**Computer Science and Application** 计算机科学与应用, 2026, 16(4), 453-463
Published Online April 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/csa
https://doi.org/10.12677/csa.2026.164144

Hans汉斯

# 基于变参的零化神经网络算法求解复值动态线性矩阵方程

**徐隆毅，雷亿辉***

吉首大学数学与统计学院，湖南 吉首

收稿日期：2026年3月24日；录用日期：2026年4月22日；发布日期：2026年4月30日

## 摘 要

动态复值线性矩阵方程的求解是数学和控制理论中频繁出现的问题，零化神经网络算法作为求解线性矩阵方程的有效方法受到众多学者关注，从而衍生出许多零化神经网络算法的变形。但已有的大多数文献中所设计的模型采用的为固定参数，本文构建了时变参数的零化神经网络算法，通过构建精巧的时变参数和激活函数的设计，在没有效率损失的情况下，较大地提升了算法的收敛速度，并增强了抗噪性，论文最后通过数值实验验证了理论分析。

## 关键词

零化神经网络，参数时变，动态复值线性矩阵方程，预定义时间收敛

# Solving Complex-Valued Time-Varying Linear Matrix Equations Based on the Annihilating Neural Network Algorithm with Variable Parameters

**Longyi Xu, Yihui Lei***

School of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: March 24, 2026; accepted: April 22, 2026; published: April 30, 2026

## Abstract

**Solving time-varying complex-valued linear matrix equations is a frequently encountered problem**

*通讯作者。

文章引用: 徐隆毅, 雷亿辉. 基于变参的零化神经网络算法求解复值动态线性矩阵方程[J]. 计算机科学与应用, 2026, 16(4): 453-463. DOI: 10.12677/csa.2026.164144

**in mathematics and control theory. The annihilating neural network algorithm, as an effective method for solving linear matrix equations, has attracted the attention of many scholars, leading to the emergence of many variants of this algorithm. However, most of the existing models designed in the literature use fixed parameters. In this paper, an annihilating neural network algorithm with time-varying parameters is constructed. Through the delicate design of time-varying parameters and activation functions, the convergence speed of the algorithm is significantly improved without sacrificing efficiency, and the noise resistance is enhanced. Finally, numerical experiments are conducted to verify the theoretical analysis.**

## Keywords

**Annihilating Neural Network, Time-Varying Parameters, Time-Varying Complex-Valued Linear Matrix Equations, Predefined Time Convergence**

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

## 1. 引言

线性矩阵方程的求解问题，是线性代数和数值计算的核心问题之一。这类问题广泛应用于科学与工程建模、数值计算与优化及信号与图像处理等场景。线性矩阵方程的求解不仅是理论研究的工具，更是连接抽象数学与实际应用的纽带，因此对线性矩阵方程的求解具有重要的现实意义。

尽管传统数值迭代算法在求解静态及实数域线性矩阵方程时表现出良好性能，然而当应用于动态或复值矩阵方程求解时，该算法存在着本质上的局限性。这类算法通常基于静态矩阵假设，既难以应对时变系统中矩阵参数的动态变化，又无法直接处理复值矩阵，同时其收敛性能也严重依赖矩阵维数，在时变场景下可能因矩阵参数的连续变化导致收敛速度下降甚至发散。因此传统数值迭代算法在解决动态复值矩阵方程的求解问题时并非最优选择。

近年来，随着高效并行计算架构与分布式存储技术的突破性发展，循环神经网络(RNN)方法凭借其动态优化与实时计算能力，在复值线性矩阵方程和动态线性矩阵方程的求解中展现出显著优势。针对实值线性矩阵方程，陈丽等人提出了一种基于梯度动力学的连续时间 RNN 框架，其核心目标是通过设计网络动态使误差矩阵渐近收敛至零，从而逼近方程的理论解[1]。在静态场景下，此类 RNN 通过模拟梯度下降的连续动态，能够保证误差矩阵在无限时间范围内指数收敛至零，且收敛速度可通过步长参数调节。然而，在动态场景中，时变参数的非平稳性导致误差动态方程中包含额外的时变扰动项，即使网络动态持续沿负梯度方向更新，残差误差也无法在无限时间内收敛至零，这表明传统梯度下降时 RNN 存在着不足。同时，这一现象也表明经典梯度 RNN 的动态特性难以满足动态矩阵方程的精确跟踪需求。因此，张雨浓等人提出了归零神经网络(ZNN)来实时解决时变问题[2]。归零神经网络的设计核心在于构造误差动态方程的时间导数项，其通过引入一阶导数的显式表达，确保误差函数在无限时间范围内以指数速率收敛至零。这一特性使得 ZNN 在时变问题如时变矩阵方程中表现出显著优势，因其能够在线跟踪时变参数的动态变化。然而，ZNN 的指数收敛特性在有限时间场景中存在缺陷，尽管误差函数在无限时间内呈指数趋于零，但在有限时间内，其收敛精度受初始误差和参数的制约，无法实现严格意义上的有限时间收敛。为突破这一瓶颈，研究者聚焦于激活函数的设计优化，刘万太等人通过引入非线性激活函数[3]，而张智明等人引入分段激活函数[4]，将 ZNN 的收敛模式从渐进指数收敛提升至有限时间收敛。此类改进策

