

噪声环境下基于纠缠纯化的鲁棒二维簇态量子网络编码

李佳明, 李祯祯*, 李子臣, 高博

北京印刷学院信息工程学院, 北京

收稿日期: 2026年4月15日; 录用日期: 2026年5月13日; 发布日期: 2026年5月25日

摘要

基于测量的量子计算(MBQC)为量子网络编码(QNC)提供了高效的并行处理框架,但现有基于二维簇态的QNC方案多假设理想信道,在实际偏置Pauli噪声环境下,其纠缠保真度会发生指数级衰减,难以满足量子密钥分发等应用的安全阈值。针对这一物理实现瓶颈,文章提出了一种抗噪性增强的鲁棒量子网络编码架构。该方案在空间复用的14粒子蝶形网络模型基础上,创新性地引入了改进的DEJMPS纠缠纯化协议。通过在端节点预先执行局部么正旋转,将信道中占主导的相位误差转化为易于检测的形式,从而在同等资源消耗下实现了对偏置噪声的有效抑制。基于Qiskit的系统级数值仿真不仅验证了该方案相较于传统纯化协议具有显著更高的输出保真度,还首次定量评估了端节点本地量子门误差对纯化鲁棒性的影响。结果表明,只要本地操作的去极化误差处于特定容错阈值内,该架构便能保持正向的纠缠浓缩增益。研究有效扩展了量子网络编码的适用噪声边界,为近期含噪量子(NISQ)设备上的高保真量子通信部署提供了关键的架构参考。

关键词

量子网络编码, 二维簇态, 基于测量的量子计算, 纠缠纯化, 偏置Pauli噪声, 容错阈值

Robust Quantum Network Coding on 2D Cluster States via Entanglement Purification in Noisy Environments

Jiaming Li, Zhenzhen Li*, Zichen Li, Bo Gao

School of Information Engineering, Beijing Institute of Graphic Communication, Beijing

Received: April 15, 2026; accepted: May 13, 2026; published: May 25, 2026

*通讯作者。

文章引用: 李佳明, 李祯祯, 李子臣, 高博. 噪声环境下基于纠缠纯化的鲁棒二维簇态量子网络编码[J]. 计算机科学与应用, 2026, 16(5): 125-138. DOI: 10.12677/csa.2026.165170

Abstract

Measurement-based quantum computation (MBQC) provides an efficient parallel processing framework for quantum network coding (QNC). However, existing QNC schemes based on two-dimensional (2D) cluster states mostly assume ideal channels. In practical biased Pauli noise environments, their entanglement fidelity decays exponentially, making it difficult to meet the security thresholds for applications such as quantum key distribution (QKD). To address this physical implementation bottleneck, this paper proposes a robust quantum network coding architecture with enhanced noise resilience. Based on a spatially multiplexed 14-qubit butterfly network model, this scheme innovatively introduces the modified DEJMPS entanglement purification protocol. By performing local unitary rotations at the end nodes beforehand, this scheme transforms the dominant phase errors in the channel into easily detectable forms, thereby achieving effective suppression of biased noise under the same resource consumption. System-level numerical simulations based on Qiskit not only verify that this scheme achieves significantly higher output fidelity compared to traditional purification protocols, but also quantitatively evaluate the impact of local quantum gate errors at the end nodes on the purification robustness for the first time. The results show that as long as the depolarizing errors of local operations are within a specific fault-tolerant threshold, the architecture can maintain a positive entanglement concentration gain. The research in this paper effectively expands the applicable noise boundaries of quantum network coding, providing a crucial architectural reference for the deployment of high-fidelity quantum communication on noisy intermediate-scale quantum (NISQ) devices.

Keywords

Quantum Network Coding, 2D Cluster State, Measurement-Based Quantum Computation, Entanglement Purification, Biased Pauli Noise, Fault-Tolerant Threshold

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着量子信息技术的飞速发展, 构建支持量子密钥分发(QKD)和分布式量子计算的全球化量子互联网已成为学术界与工业界的核心目标[1][2]。然而, 在复杂的量子网络拓扑中, 传统的路由策略在蝶形网络(Butterfly Network)等典型瓶颈结构处会面临严重的纠缠分发冲突。为突破这一多播吞吐量极限, Hayashi 等人首次将经典网络编码理论引入量子领域, 提出了量子网络编码(Quantum Network Coding, QNC)的概念, 从理论上证明了其在解决网络拥塞问题上的绝对优势[3]。

在量子网络编码的众多物理实现方案中, 基于测量的量子计算(Measurement-Based Quantum Computation, MBQC)模型因其资源利用率高、操作并行度好而备受瞩目[4][5]。不同于依赖复杂物理门序列的传统电路模型, MBQC 利用预先制备的大型纠缠簇态(Cluster State)作为资源, 仅需通过单比特测量即可完成信息的路由与处理。针对蝶形网络中的交叉传输难题, 李静等人提出了一种基于二维簇态的量子网络编码方案[6]。该方案巧妙地设计了一种 14 粒子二维簇态拓扑, 通过空间复用和特定的 X/Y 基测量序列, 成功在源节点与宿节点之间雕刻出两条无冲突的量子链路, 极大降低了物理实现的复杂度。

