2021D01A125);
- 2) 自治区高校科研计划基金(XJEDU2020Y027);
- 3) 中央支持地方高校改革发展专项资金项目(新疆师范大学)。

参考文献

- [1] Zheng, Y., Fu, H., Au, O.K. and Tai, C. (2011) Bilateral Normal Filtering for Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **17**, 1521-1530. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2010.264>
- [2] Fleishman, S., Drori, I. and Cohen-Or, D. (2003) Bilateral Mesh Denoising. *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*, San Diego, 27-31 July 2003, 950-953. <https://doi.org/10.1145/1201775.882368>
- [3] Zhang, W., Deng, B., Zhang, J., Bouaziz, S. and Liu, L. (2015) Guided Mesh Normal Filtering. *Computer Graphics Forum*, **34**, 23-34. <https://doi.org/10.1111/cgf.12742>
- [4] He, L. and Schaefer, S. (2013) Mesh denoising via L_0 minimization. *ACM Transactions on Graphics*, **32**, 1-8. <https://doi.org/10.1145/2461912.2461965>
- [5] 王鹏, 王胜法, 曹俊杰, 等. L_1 优化在网格去噪中的应用[J]. 中国图象图形学报, 2014, 19(4): 637-644.
- [6] Hattori, S., Yatagawa, T., Ohtake, Y. and Suzuki, H. (2022) Learning Self-Prior for Mesh Denoising Using Dual Graph Convolutional Networks. In: Avidan, S., Brostow, G., Cissé, M., Farinella, G.M. and Hassner, T., Eds., *Computer Vision—ECCV 2022*, Springer, 363-379. https://doi.org/10.1007/978-3-031-20062-5_21
- [7] Li, X., Li, R., Zhu, L., Fu, C. and Heng, P. (2021) DNF-Net: A Deep Normal Filtering Network for Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **27**, 4060-4072. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2020.3001681>
- [8] Field, D.A. (1988) Laplacian Smoothing and Delaunay Triangulations. *Communications in Applied Numerical Methods*, **4**, 709-712. <https://doi.org/10.1002/cnm.1630040603>
- [9] Taubin, G. (1995) A Signal Processing Approach to Fair Surface Design. *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques—SIGGRAPH'95*, Los Angeles, CA, 6-11 August 1995, 351-358. <https://doi.org/10.1145/218380.218473>
- [10] Taubin, G. (1995) Curve and Surface Smoothing without Shrinkage. *Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision*, Cambridge, 20-23 June 1995, 852-857.
- [11] Vollmer, J., Mencl, R. and Müller, H. (1999) Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes. *Computer Graphics Forum*, **18**, 131-138. <https://doi.org/10.1111/1467-8659.00334>
- [12] Desbrun, M., Meyer, M., Schröder, P. and Barr, A.H. (1999) Implicit Fairing of Irregular Meshes Using Diffusion and Curvature Flow. *Proceedings of the 26th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques—SIGGRAPH'99*, Los Angeles, CA, 8-13 August 1999, 317-324. <https://doi.org/10.1145/311535.311576>
- [13] Meyer, M., Desbrun, M., Schröder, P. and Barr, A.H. (2003) Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-manifolds. In: *Mathematics and Visualization*, Springer Berlin Heidelberg, 35-57. https://doi.org/10.1007/978-3-662-05105-4_2
- [14] Zhang, Y. and Ben Hamza, A. (2007) Vertex-based Diffusion for 3-D Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Image Processing*, **16**, 1036-1045. <https://doi.org/10.1109/tip.2007.891787>
- [15] Liu, Z., Wang, W., Zhong, S., Zeng, B., Liu, J. and Wang, W. (2020) Mesh Denoising via a Novel Mumford-Shah Framework. *Computer-Aided Design*, **126**, Article ID: 102858. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2020.102858>
- [16] Wang, W., Pan, W., Dai, C., Dazeley, R., Wei, L., Rolfe, B., et al. (2023) Segmentation-Driven Feature-Preserving Mesh Denoising. *The Visual Computer*, **40**, 6201-6217. <https://doi.org/10.1007/s00371-023-03161-w>
- [17] Xu, L., Lu, C., Xu, Y. and Jia, J. (2011) Image Smoothing via L_0 Gradient Minimization. *Proceedings of the 2011 SIGGRAPH Asia Conference*, Hong Kong, 12-15 December 2011, 1-12. <https://doi.org/10.1145/2024156.2024208>
- [18] Cheng, X., Zeng, M. and Liu, X. (2014) Feature-Preserving Filtering with L_0 Gradient Minimization. *Computers & Graphics*, **38**, 150-157. <https://doi.org/10.1016/j.cag.2013.10.025>
- [19] Centin, M. and Signoroni, A. (2018) Mesh Denoising with (Geo)metric Fidelity. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **24**, 2380-2396. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2017.2731771>
- [20] 赵勇, 李玲, 单欣, 等. 三维几何模型的 L_0 去噪算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(5): 772-777.