略已被证明能够显著缩短收敛时间，并在机器人轨迹跟踪、实时信号处理等对时效性要求严苛的场景中验证了其有效性。

神经网络的设计参数对神经网络的收敛性有重要影响，大多数研究人员使用具有固定参数的神经网络来解决问题。例如，Zuo 等人针对动态广义 Lyapunov 方程的实时求解问题，提出了固定参数鲁棒有限时间归零神经网络模型，使用了改进的符号双幂激活函数来加速收敛[5]。为了提升模型的性能，在实际应用中往往需要频繁地调整参数以求得近似的最优解，这是低效的。将时变参数融入 ZNN 模型有助于加快模型的收敛速度，同时提升模型的鲁棒性，模型能够展现出优异的性能。鉴于此，诸多变参数神经网络模型相继被研究并提出。基于原有变参数零化神经网络模型，张构建并探究了一种改进型变参数零化神经网络(IVPZNN)，针对复值时变矩阵求逆问题展开研究[6]。值得注意的是，所提出的 IVPZNN 模型中时变参数取值能够随时间快速递增，这一特性更贴合 ZNN 硬件实现的需求。此外，贺基于传统 ZNN 模型构建并提出了多种新型容噪变参数递归神经网络，同时从理论层面分析了所提模型的稳定性、收敛性及鲁棒性[7]，尽管给出了预定义时间收敛上界的具体数值，但模型的收敛时间在一定程度上仍然受初始状态的影响。谭针对系统与控制领域普遍存在的静态 Stein 方程及动态矩阵 Moore-Penrose 逆的实时求解问题，开展了基于递归神经网络的求解模型设计、理论分析及工程应用研究[8]。在噪声扰动下，梯度神经网络求解静态 Stein 方程时，虽稳态求解误差可调节至较小，但无法达到零误差。华提出了一类利用时变系数时间导数信息的复值 RNN 综合设计公式，为后续开发用于各种复数时变科学计算问题求解的复值容噪 RNN 模型奠定了基础[9]。虽然模型具有较好的稳定性和鲁棒性，但收敛速度可能无法满足某些对实时性要求极高的场景。

传统神经网络模型主要基于实数域构建，其设计框架与优化方法多针对实数值数据场景，而专门面向复值问题如复矩阵方程、频域信号分析等的神经网络研究仍处于初级阶段。与实值神经网络模型相比，复值神经网络的兼容性更强，并且在实时计算中具有更强的处理能力。此外，神经具有复值的网络模型可以大大扩展实数神经网络的范围，在某些领域具有竞争优势，例如模式识别、图像处理、信号处理。从数学视角看，实数可视为复数域的特定子集，这一特性使得复值神经网络在模型兼容性上显著优于实值网络。对于复值线性矩阵，本文采用模和幅角展开的方式进行处理，从而无需通过拆分实部与虚部的方式处理复数数据，避免了由此引发的信息耦合损失。同时构建了时变参数的零化神经网络模型进行全局收敛性、有限时间收敛和鲁棒性理论分析，并推导出与初值无关的有限时间收敛上界。接着，在数值实验中计算复值时变矩阵的求解问题。最后，与其他神经网络模型比较，证明了时变参数的零化神经网络模型的优越性。

## 2. 零化神经网络模型构建

在许多科学和工程问题的计算中涉及到的关键步骤往往需要求解动态复值矩阵方程[10]。而很多动态复值矩阵方程的求解很难获得准确的解析解。因此利用相关算法获得仿真解，就变得十分重要。本节展示了求解时变复值矩阵方程的零化神经网络模型的构建步骤。针对时变系数复值线性矩阵方程的形式：

$$A(t)X(t)B(t)=I \tag{1}$$

其中，复值矩阵 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$t$ 表示时间，$I$ 是单位矩阵。为求解时变复值线性矩阵方程的未知矩阵 $X(t)$，我们按照以下步骤构建零化神经网络模型。

**步骤 1** 与经典零化神经一样，首先构建误差函数：

$$E(t)=A(t)X(t)B(t)-I \tag{2}$$

**步骤 2** 为确保误差函数 $E(t)$ 的每个元素都收敛至零，构建一个设计公式，传统的设计公式为

$\dot{E}(t)=-\alpha\psi(E(t))$，其中，$\alpha$ 是正值固定参数。为了提高模型的性能，实际应用时通常需要经常调整参数以找到近似的最优值，从而降低了在实际应用中的效率。由于已有研究表明，时变参数比固定参数可以更好地提升零化神经网络的收敛性，基于此，本文的设计公式为：

$$\dot{E}(t)=-\left(t^{\theta}+\theta\right)\psi(E(t)) \tag{3}$$

变参归零神经网络的提出在时变参数的设计上取得了突破，但是，初始值仍然会影响 VPZNN 模型的求解任务。此外，当我们提高 VPZNN 的收敛速率时，效率将受到牺牲。预定义时间收敛归零神经网络[11]通过在有限范围内控制初始值的影响来实现预定义的时间收敛。这激发了我们探索一种新的时变参数模型，该模型不受初始值的干扰，并加快收敛速度而不会显着的效率损失。新进化设计为：

$$\dot{E}(t)=-\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\psi(E(t)) \tag{4}$$