然而, 现有的 MBQC 网络编码方案(包括上述 14 粒子簇态模型)多建立在理想量子信道的假设之上

[7]。在真实的量子物理链路(如超导处理器或光纤节点)中,光子损耗与退相干效应不可避免[8]。特别是在固态量子系统中,噪声往往表现为高度非对称的偏置 Pauli 噪声(Biased Pauli Noise),即相位翻转(Z 误差)的发生概率远大于位翻转(X 误差)。研究表明,在这种偏置噪声环境下,MBQC 方案分发的纠缠保真度会呈指数级衰减;一旦保真度跌破实际诱骗态 QKD 的安全阈值($F \approx 0.89$),所建立的网络链路将彻底失去实用价值[9]。

为恢复长距离受噪链路的纠缠品质,引入量子纠缠纯化(Entanglement Purification)机制成为提升网络鲁棒性的必然选择。经典的 BBPSSW 协议虽然开创了纠缠纯化的先河,但其主要针对各向同性的去极化噪声或单一的比特翻转错误设计[10]。在面对实际网络中占主导的相位误差时,BBPSSW 协议的资源转化效率严重受限。为此,Deutsch 等人提出了改进的 DEJMPS 协议,该协议通过在执行双边 CNOT 操作前引入特定的局部幺正旋转(Local Unitary Rotations),成功将棘手的相位误差转化为易于检测的比特翻转误差[11]。这种噪声均匀化策略使得 DEJMPS 在对抗偏置噪声时展现出了远超 BBPSSW 的纯化效率。

尽管 DEJMPS 协议在理论上优势显著,但将其直接嵌入二维簇态网络编码时仍面临严峻的工程挑战:端节点在执行局域纯化操作(如 CNOT 门)时,其不完美的局部操作(Imperfect Local Operations)本身也会引入次级去极化误差[12]。目前尚未有文献对空间复用簇态网络与含噪物理门纯化的结合进行过系统的容错边界分析。

基于上述讨论,本文提出了一种抗噪性增强的鲁棒量子网络编码架构。本文的主要贡献如下:

1) 跨层架构设计:在经典的 14 粒子蝶形网络拓扑基础上,采用空间复用策略并行分发纠缠,并创新性地将改进型 DEJMPS 协议嵌入网络端节点,解决了偏置噪声下的高保真路由难题。

2) 硬件容错阈值评估:本文首次定量分析了不完美局部操作对 MBQC 网络纯化性能的负面影响,明确界定了端节点 CNOT 门的物理误差容忍阈值,为含噪量子网络设备的部署提供了重要的工程参考。

2. 预备知识

2.1. 二维簇态与基于测量的量子计算

簇态或图态是 MBQC 模型的核心纠缠资源。一个图态 $|\Phi_G\rangle$ 可由一个无向图 $G=(V,E)$ 唯一确定,其中顶点集 V 代表量子比特,边集 E 代表粒子间的物理纠缠相互作用[13][14]。图态的制备过程通常包括两步:首先将所有量子比特初始化为 $|+\rangle=(|0\rangle+|1\rangle)/\sqrt{2}$ 态,随后对所有由边 $(a,b)\in E$ 相连的顶点对施加受控相位门(CZ 门)。

在 MBQC 框架下,量子信息的路由与处理不再依赖酉演化,而是通过对图态中的粒子按特定时序执行单比特投影测量(通常在 Pauli X,Y,Z 基下)来驱动。测量操作在塌缩被测粒子的同时,会利用簇态固有的强关联性,将量子信息隐形传态至相邻的未测量粒子上[15]-[17]。值得注意的是,这种基于测量的传输是破坏性的,即作为资源的簇态在路由完成后即被消耗。

2.2. 量子信道与本地操作噪声模型

与传统假设的理想环境不同,本文充分考虑实际物理实现中的退相干效应,并针对网络传输与端节点局域操作分别建立了双重噪声模型:

1) 信道传输的偏置 Pauli 噪声

在固态自旋或超导量子网络中,量子态与环境的耦合往往呈现出强烈的非对称性,即相位退相干(Z 误差)的发生概率远大于能量弛豫引起的位翻转(X 误差),如图 1 所示[18][19]。对于一个单量子比特,其

在有噪信道中的演化可由偏置 Pauli 信道 $\mathcal{E}_{channel}$ 描述:

$$\mathcal{E}_{channel}(\rho) = (1-p)\rho + p_x X \rho X + p_y Y \rho Y + p_z Z \rho Z$$