- [21] Donoho, D.L., Elad, M. and Temlyakov, V.N. (2006) Stable Recovery of Sparse Overcomplete Representations in the Presence of Noise. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 6-18. <https://doi.org/10.1109/tit.2005.860430>
- [22] Wang, R., Yang, Z., Liu, L., Deng, J. and Chen, F. (2014) Decoupling Noise and Features via Weighted ℓ_1 -Analysis Compressed Sensing. *ACM Transactions on Graphics*, **33**, 1-12. <https://doi.org/10.1145/2557449>
- [23] Wu, X., Zheng, J., Cai, Y. and Fu, C. (2015) Mesh Denoising Using Extended ROF Model with L_1 Fidelity. *Computer Graphics Forum*, **34**, 35-45. <https://doi.org/10.1111/cgf.12743>
- [24] Zhong, S., Xie, Z., Liu, J. and Liu, Z. (2019) Robust Mesh Denoising via Triple Sparsity. *Sensors*, **19**, Article 1001. <https://doi.org/10.3390/s19051001>
- [25] Li, X., Zhu, L., Fu, C. and Heng, P. (2018) Non-Local Low-Rank Normal Filtering for Mesh Denoising. *Computer Graphics Forum*, **37**, 155-166. <https://doi.org/10.1111/cgf.13556>

- [26] Zhang, H., Wu, C., Zhang, J. and Deng, J. (2015) Variational Mesh Denoising Using Total Variation and Piecewise Constant Function Space. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **21**, 873-886. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2015.2398432>
- [27] Zhong, S., Xie, Z., Wang, W., Liu, Z. and Liu, L. (2018) Mesh Denoising via Total Variation and Weighted Laplacian Regularizations. *Computer Animation and Virtual Worlds*, **29**, e1827. <https://doi.org/10.1002/cav.1827>
- [28] Wei, M., Huang, J., Xie, X., Liu, L., Wang, J. and Qin, J. (2019) Mesh Denoising Guided by Patch Normal Co-Filtering via Kernel Low-Rank Recovery. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **25**, 2910-2926. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2018.2865363>
- [29] Liu, Z., Lai, R., Zhang, H. and Wu, C. (2019) Triangulated Surface Denoising Using High Order Regularization with Dynamic Weights. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **41**, B1-B26. <https://doi.org/10.1137/17m115743x>
- [30] Liu, Z., Zhong, S., Xie, Z. and Wang, W. (2019) A Novel Anisotropic Second Order Regularization for Mesh Denoising. *Computer Aided Geometric Design*, **71**, 190-201. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2019.04.013>
- [31] Bredies, K., Kunisch, K. and Pock, T. (2010) Total Generalized Variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **3**, 492-526. <https://doi.org/10.1137/090769521>
- [32] Ferstl, D., Reinbacher, C., Ranftl, R., Ruether, M. and Bischof, H. (2013) Image Guided Depth Upsampling Using Anisotropic Total Generalized Variation. 2013 *IEEE International Conference on Computer Vision*, Sydney, 1-8 December 2013, 993-1000. <https://doi.org/10.1109/iccv.2013.127>
- [33] Jung, M. and Kang, M. (2015) Simultaneous Cartoon and Texture Image Restoration with Higher-Order Regularization. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **8**, 721-756. <https://doi.org/10.1137/140967416>
- [34] Feng, W.S., Lei, H. and Gao, Y. (2014) Speckle Reduction via Higher Order Total Variation Approach. *IEEE Transactions on Image Processing*, **23**, 1831-1843. <https://doi.org/10.1109/tip.2014.2308432>
- [35] Knoll, F., Bredies, K., Pock, T. and Stollberger, R. (2010) Second Order Total Generalized Variation (TGV) for MRI. *Magnetic Resonance in Medicine*, **65**, 480-491. <https://doi.org/10.1002/mrm.22595>
- [36] Niu, S., Gao, Y., Bian, Z., Huang, J., Chen, W., Yu, G., et al. (2014) Sparse-View X-Ray CT Reconstruction via Total Generalized Variation Regularization. *Physics in Medicine and Biology*, **59**, 2997-3017. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/59/12/2997>
- [37] Liu, Z., Li, Y., Wang, W., Liu, L. and Chen, R. (2022) Mesh Total Generalized Variation for Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **28**, 4418-4433. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2021.3088118>
- [38] Zhang, H., He, Z. and Wang, X. (2022) A Novel Mesh Denoising Method Based on Relaxed Second-Order Total Generalized Variation. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **15**, 1-22. <https://doi.org/10.1137/21m1397945>