其中 $\alpha$、$\eta_1$、$\eta_2>0$，时变参数的指数部分包含衰减因子 $\eta_1\operatorname{arccot}(t)$ 和噪声抑制因子 $\eta_2 t$，衰减因子设计基于反余切函数的性质，可以保证模型快速收敛并具备短期噪声抑制能力，噪声抑制因子保证了模型具有长期噪声抑制能力[12]。

**步骤 3** 将设计公式(4)代入公式(3)模型的隐式动力学方程，如下所示：

$$A(t)\dot{X}(t)B(t)=-\dot{A}(t)X(t)B(t)-A(t)X(t)\dot{B}(t)-\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\psi(E(t)) \tag{5}$$

其中 $\psi(\cdot)$ 为实值激励函数，其定义为：

$$\psi(P+iQ)=\varsigma(\gamma)\circ\exp(i\Upsilon) \tag{6}$$

其中 $P$ 为复数实部，$Q$ 为复数虚部，$i$ 是虚数单位，$\gamma$ 和 $\Upsilon\in[-\pi,\pi)^{n\times n}$ 分别表示复数 $P+iQ$ 的模和辐角，运算符“$\circ$”表示向量对应位置相乘，$\varsigma(\cdot)$ 表示非线性激活函数，在初始的 ZNN 中，$\varsigma(\cdot)$ 是一个线性激活函数，即 $\varsigma_1(x)=x$，为了提高收敛率，李等人[13]提出了一种嵌入了精心设计的非线性激活函数，实现了有限的时间收敛，所设计的非线性激活函数表示为：

$$\varsigma_1(x)=sign(x)\frac{|x|^{\mu}+|x|^{\frac{1}{\mu}}}{2} \tag{7}$$

其中，$0<\mu<1$，$sign(x)$ 为符号函数。在收敛性方面，激活函数 $\varsigma_1(x)$ 的嵌入使得 ZNN 的收敛性取得了显著的改进。但是其抗噪性能弱，且初始值也极大地影响 ZNN 中的收敛效应。为了减少初始值的影响，黎等人提出了一个修正的非线性激活函数

$$\varsigma_2(x)sign\left(l_1|x|^{\mu}+l_2|x|^{v}+l^3\right)+l_4 x \tag{8}$$

其中，参数 $\mu$ 与式(7)中的相同，并且 $v>1$、$l_1$、$l_2>0$、$l_3$、$l_4\geq 0$，达到了消除系统初值对收敛性的影响，但是抗噪性提升不显著。因此，受到李、黎、刘[13] [14]等人文献的启发，本文设计了分段的非线性激活函数为

$$\varsigma_3(x)=\begin{cases} l_1|x|^{\mu}sign(x)+l_5 x, \text{if } |x|\leq 1 \\ l_2|x|^{v}sign(x)+l_5 x, \text{if } |x|>1 \end{cases} \tag{9}$$

其中 $l_1$，$l_2$，$l_5$ 均为大于零的常数。在零化神经网络中嵌入分段激活函数(9)和时变参数 $\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)$，同时提升模型的鲁棒性和收敛速度。

## 3. 性能分析

在本节中，我们主要介绍了嵌入非线性激励函数的时变参数零化神经网络模型(VPZNN)的全局稳定

性、预定义的时间收敛性及鲁棒性。

**(一) 全局稳定性**

**定理 2.1**：给定两个满秩的复值时变矩阵 $A(t),B(t)$，由模型(5)生成的仿真解 $X(t)$，从随机初始状态 $X(0)$ 出发并收敛到理论解，也就是误差矩阵 $E(t)$ 全局收敛到 0。

证明：将(4)式矩阵形式写成元素形式有，

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(t)=-\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\psi\left(\varepsilon_{ij}(t)\right) \tag{10}$$

其中 $\varepsilon_{ij}(t)$ 是复矩阵 $E(t)$ 的第 $i$ 行，第 $j$ 列个元素；注意 $\varepsilon_{ij}(t)$ 是一个复标量，我们构造一个 Lyapunov 函数：

$$v_{ij}(t)=\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^2=\varepsilon_{ij}(t)\overline{\varepsilon_{ij}(t)} \tag{11}$$

其中 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|$ 表示 $\varepsilon_{ij}(t)$ 的模，$v_{ij}(t)$ 的导数可求得为：

$$\begin{aligned}\dot{v}_{ij}(t)&=\dot{\varepsilon}_{ij}(t)\overline{\varepsilon_{ij}(t)}+\varepsilon_{ij}(t)\overline{\varepsilon_{ij}(t)}\\&=-\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\psi\left(\varepsilon_{ij}(t)\overline{\varepsilon_{ij}(t)}+\varepsilon_{ij}(t)\overline{\psi\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