其中, $p = p_x + p_y + p_z$ 为总物理误码率。为体现实际系统中的非对称畸变, 本模型假设相位误差占据绝对主导(即 $p_z \gg p_x, p_y$)。在此噪声作用下, 理想的最大纠缠态经过网络分发后, 将退化为以 $|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|$ 误差分量为主的贝尔对角态, 这直接构成了后续 DEJMPS 纯化协议的输入条件。

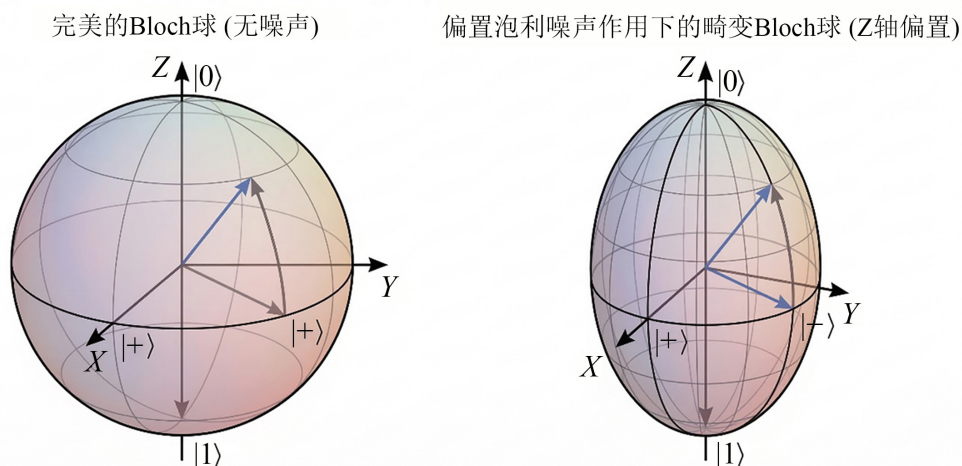


Figure 1. Distorted Bloch sphere under paranoid pauli noise
图 1. 偏执 Pauli 噪声作用下的畸变 Bloch 球

2) 端节点的不完美局域操作

现有大多数纯化研究假设端节点能够执行完美的量子逻辑门, 然而实际上, 双比特受控非门(CNOT 门)是目前量子硬件中保真度极具挑战的操作。为了严谨评估纠缠纯化的实际可行性, 本文引入全局去极化信道来对纯化阶段的本地 CNOT 门进行建模[20]-[22]。假设理想的 CNOT 操作为 U_{cx} , 其带有错误率 p_g 的含噪演化 \tilde{U}_{cx} 表示为:

$$\tilde{U}_{cx}(\rho) = (1-p_g)U_{cx}(\rho)U_{cx}^\dagger + \frac{p_g}{4} \sum_{i \in \{I, X, Y, Z\}} P_i \rho P_i^\dagger$$

该模型严格刻画了端节点在试图纯化信道噪声时, 其硬件本身引入次级白噪声的物理过程, 为本文确定网络编码的硬件容错阈值提供了数学基础。

2.3.14 粒子蝶形网络拓扑

本文采用文献[17]中提出的 14 粒子二维簇态拓扑来映射经典的蝶形网络结构。如图 2 所示, 该二维晶格包含两条潜在的水平传输通道(节点 1~7 与节点 8~14), 并在垂直方向的特定节点对((1, 8)、(4, 11)、(7, 14))之间制备了纠缠连接, 以构建支持交叉传输的桥接结构。

网络节点逻辑划分为: 源节点区域: S_1 包含粒子(1, 2), S_2 包含粒子(6, 7)。宿节点区域: T_1 包含粒子(13, 14), T_2 包含粒子(8, 9)。中继节点区域: R_1 (3, 4, 5)与 R_2 (10, 11, 12)充当量子路由器。

网络编码的核心目标是实现对角的无冲突纠缠分发(即 $S_1 \rightarrow T_1$ 且 $S_2 \rightarrow T_2$ 同时进行)。在理想的无噪环境下, 中继节点执行测量后, 源节点与宿节点的最外侧粒子对(如粒子 1 与 14)将共享完美的贝尔态[23]。但在本文构建的含噪模型中, 底层物理信道(第 2.2 节)带来的累积相位扰动, 导致端节点最终获取的只是