- [39] Wang, J., Han, Z., Jiang, W. and Kim, J. (2023) A Fast, Efficient, and Explicit Phase-Field Model for 3D Mesh Denoising. *Applied Mathematics and Computation*, **458**, Article ID: 128239. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2023.128239>
- [40] Wang, J., Li, Y., Choi, Y., Lee, C. and Kim, J. (2020) Fast and Accurate Smoothing Method Using a Modified Allen-Cahn Equation. *Computer-Aided Design*, **120**, Article ID: 102804. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2019.102804>
- [41] Pan, J., Bo, P., Li, Y. and Wang, Z. (2024) Mesh Denoising of Developable Surfaces with Curved Foldings. *Computer-Aided Design*, **177**, Article ID: 103776. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2024.103776>
- [42] Tomasi, C. and Manduchi, R. (1998) Bilateral Filtering for Gray and Color Images. *Sixth International Conference on Computer Vision (IEEE Cat. No.98CH36271)*, Bombay, 7 January 1998, 839-846. <https://doi.org/10.1109/iccv.1998.710815>
- [43] Jones, T.R., Durand, F. and Desbrun, M. (2003) Non-Iterative, Feature-Preserving Mesh Smoothing. *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*, San Diego, 27-31 July 2003, 943-949. <https://doi.org/10.1145/1201775.882367>
- [44] Vialaneix, G. and Boubekeur, T. (2011) SBL Mesh Filter: Fast Separable Approximation of Bilateral Mesh Filtering. *ACM SIGGRAPH 2011 Talks*, Vancouver, 7-11 August 2011, 1. <https://doi.org/10.1145/2037826.2037858>
- [45] Choudhury, P. and Tumblin, J. (2005) The Trilateral Filter for High Contrast Images and Meshes. *ACM SIGGRAPH 2005 Courses on—SIGGRAPH'05*, Los Angeles, 31 July-4 August 2005, 5. <https://doi.org/10.1145/1198555.1198565>
- [46] Wang, Y., Yang, Y. and Liu, Q. (2020) Feature-Aware Trilateral Filter with Energy Minimization for 3D Mesh Denoising. *IEEE Access*, **8**, 52232-52244. <https://doi.org/10.1109/access.2020.2981161>
- [47] Yagou, H., Ohtake, Y. and Belyaev, A. (2002) Mesh Smoothing via Mean and Median Filtering Applied to Face Normals. *Proceedings of Geometric Modeling and Processing*, Wako, 10-12 July 2002, 124-131.
- [48] Sun, X., Rosin, P.L., Martin, R. and Langbein, F. (2007) Fast and Effective Feature-Preserving Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **13**, 925-938. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2007.1065>
- [49] Wei, M., Yu, J., Pang, W., Wang, J., Qin, J., Liu, L., et al. (2015) Bi-Normal Filtering for Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **21**, 43-55. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2014.2326872>
- [50] Hurtado, J., Gattass, M., Raposo, A. and Lopez, C. (2024) Sharp Feature-Preserving Mesh Denoising. *Multimedia Tools and*

- Applications*, **83**, 69555-69580. <https://doi.org/10.1007/s11042-024-18390-x>
- [51] Wang, P., Fu, X., Liu, Y., Tong, X., Liu, S. and Guo, B. (2015) Rolling Guidance Normal Filter for Geometric Processing. *ACM Transactions on Graphics*, **34**, 1-9. <https://doi.org/10.1145/2816795.2818068>
- [52] Zhang, J., Deng, B., Hong, Y., Peng, Y., Qin, W. and Liu, L. (2019) Static/Dynamic Filtering for Mesh Geometry. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **25**, 1774-1787. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2018.2816926>
- [53] Zhao, W., Liu, X., Wang, S. and Zhao, D. (2018) Multi-Scale Similarity Enhanced Guided Normal Filtering. In: Zeng, B., Huang, Q., El Saddik, A., Li, H., Jiang, S. and Fan, X., Eds., *Advances in Multimedia Information Processing—PCM 2017*, Springer, 645-653. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77383-4_63
- [54] Liu, S., Rho, S., Wang, R. and Jiang, F. (2018) Feature-Preserving Mesh Denoising Based on Guided Normal Filtering. *Multimedia Tools and Applications*, **77**, 23009-23021. <https://doi.org/10.1007/s11042-018-5735-9>
- [55] Zhao, W., Liu, X., Wang, S., Fan, X. and Zhao, D. (2021) Graph-Based Feature-Preserving Mesh Normal Filtering. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **27**, 1937-1952. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2019.2944357>