依据 $\psi(\cdot)$ 的定义，可知

$$\psi\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)=\varsigma_3\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\exp\left(\sqrt{-1}\cdot\arg\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\right) \tag{14}$$

其中 $\sqrt{-1}$ 表示虚数单位，因此由

$$\begin{aligned}\dot{v}_{ij}(t)&=-\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\Big(\varsigma_3\left(\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\right)\exp\left(\sqrt{-1}\cdot\arg\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\right)\overline{\varepsilon_{ij}(t)}\\&\quad+\varepsilon_{ij}(t)\varsigma_3\left(\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\right)\exp\left(-\sqrt{-1}\cdot\arg\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\right)\Big)\\&=-\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\Big(\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\exp\left(-1\sqrt{-1}\cdot\arg\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\right)\varsigma_3\left(\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\right)\exp\left(\sqrt{-1}\cdot\arg\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\right)\\&\quad+\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\exp\left(\sqrt{-1}\cdot\arg\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\right)\varsigma_3\left(\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\right)\exp\left(-1\sqrt{-1}\cdot\arg\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\right)\Big)\\&=-2\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\varsigma_3\left(\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\right)\end{aligned}$$

有

$$\dot{v}_{ij}(t)=-2\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\varsigma_3\left(\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\right) \tag{15}$$

由于 $\varsigma_3(x)$ 是分段激活函数，对 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|>1$ 和 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\le 1$ 这两种情形分别展开探讨。首先，对于 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|>1$ 的情况，上式(15)可表示为：

$$\begin{aligned}\dot{v}_{ij}&\le-2\exp\left(\eta_2 t\right)\varepsilon_{ij}(t)\left(l_2\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{v}sign\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)+l_5\varepsilon_{ij}(t)\right)\\&=-2\exp\left(\eta_2 t\right)\left(l_2\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{v+1}+l_5\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^2\right)\end{aligned} \tag{16}$$

由式(16)可知 $\dot{v}_{ij}(t)$ 是负定的，这表明 $\varepsilon_{ij}(t)$ 会减小到 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\le 1$ 的状态。对于 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\le 1$ 的情况，方程(15)可表示为：

$$\begin{aligned}\dot{v}_{ij}(t)&\le-2\exp\left(\eta_2 t\right)\varepsilon_{ij}(t)\left(l_1\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{\mu}sign\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)+l_5\varepsilon_{ij}(t)\right)\\&=-2\exp\left(\eta_2 t\right)\left(l_2\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{\mu+1}+l_5\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^2\right)\le 0\end{aligned} \tag{17}$$

此时，$\dot{v}_{ij}(t)$ 仍为负定的，基于 Lyapunov 稳定性理论，可得出 $\varepsilon_{ij}(t)$ 将全局收敛至零的结论。从而，误差矩阵 $E(t)$ 全局收敛至零得证。

**(二) 预定义时间收敛性**

**定理 2.2**：给定满秩的复值时变矩阵 $A(t)$，$B(t)$，由模型(5)生成的仿真解 $X(t)$，从任意随机初始状态 $X(0)$ 出发，能在指定时间 $t_{top}$ 内收敛到理论解。

$$t_{top} \le \frac{1}{\eta_2}\ln\left(1+\frac{\eta_2}{\alpha l_2(v-1)}+\frac{\eta_2}{\alpha l_1(1-\mu)}\right)$$

对于 $\dot{\varepsilon}_{ij}(t)=-\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\psi\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)$，我们同样定义一个 Lyapunov 函数 $v_{ij}(t)=\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|$。那么 $v_{ij}(t)$ 的导数可求得为：

$$\begin{aligned}\dot{v}_{ij}(t)&=\dot{\varepsilon}_{ij}(t)sign\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\\&=-\alpha\exp\left(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t\right)\varsigma_3\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)sign\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\\&\le-\alpha\exp\left(\eta_2 t\right)\varsigma_3\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)sign\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\end{aligned}\tag{18}$$

同样，根据 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|>1$ 和 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\le 1$，整个过程可分为两个步骤。首先，对于 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|>1$ 的情况，上式(18)可表示为：

$$\begin{aligned}\dot{v}_{ij}(t)&\le-\alpha\exp\left(\eta_2 t\right)\varsigma_3\left(\varepsilon_{ij}(t)\right)\\&=-\alpha\exp\left(\eta_2 t\right)\left(l_2\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{v}+l_5\varepsilon_{ij}(t)\right)\\&\le-\alpha\exp\left(\eta_2 t\right)\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{v}\end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned}\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{-v}\mathrm{d}v_{ij}(t)&\le-\alpha l_2\exp\left(\eta_2 t\right)\mathrm{d}t\\v_{ij}(t)^{-v}\mathrm{d}v_{ij}(t)&\le-\alpha l_2\exp\left(\eta_2 t\right)\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{19}$$