保真度低下的混合态 ρ_{out} 。正是这一物理退化现象，触发了本文提出结合空间复用与 DEJMPS 纠缠纯化的改进架构需求。

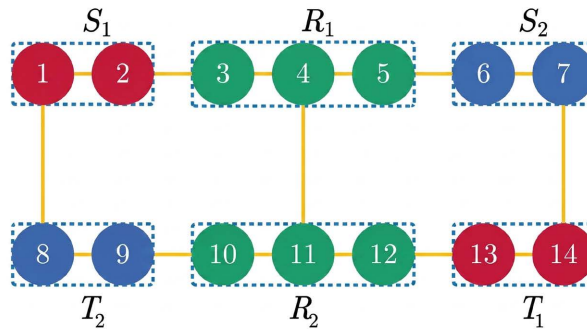


Figure 2. 14-particle cluster network diagram
图 2. 14 粒子簇态网络图

3. 结合纠缠纯化的改进网络编码架构

在上一节所述的 14 粒子二维簇态模型中，通过在中继节点执行特定的 X/Y 基测量序列，可以在源节点与宿节点之间建立长距离量子链路[24]。然而，由于信道偏置 Pauli 噪声的累积，分发的纠缠态 ρ_{out} 会严重偏离理想的贝尔态 $|\Phi^+\rangle$ 。为打破这一物理实现瓶颈，本文提出了一种基于空间复用与局域纯化相解耦的新型架构。改进后的协议流程严格分为三个阶段：噪声纠缠分发、局域纠缠纯化以及高保真态传输。

3.1. 基于空间复用的噪声纠缠分发

该阶段旨在利用二维簇态资源建立基础的带噪量子信道。传统的纯化方案通常依赖时间复用来收集多份纠缠，但这要求极长的量子存储相干时间[25]。为规避这一物理瓶颈，本方案在拓扑结构上采用空间复用策略。

资源制备与路径雕刻：在物理层面上，网络节点同时制备两层平行的 14 粒子二维簇态资源(如图 3 所示的双层复杂网络)。中继节点同步执行 MBQC 测量(例如对多余辅助粒子执行 Y 基测量，对桥接粒子执行 X 基测量)，以在端节点之间瞬间、并行地建立量子连接。

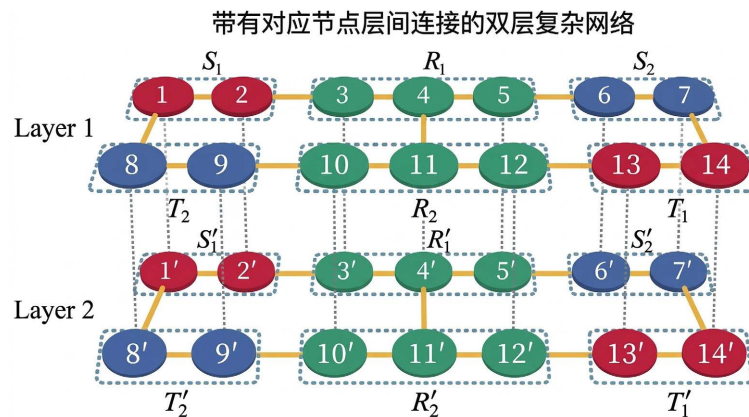


Figure 3. Two-layer spatial multiplexing network diagram
图 3. 双层空间复用网络图

信道建立：由于 MBQC 测量会消耗传输路径上的簇态资源，第一阶段结束后，广域网络晶格发生波函数坍缩。系统最终在源节点 S_1 与宿节点 T_1 的本地量子寄存器中，留下了两对独立的同类噪声纠缠对(分别记为 ρ_{AB1} 与 ρ_{AB2})，为后续的纯化协议提供了必要的资源底座[26]。

3.2. 基于 DEJMPS 协议的局域纠缠纯化

物理实现解耦说明：必须强调的是，随后的纯化操作并非在消耗殆尽的传输簇态上执行，而是利用端节点的本地量子寄存器与内部逻辑门电路独立完成。这种将广域簇态路由与局域门控纯化在物理层面解耦的设计，不仅极大提升了架构的可扩展性，也构成了后续分析本地门操作误差容忍度的理论基础。

为了对抗偏置 Pauli 噪声，源节点 S_1 与宿节点 T_1 协同执行改进的 DEJMPS 纯化协议[11]。具体步骤如下：

Step 1 局域旋转： S_1 对其持有的两个粒子 A_1, A_2 分别执行旋转操作 $R_x(\pi/2)$ ；同时， T_1 对其持有的粒子 B_1, B_2 分别执行逆旋转操作 $R_x(-\pi/2)$ 。此步骤旨在将信道中难以处理的相位误差(Z 错误)转化为后续 CNOT 门极易检测的比特翻转(X 错误)。

Step 2 宇称检测： 双方将第一对纠缠(A_1, B_1)作为控制对，第二对纠缠(A_2, B_2)作为靶对，执行双边 CNOT 操作，即 S_1 执行 $\text{CNOT}_{A_1 \rightarrow A_2}$ ， T_1 执行 $\text{CNOT}_{B_1 \rightarrow B_2}$ 。此操作将错误状态传播并集中至靶比特上。

Step 3 经典通信与后选择： 双方对靶比特(A_2, B_2)执行 Z 基测量，并通过经典信道交换结果。若结果的宇称一致，则保留控制比特(A_1, B_1)作为纯化后的链路。