- [56] Zhong, S., Song, Z., Liu, Z., Xie, Z., Chen, J., Liu, L., et al. (2021) Shape-Aware Mesh Normal Filtering. *Computer-Aided Design*, **140**, Article ID: 103088. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2021.103088>
- [57] Guo, M., Song, Z., Han, C., Zhong, S., Lv, R. and Liu, Z. (2021) Mesh Denoising via Adaptive Consistent Neighborhood. *Sensors*, **21**, Article 412. <https://doi.org/10.3390/s21020412>
- [58] Li, T., Liu, W., Liu, H., Wang, J. and Liu, L. (2019) Feature-Convinced Mesh Denoising. *Graphical Models*, **101**, 17-26. <https://doi.org/10.1016/j.gmod.2018.12.002>
- [59] Han, H. and Han, J. (2022) Modified Bilateral Filter for Feature Enhancement in Mesh Denoising. *IEEE Access*, **10**, 56845-56862. <https://doi.org/10.1109/access.2022.3176961>
- [60] Yadav, S.K., Reitebuch, U. and Polthier, K. (2019) Robust and High Fidelity Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **25**, 2304-2310. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2018.2828818>
- [61] Wang, P., Liu, Y. and Tong, X. (2016) Mesh Denoising via Cascaded Normal Regression. *ACM Transactions on Graphics*, **35**, 1-12. <https://doi.org/10.1145/2980179.2980232>
- [62] Wang, J., Huang, J., Wang, F.L., Wei, M., Xie, H. and Qin, J. (2019) Data-Driven Geometry-Recovering Mesh Denoising. *Computer-Aided Design*, **114**, 133-142. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2019.05.027>
- [63] Zhao, W.B., Liu, X.M., Zhao, Y.S., et al. (2019) NormalNet: Learning Based Guided Normal Filtering for Mesh Denoising. arXiv: 1903.04015. <https://arxiv.org/abs/1903.04015>
- [64] Armando, M., Franco, J. and Boyer, E. (2022) Mesh Denoising with Facet Graph Convolutions. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **28**, 2999-3012. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2020.3045490>
- [65] Shen, Y., Fu, H., Du, Z., Chen, X., Burnaev, E., Zorin, D., et al. (2022) GCN-Denoiser: Mesh Denoising with Graph Convolutional Networks. *ACM Transactions on Graphics*, **41**, 1-14. <https://doi.org/10.1145/3480168>
- [66] Xing, Y., Tan, J., Hong, P., He, Y. and Hu, M. (2022) Mesh Denoising Based on Recurrent Neural Networks. *Symmetry*, **14**, Article 1233. <https://doi.org/10.3390/sym14061233>
- [67] Zhao, W., Liu, X., Jiang, J., Zhao, D., Li, G. and Ji, X. (2022) Local Surface Descriptor for Geometry and Feature Preserved Mesh Denoising. *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, **36**, 3446-3453. <https://doi.org/10.1609/aaai.v36i3.20255>
- [68] Tang, W., Gong, Y. and Qiu, G. (2023) Feature Preserving 3D Mesh Denoising with a Dense Local Graph Neural Network. *Computer Vision and Image Understanding*, **233**, Article ID: 103710. <https://doi.org/10.1016/j.cviu.2023.103710>
- [69] Wang, X., Wei, H., Fan, X. and Zhao, D. (2024) Hyper-MD: Mesh Denoising with Customized Parameters Aware of Noise Intensity and Geometric Characteristics. 2024 *IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, Seattle, 16-22 June 2024, 4651-4660. <https://doi.org/10.1109/cvpr52733.2024.00445>
- [70] Lee, S., Heo, S. and Lee, S. (2025) DMESH: A Structure-Preserving Diffusion Model for 3-D Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **36**, 4385-4399. <https://doi.org/10.1109/tnnls.2024.3367327>
- [71] Wang, X., Zhang, X., Cui, W., Xiong, R., Fan, X. and Zhao, D. (2024) Mesh Denoising Using Filtering Coefficients Jointly Aware of Noise and Geometry. *Proceedings of the 32nd ACM International Conference on Multimedia*, Melbourne, 28 October-1 November 2024, 1791-1799. <https://doi.org/10.1145/3664647.3681143>
- [72] Zhao, W.B., Liu, X.M., Zhai, D.M., et al. (2024) Mesh Denoising Transformer. arXiv: 2405.06536. <https://arxiv.org/abs/2405.06536>
- [73] Zhou, Z., Yuan, M., Zhao, M., Guo, J. and Yan, D. (2025) Resgem: Multi-Scale Graph Embedding Network for Residual Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **31**, 2028-2044. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2024.3378309>