对上式两边同时积分，我们得到：

$$\begin{aligned}\int_{v_{ij}(0)}^{v_{ij}(t_1)}v_{ij}(t)^{-v}\mathrm{d}v_{ij}(t)&\le\int_0^{t_1}-\alpha l_2\exp\left(\eta_2 t\right)\mathrm{d}t\\\frac{1}{1-v}\left(v_{ij}(t)^{1-v}\right)\Big|_{v_{ij}(0)}^{1}&\le-\frac{\alpha l_2}{\eta_2}\exp\left(\eta_2 t\right)\Big|_0^{t_1}\\\frac{1}{1-v}\left(1-v_{ij}(0)^{1-v}\right)&\le-\frac{\alpha l_2}{\eta_2}\left(\exp\left(\eta_2 t_1\right)-1\right)\end{aligned}\tag{20}$$

然后我们得到

$$t_1\le\frac{1}{\eta_2}\ln\left(1+\frac{\eta_2\left(1-v_{ij}(0)^{1-v}\right)}{\alpha l_2(v-1)}\right)\le\frac{1}{\eta_2}\ln\left(1+\frac{\eta_2}{\alpha l_2(v-1)}\right)\tag{21}$$

即当 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|>1$ 时，经过时间 $t_1$ 状态 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|>1$ 变为 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|=1$。

对于 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\le 1$ 的情况，式(18)可表示为：

$$\dot{v}_{ij}(t)\le-\alpha\exp\left(\eta_2 t\right)\left(l_1\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{\mu}+l_5\varepsilon_{ij}(t)\right)\le-\alpha l_1\exp\left(\eta_2 t\right)\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^{\mu}$$

由上式可得

$$v_{ij}(t)^{-\mu}\,\mathrm{d}v_{ij}(t)\le -\alpha l_1\exp(\eta_2 t)\mathrm{d}t \tag{22}$$

对上式两边同时积分，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_{v_{ij}(t_1)}^{v_{ij}(t_1+t_2)} v_{ij}(t)^{-\mu}\,\mathrm{d}v_{ij}(t)\le\int_{t_1}^{t_1+t_2}-\alpha l_1\exp(\eta_2 t)\mathrm{d}t\\&\frac{1}{1-\mu}v_{ij}(t)^{1-\mu}\Big|_1^0\le-\frac{\alpha l_1}{\eta_2}\exp(\eta_2 t_1)\Big|_{t_1}^{t_1+t_2}\\&\exp(\eta_2(t_1+t_2))\le\exp(\eta_2 t_1)+\frac{\eta_2}{-\alpha l_1(1-\mu)}\end{aligned} \tag{23}$$

结合式(20)和式(21)，变量 $\varepsilon_{ij}(t)$ 的预设收敛时间 $t_{top}$ 可表示为：

$$t_{top}=t_1+t_2\le\frac{1}{\eta_2}\ln\left(1+\frac{\eta_2\left(1-v_{ij}(0)^{1-v}\right)}{\alpha l_2(v-1)}+\frac{\eta_2}{\alpha l_1(1-\mu)}\right)\le\frac{1}{\eta_2}\ln\left(1+\frac{\eta_2}{\alpha l_2(v-1)}+\frac{\eta_2}{\alpha l_1(1-\mu)}\right)$$

**(三) 鲁棒性**

**定理 2.3**：给定两个满秩的复值时变矩阵 $A(t)$，$B(t)$，由含未知有界噪声 $\Delta(t)$ 的 VPZNN 生成的状态矩阵 $X(t)$，从随机初始状态 $X(0)$ 出发，始终会收敛到理论解，即误差矩阵 $E(t)$ 全局收敛到 0。

考虑存在未知有界噪声 $\Delta(t)$ 的 VPZNN 模型，其误差矩阵的动态方程为：

$$\dot{E}(t)=-\alpha\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)\psi(E(t))+\Delta(t) \tag{24}$$

对每个元素 $\varepsilon_{ij}(t)$，其动态方程为：

$$\dot{\varepsilon}_{ij}(t)=-\alpha\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)\psi(\varepsilon_{ij}(t))+\Delta(t) \tag{25}$$

选择复数误差项的模长作为 Lyapunov 函数：

$$v_{ij}(t)=\frac{1}{2}\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|^2=\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^2(t) \tag{26}$$

其导数为

$$\begin{aligned}\dot{v}_{ij}(t)&=\varepsilon_{ij}(t)\dot{\varepsilon}_{ij}(t)\\&=\varepsilon_{ij}(t)\left(-\alpha\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)\psi(\varepsilon_{ij}(t))+\Delta(t)\right)\end{aligned} \tag{27}$$

若 $\dot{v}_{ij}(t)<0$，则 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|$ 会逐渐递减至零。若 $\dot{v}_{ij}(t)>0$，则 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|$ 会逐渐递增，且 $\varepsilon_{ij}(t)\Delta(t)>0$。在这种情况下 $\dot{v}_{ij}(t)>0$，即

$$\varepsilon_{ij}(t)\left(-\alpha\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)\psi(\varepsilon_{ij}(t))+\Delta(t)\right)>0$$