假设经第一阶段分发的初始态为贝尔对角态：

$$\rho_{in} = A|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + B|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + C|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + D|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|$$

初始保真度 $F_{in} = A$ 。由于信道中 Z 错误占主导，初始状态必然呈现 $D \gg B, C$ 的非对称分布。在理想的局部操作下，纯化成功后输出态的保真度 F_{out} 满足以下非线性迭代关系：

$$F_{out} = \frac{A^2 + D^2}{(A + D)^2 + (B + C)^2}$$

该公式从理论上证明，DEJMPS 的局域旋转成功将最大的误差项 D 转移至分子的增益项中，从而在偏置噪声下实现保真度的急剧攀升($F_{out} \gg F_{in}$)。需要指出的是，该公式为纯化性能的理论上限[27]。在实际系统中，端节点 CNOT 操作引入的次级去极化误差(p_g)会不可避免地削弱这一非线性增益，本文将在第 5 节通过全系统密度矩阵演化对其容错边界进行严格的数值量化。

3.3. 高保真态路由与传输

在获得纯化后的高保真纠缠链路(态近似于 $|\Phi^+\rangle$)后，网络编码进入最终的端到端投递阶段。源节点对目标待传的任意量子态 $|\psi\rangle_{in}$ 与其持有的高保真粒子执行贝尔态测量，并将两比特经典测量结果通过经典信道发送给宿节点。宿节点根据接收到的经典信息，对本地对应的纠缠粒子执行相应的 Pauli 修正操作(I, X, Y, Z)，最终在接收端高保真地重构出目标量子态 $|\psi\rangle_{in}$ ，完成鲁棒的量子网络编码通信闭环。

4. 安全性与鲁棒性分析

不同于传统 QNC 方案仅在理想状态下讨论网络编码的可行性，本方案的核心优势在于其针对信道畸变与硬件缺陷双重非理想条件下的综合抗噪能力，并利用纯化机制提供了内生的安全增强。

4.1. 双重噪声环境下的鲁棒性边界

在实际的量子网络中，系统的鲁棒性面临着两面夹击：一是网络分发过程中累积的偏置 Pauli 噪声(破

坏初始纠缠质量), 二是端节点执行纯化操作时引入的局域去极化误差(p_g) [28]。

本方案引入的 DEJMPS 纯化机制本质上是一个针对非对称错误的“非线性误差过滤系统”。通过 $R_x(\pm\pi/2)$ 的局部旋转, 协议首先将信道中占主导的相位误差均匀化, 随后利用双边 CNOT 操作将其转换为可被测量的比特翻转。虽然这一过程以牺牲 50% 的纠缠资源为代价(空间复用提供的两对链路浓缩为一对), 但它有效打破了偏置噪声下单次传输的保真度物理上限。

更为关键的是, 该非线性过滤机制确立了一个明确的容错工作区(Fault-Tolerant Operating Regime)。只有当信道残余的初始保真度 F_{in} 提供的非线性增益, 足以覆盖并超越本地 CNOT 门误差 p_g 带来的线性衰减时, 系统才能实现正向的纠缠浓缩。这一鲁棒性边界在理论上界定了空间复用网络编码在当前 NISQ 硬件水平下的物理可行性(具体阈值将在第 5 节进行数值量化)。

4.2. 基于纠缠纯化的内生安全性分析与定量评估

不同于传统的量子网络编码方案仅在理想信道下讨论路由的可行性, 本方案的核心优势在于, 端节点嵌入的 DEJMPS 局域纯化模块不仅能有效抵抗物理退相干, 还为网络层面的量子通信(如量子密钥分发 QKD)提供了一层基于信息论的内生安全保障机制。

1) 截获 - 重发攻击的定量建模与高敏感度窃听感知

在实际通信中, 假设存在窃听者 Eve 对源节点与宿节点间的传输路径发动截获 - 重发攻击(Intercept-Resend Attack)。为了在偏置 Pauli 噪声(Z 误差主导)中隐蔽自身, 设 Eve 以概率 q 截获传输中的目标粒子, 并以相等的概率随机选择 X 基或 Z 基进行测量和重发。

根据量子态的测量塌缩特性, Eve 在 Z 基下的测量将破坏 X 基的相干性, 反之亦然。假设原信道到达端节点的贝尔对角态系数为 A, B, C, D , 引入 Eve 的攻击行为后, 根据信道演化理论, 端节点实际接收到的受扰密度矩阵系数将畸变为关于攻击概率 q 的函数 $A'(q), B'(q), C'(q), D'(q)$:

$$A'(q) = (1-q)A + \frac{q}{2} \left(\frac{A+D}{2} \right) + \frac{q}{2} \left(\frac{A+B}{2} \right)$$

$$B'(q) = (1-q)B + \frac{q}{2} \left(\frac{B+C}{2} \right) + \frac{q}{2} \left(\frac{A+B}{2} \right)$$

$$C'(q) = (1-q)C + \frac{q}{2} \left(\frac{B+C}{2} \right) + \frac{q}{2} \left(\frac{C+D}{2} \right)$$

$$D'(q) = (1-q)D + \frac{q}{2} \left(\frac{A+D}{2} \right) + \frac{q}{2} \left(\frac{C+D}{2} \right)$$

在后续的纯化操作中, 通信双方执行双边 CNOT 门与宇称校验。该阶段的理论成功率(即靶比特 Z 基测量结果一致的概率)由下式严格界定:

$$P_{succ}(q) = (A'(q) + D'(q))^2 + (B'(q) + C'(q))^2$$

由于 Eve 的测量操作强行打破了偏置信道原本 $D \gg B, C$ 的非对称噪声分布规律(将高概率的 A, D 分量泄漏至原本极低概率的 B, C 分量中), 这将导致纯化成功率 P_{succ} 发生显著劣化。

如图 4 所示, 黑色虚线标定了系统在无窃听条件下的正常环境本底纯化成功率(基准线)。红色的实体曲线展示了随着窃听者 Eve 攻击概率 q 的上升, 双边局域纯化中靶比特宇称检测成功率呈现出显著的单调下降趋势。图中红色填充区域即为“窃听告警区”。这一现象表明, DEJMPS 协议的非线性过滤机制对输入态的对称性扰动极为敏感。通信端节点无需额外消耗 BB84 协议中的诱骗态, 仅需统计局域纯化

模块的成功率均值；一旦该参数跌出理论信道参数的期望置信区间，即可高置信度地确证信道内存在主动攻击行为。

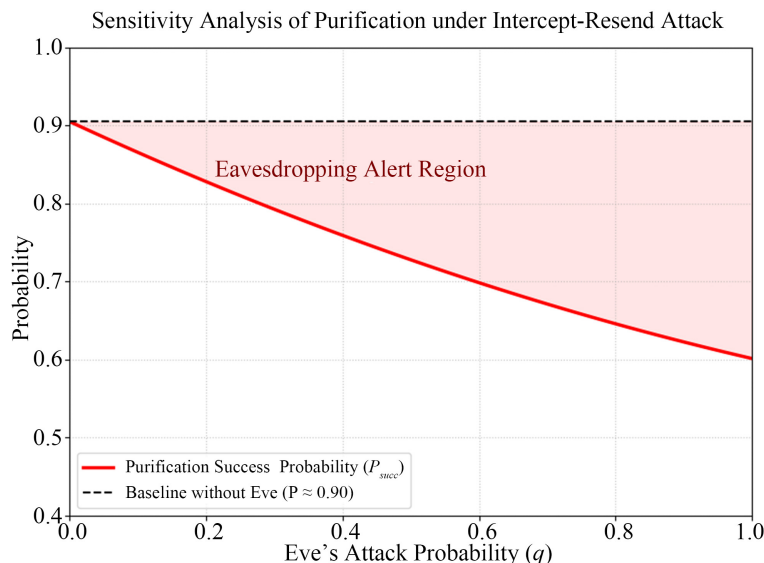


Figure 4. Eavesdropping sensitivity analysis chart
图 4. 窃听敏感度分析图

2) 恢复密钥生成率与跨越 QKD 安全阈值

在标准的容错 QKD 协议(如基于诱骗态的 BB84 协议)中，证明其具备无条件安全性的量子比特误码率(QBER)上限，通常对应于纠缠信道的最低安全保真度阈值(约 $F_{th} \approx 0.89$)。

当物理信道极度恶劣或 Eve 引入的非对称干扰加剧时，初始网络分发的链路保真度可能跌落至安全底线之下(例如 $0.79 \leq F_{in} < 0.89$)。此时，直接利用该链路提取安全密钥的生成率将逼近于零。本架构中引入的单轮纯化机制，作为一种主动的量子纠错前置手段，能够利用公式提供的非线性二次放大特性，将处于阈值下方的纠缠保真度重新拉升至 $F_{th} \approx 0.89$ 的无条件安全基线之上，从而在受损信道中强力恢复系统的安全密钥生成能力。

3) 基于单配性原理的窃听信息严格抑制

关于本架构对网络通信安全底层的提升机理，其实质可由 Shor 与 Preskill 提出的基于纠缠纯化的 QKD 无条件安全性证明框架来严格阐释。

在本方案中，通信双方执行 DEJMPS 纯化时牺牲的靶对粒子，其物理本质不仅是滤除了信道引起的相位误差，更是通过经典后选择对窃听者 Eve 可能掌握的联合子系统进行求偏迹(Partial Trace)的过程。随着纯化后主系统的保真度 F_{out} 不断逼近理想的极大纠缠态，根据量子纠缠的单配性(Monogamy of Entanglement)原理，系统与外部环境(即 Eve)之间的关联将被不可逆地剥离，导致 Eve 可获取的 Holevo 互信息量 $I(A:E)$ 受到严格压制。因此，端节点的局域纯化操作在物理层面上直接降低了实际的 QBER，这等效于大幅减少了后续经典数据后处理(即隐私放大, Privacy Amplification)阶段所需的哈希压缩量，从内生信息论机制上强化了网络编码链路的抗截获能力。