在此基础上，我们可知

$$\left|\Delta(t)\right|>\left|\alpha\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)\psi(\varepsilon_{ij}(t))\right|$$

易知，$\left|-\alpha\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)\psi(\varepsilon_{ij}(t))+\Delta(t)\right|$ 随 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|$ 的增大而减小。且 $\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|$ 将持续增大，直至 $-\alpha\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)\psi(\varepsilon_{ij}(t))+\Delta(t)=0$ 时才停止增大。

因此，当 $t\to\infty$ 时，

$$0\le\left|\varepsilon_{ij}(t)\right|\le\left|\psi^{-1}\left(\frac{\Delta(t)}{\alpha\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)}\right)\right|,$$

其中 $\psi^{-1}(\cdot)$ 为 $\psi(\cdot)$ 的反函数，同时，对于激活函数(9)，由 $|\psi(x)|\ge|l_5x|$ 可得 $|\psi^{-1}(x)|\ge|x/l_5|$ 成立。因此，$|\varepsilon_{ij}(t)|$ 的解可表示为：

$$0\le|\varepsilon_{ij}(t)|\le\left|\frac{\Delta(t)}{\alpha l_5\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)}\right|, \tag{28}$$

对于加性噪声，我们仅考虑以下两种情形：未知有界噪声，以及增长速率慢于指数增长的时变噪声。

情形一：未知有界噪声，存在常数 $\eta$，使得 $|\Delta(t)|\le\eta$。此时，不等式(28)可表示为：

$$|\varepsilon_{ij}(t)|\le\left|\frac{\eta}{\alpha l_5\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)}\right|$$

当时间趋于无穷时，有

$$\lim_{t\to\infty}|\varepsilon_{ij}(t)|\le\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\eta}{\alpha l_5\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)}\right|\le 0$$

因此，

$$\lim_{t\to\infty}\|E(t)\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lim_{t\to\infty}|\varepsilon_{ij}(t)|^2}=0$$

情形二：存在 $\eta$ 阶导数的无界光滑时变噪声，且其 $\eta$ 阶导数 $\Delta^{(\eta)}(t)\in(0,u_0]$，其中 $\eta$ 为非零自然数，$u_0$ 为非零常数。此时，当时间趋于无穷时，有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}|\varepsilon_{ij}(t)|&\le\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\Delta(t)}{\alpha l_5\exp(\eta_1\operatorname{arccot}(t)+\eta_2 t)}\right|\\&=\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\Delta(t)}{\alpha l_5\exp(\eta_2 t)}\right|\\&=\lim_{t\to\infty}\left|\frac{\Delta^{(\eta)}(t)}{\alpha l_5\exp(\eta_2 t)}\right|\\&\le\lim_{t\to\infty}\left|\frac{u_0}{\alpha l_5\exp(\eta_2 t)}\right|\\&=0\end{aligned}$$

因此，

$$\lim_{t\to\infty}\|E(t)\|_F=0$$

最后，我们可以得出结论：在存在噪声 $\Delta(t)$ 的情况下，受噪声扰动的模型(4)的误差在时间趋于无穷时能够收敛到零。

## 4. 数值实验比较

为进一步检验变参零化神经网络模型在收敛性和抗噪性方面理论分析的有效性，接下来会借助 MATLAB 编程，利用该模型对复值时变线性矩阵方程进行求解。通过绘制模型状态矩阵的动态变化轨迹图，能够直观地呈现模型在求解复值时变线性矩阵方程期间的实时变动情况以及收敛进程。