5. 数值仿真与性能评估

为验证所提跨层网络编码架构的有效性并探索其硬件容错边界，本文利用 Qiskit 量子计算框架进行了全系统数值仿真。考虑到 MBQC 测量引发的波函数塌缩特性，广域二维簇态的信道损伤最终等效映射

为端节点共享的带噪纠缠态。因此，为规避 28 粒子全密度矩阵演化的维度灾难，本节的仿真聚焦于端节点本地寄存器中的 4 粒子纯化动力学。仿真基于 `qiskit.quantum_info` 模块的底层密度矩阵精确演化，消除了有限采样带来的统计涨落，确保了保真度评估的绝对严谨性。

5.1. 仿真参数设置

信道噪声抽象：将 14 粒子二维簇态分发后的输出态建模为受偏置 Pauli 噪声参数化的初始混合态 ρ_{in} 。初始保真度 F_{in} 的扫描范围设定为 0.5~1.0，对应于偏置信道中 Z 误差占据主导地位 ($p_z = 90\%p$) 的恶劣环境。

本地操作误差：引入双比特去极化信道来模拟端节点执行 DEJMPS 协议时的不完美 CNOT 门。设置本地门误差率参数 $p_g \in \{0\%, 3.0\%, 6.0\%\}$ ，以阶梯式探索硬件缺陷对纯化收益的侵蚀效应。

评价指标：协议执行成功(即靶比特测量宇称一致)后的条件输出保真度 $F_{out} = \langle \Phi^+ | \rho_{out} | \Phi^+ \rangle$ 。

5.2. 结果分析

1) 理想与含噪局域操作下的纯化性能评估

为了量化本文提出的基于 DEJMPS 协议的局域纯化模块在对抗偏置 Pauli 噪声时的优势，以及评估其对底层硬件缺陷的容忍度，我们进行了系统的数值仿真。仿真结果如图 5 所示。横轴表示经过 14 粒子簇态网络传输后的初始纠缠保真度 (F_{in})，纵轴表示执行纯化操作后的输出保真度 (F_{out})。

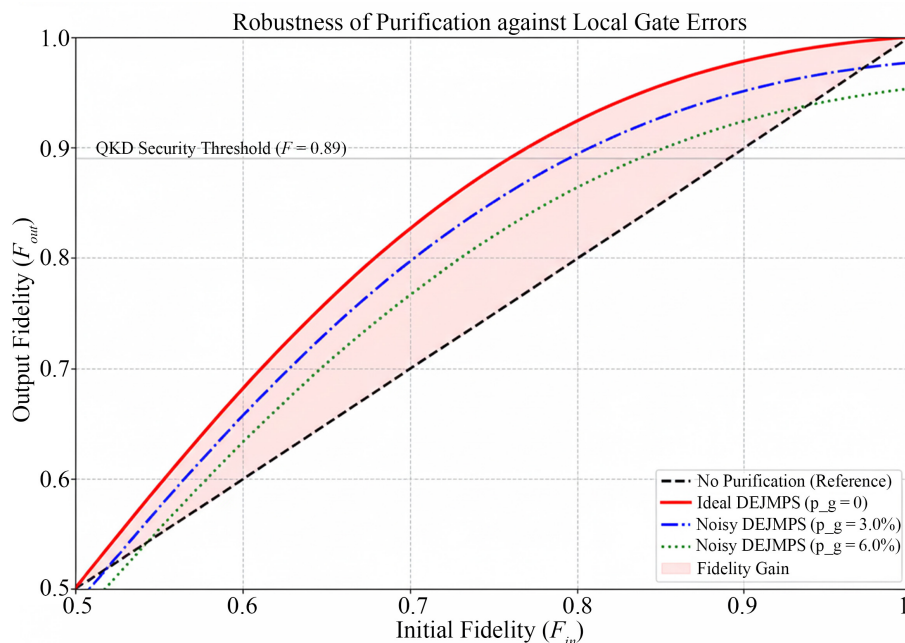


Figure 5. Fault-tolerant simulation curve

图 5. 容错仿真曲线

从图 5 中可以观察到以下极具工程指导意义的关键特性：**理想情况下的绝对增益：**图中黑色虚线 ($y = x$) 为纯化有效性的基准线。当假设端节点具备完美的量子逻辑门 ($p_g = 0$ ，红色实线) 时，只要 $F_{in} > 0.5$ ，红线始终位于黑线上方。图中红色的填充区域直观地展示了 DEJMPS 协议通过 R_x 旋转将偏置噪声均匀化后所带来的巨大保真度红利。特别是在 $F_{in} \approx 0.76$ 时，理想纯化方案即可将链路保真度一举推高至 0.89 的 QKD 无条件安全阈值(灰色水平虚线)之上。