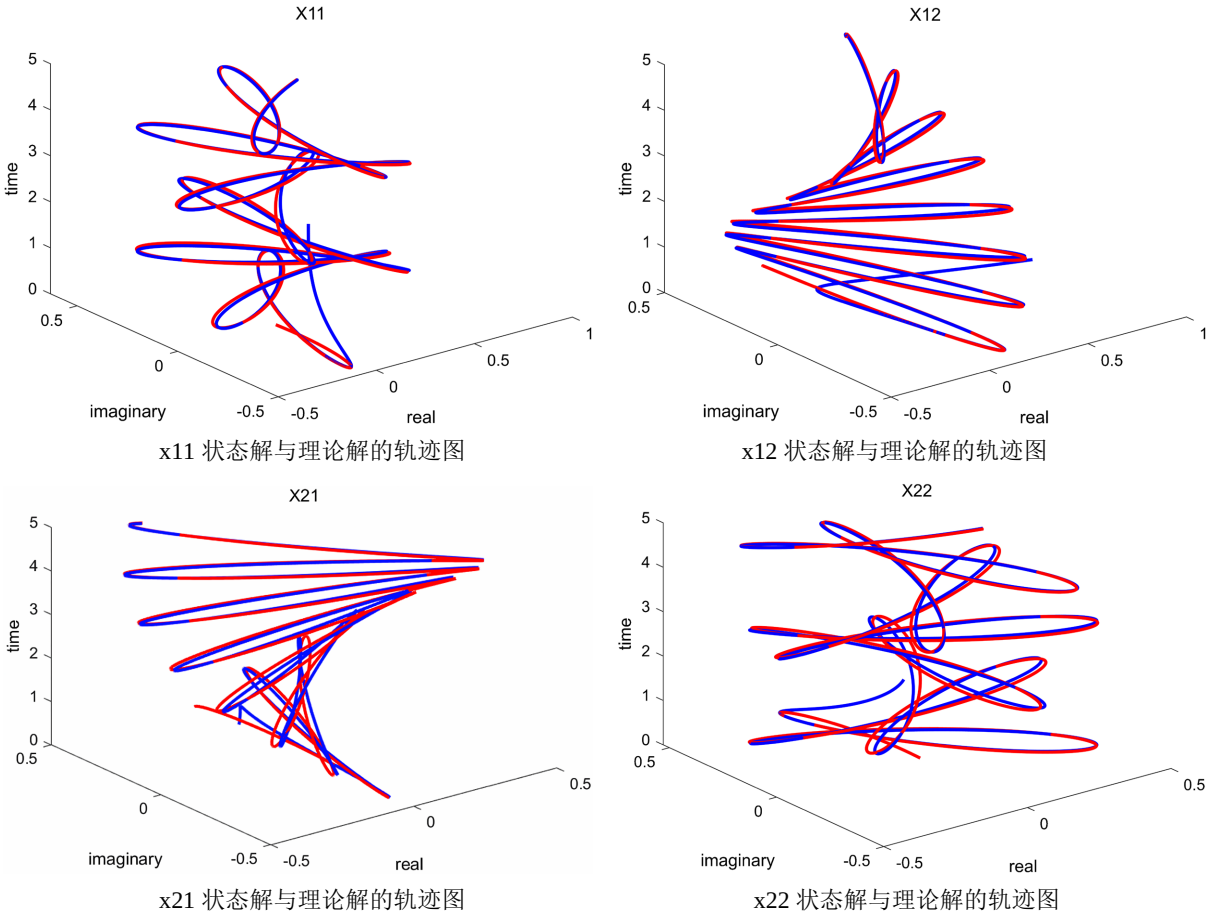
针对式(1)的二维时变系数复值线性矩阵方程

$$A(t)=\begin{bmatrix}\exp(1it) & -i\exp(-1it)\\ -i\exp(1it) & \exp(-1it)\end{bmatrix},B(t)=\begin{bmatrix}\exp(10it) & -i\exp(-9it)\\ -i\exp(9it) & \exp(-10it)\end{bmatrix}$$

此时，时变系数复值线性矩阵方程的理论解为：

$$X^*(t)=\begin{bmatrix}0.5\exp(10it) & 0.5i\exp(10it)\\ 0.5i\exp(-10it) & 0.5\exp(-10it)\end{bmatrix}$$

考虑到模型网络输出的状态解与理论解的动态跟踪轨迹存在明显差异，因此在每张图中均单独展示各网络的输出结果。具体而言，每个网络输出的状态解分别以蓝色虚线表示，而相应的理论解则用红色实线来表示。见图 1，模型生成的状态解在经历了一小段时间的变化后，其轨迹能够很好地追踪到理论解的轨迹。这表明，即便初始状态为随机设定，模型仍能高效地收敛至复值时变线性矩阵方程的理论解。




x11 状态解与理论解的轨迹图　　x12 状态解与理论解的轨迹图

x21 状态解与理论解的轨迹图　　x22 状态解与理论解的轨迹图

**Figure 1.** Trajectory plot of state solutions and theoretical solutions for the zeroing neural network model with time-varying parameters

**图 1.** 时变参数零化神经网络模型状态解与理论解的轨迹图

对常数噪声和时变噪声这两种噪声干扰情况进行了测试，绘制了由时变参数零化神经网络模型(VPZNN)和固定参数零化神经网络模型(FPZNN)这两个神经网络模型生成的残差的收敛行为，见图 2，$x$ 轴为时间，$y$ 轴表示范数矩阵 $\|A(t)X(t)B(t)-I\|$，可以看到在常数噪声的情况下，无论时间多长，FPZNN 都不能收敛到 0，而 VPZNN 却可在较短的时间内收敛到 0。在时变噪声的情况下，虽然都能收敛到 0，

但 VPZNN 的收敛速度要明显快于 FPZNN。

综上，时变参数零化神经网络模型表现出了良好收敛性和抗噪性。

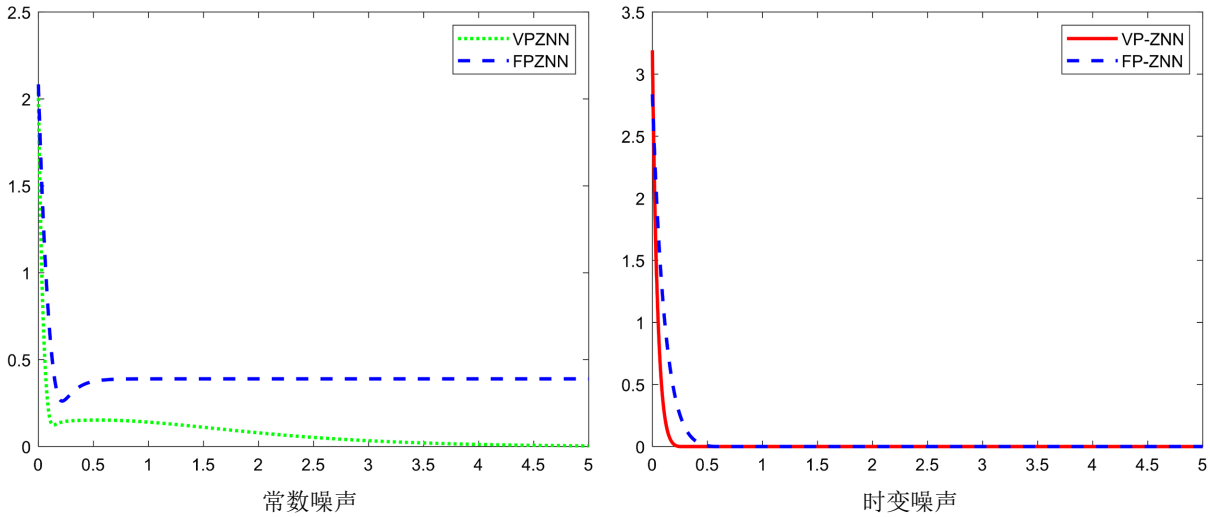



**Figure 2.** Comparison results of convergence for fixed- and time-varying parameter zeroing neural network models under different noise scenarios

**图 2.** 不同噪声下固定参数与时变参数零化神经网络模型收敛对比情况

## 5. 结论

针对时变复线性矩阵方程求解问题，本文提出一种新型的变参零化神经网络模型与改进激活策略的解决方案。对于复数形式的问题，采用模和幅角展开处理的方式，证明了收敛性、鲁棒性、及收敛时间上界，此外在数值实验中，该模型表现出了较良好的性质，有较快的收敛速度及鲁棒性。

## 基金项目

湖南自然科学基金(2023JJ30485)。

## 参考文献

[1] 陈丽, 戚飞虎. 基于梯度动力学的协同神经网络学习算法的改进[J]. 计算机应用与软件, 2005(1): 98-99+144-145.

[2] Jin, L., Zhang, Y., Li, S. and Zhang, Y. (2016) Noise-Tolerant ZNN Models for Solving Time-Varying Zero-Finding Problems: A Control-Theoretic Approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **62**, 992-997. https://doi.org/10.1109/tac.2016.2566880

[3] 刘万太, 练红海, 王芳, 等. 基于非线性激活函数的零化神经网络及其在动态问题求解中的应用[J]. 系统科学与数学, 2024, 44(7): 1870-1884.

[4] 张智明, 张仁杰. 神经网络激活函数及其导数的 FPGA 实现[J]. 现代电子技术, 2008(18): 139-142.

[5] Zuo, Q., Li, K., Xiao, L. and Li, K. (2021) Robust Finite-Time Zeroing Neural Networks with Fixed and Varying Parameters for Solving Dynamic Generalized Lyapunov Equation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **33**, 7695-7705. https://doi.org/10.1109/tnnls.2021.3086500

[6] 张永胜. 时变代数问题求解的新型递归神经网络方法的设计及分析[D]: [硕士学位论文]. 吉首: 吉首大学, 2021.

[7] 贺勇军. 变参容噪递归神经网络的研究和应用[D]: [硕士学位论文]. 吉首: 吉首大学, 2022.

[8] 谭志国. 面向系统与控制中两类矩阵方程求解的递归神经网络模型设计、分析及应用研究[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2019.

[9] 华成. 复值容噪递归神经网络模型设计及其应用[D]: [硕士学位论文]. 吉首: 吉首大学, 2024.

[10] 刘哲宇. 复时变问题求解的双积分增强归零神经网络设计与分析[D]: [硕士学位论文]. 吉首: 吉首大学, 2023.

[11] 郑波钰. 预定义时间收敛的高精度抗噪新型递归神经网络及其机器人应用研究[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 南昌大学, 2024.

[12] Lei, Y., Dai, Z., Liao, B., Xia, G. and He, Y. (2022) Double Features Zeroing Neural Network Model for Solving the Pseudoninverse of a Complex-Valued Time-Varying Matrix. *Mathematics*, **10**, Article No. 2122. https://doi.org/10.3390/math10122122

[13] Li, S., Chen, S. and Liu, B. (2013) Accelerating a Recurrent Neural Network to Finite-Time Convergence for Solving Time-Varying Sylvester Equation by Using a Sign-Bi-Power Activation Function. *Neural Processing Letters*, **37**, 189-205. https://doi.org/10.1007/s11063-012-9241-1

[14] 刘笑之. 面向光神经网络的硅基非线性激活器的研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江大学, 2023.