硬件门误差的反噬效应：在实际的 NISQ 硬件中，纯化操作所需的本地 CNOT 门本身会引入去极化误差。图 5 引入了 $p_g = 3.0\%$ (蓝色点划线)与 $p_g = 6.0\%$ (绿色虚线)的实际硬件水平模拟。可以明显看出，门误差作为线性衰减因子，强烈压制了纯化的非线性增益。

界定纯化有效窗口：这是本图揭示的最重要物理规律。以 $p_g = 6.0\%$ 的绿色曲线为例，它与黑色基准线出现了两个交叉点(分别在 $F_{in} \approx 0.53$ 和 $F_{in} \approx 0.95$ 附近)。

下限阈值：当 $F_{in} < 0.53$ 时，信道太差，纯化失败。

上限惩罚：当 $F_{in} > 0.95$ 时，绿线跌至黑线下方，这意味着如果初始纠缠质量已经极高，强行执行带有 6% 误差的物理门，其引入的新噪声将超过纯化过滤掉的老噪声，导致越纯越糟。这一现象证明，含噪纯化机制仅在一个特定的保真度窗口内有效。

QKD 安全可达性评估：对于构建安全量子网络而言，关键在于能否跨越 $F = 0.89$ 的门槛。如图所示，在 $p_g = 3.0\%$ 的硬件水平下，系统需要底层的簇态网络提供至少 $F_{in} \approx 0.79$ 的初始链路质量，才能在单轮纯化后达标。而当硬件误差恶化至 $p_g = 6.0\%$ 时，跨越安全红线所需的基础条件被推高至 $F_{in} \approx 0.83$ 。

2) 综合性能与资源开销对比

Table 1. Comparison of different plans

表 1. 不同方案对比

对比维度	传统网络编码方案	本文提出架构
底层架构设计	单层 14 粒子簇态	双层 28 粒子簇态
抗噪核心机制	无主动纠错	局部么正与 CNOT
偏置噪声耐受度	极弱	极强
QKD 安全可达性	近乎理想信道可达	大幅放宽

为了更直观地展示本方案的工程应用价值，表 1 对比了未纯化基础方案与本文架构(在理想与含噪条件下)的综合性能边界。

如表 1 所示，引入空间复用与 DEJMPS 纯化使得系统底层的纠缠资源消耗翻倍，但这种以资源换鲁棒性的策略极具价值。仿真证明，即使在本本地 CNOT 门存在高达 6.0% 去极化误差的恶劣硬件条件下，本文架构依然能将构建安全 QKD 链路的门槛从 0.89 显著降低至 0.83，极大地扩展了量子骨干网在真实含噪环境中的适用距离。

6. 结束语

本文针对二维簇态量子网络编码在实际通信环境中面临的物理退相干问题，提出了一种抗噪性增强的跨层网络架构。通过在 14 粒子蝶形网络中融合空间复用策略与 DEJMPS 局域纯化协议，得出了以下关键结论：

突破偏置噪声瓶颈：传统的基于测量的量子网络编码对偏置 Pauli 噪声(尤其是相位误差)极其敏感。本文通过在端节点引入前置局部么正旋转，成功实现了噪声的均匀化，打破了单次网络分发的保真度物理上限。

量化硬件容错边界：利用严格的密度矩阵演化，本文首次揭示了本地量子门误差对网络纯化的双刃剑效应。研究发现，含噪纯化协议存在一个明确的纯化有效窗口。即使在端节点双比特门误差高达 6% 的近期硬件水平下，本方案依然能在 $0.53 < F_{in} < 0.95$ 的核心工作区内提供显著的纠缠浓缩增益。

安全链路门槛降维：相较于无纯化基础方案，本架构将实现 QKD 无条件安全传输 ($F \geq 0.89$) 的底层

信道要求大幅放宽。这证明了本文方案在容忍硬件缺陷的同时，为未来基于噪声中等规模量子设备构建广域量子互联网提供了极具工程实践价值的参考范式。

未来的工作将进一步探讨在复杂多播网络拓扑中，如何利用自适应反馈控制来动态调整多轮嵌套纯化的策略，以实现全网吞吐量与保真度的全局最优。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(62472040、12161061、61762068); 内蒙古自治区科技计划项目(SB20210010); 北京市教育科学“十四五”规划 2025 年度一般课题(CDGB25540); 2025 年度北京市数字教育研究课题(BDEC2025619060); 北京市高等教育学会面上课题(MS2024195); 北京印刷学院青年卓越项目(Ea202411); 北京印刷学院学科建设和研究生教育专项(21090225014, 21090525019)。

参考文献

- [1] 李庚. 量子通信技术研究现状[J]. 电子元件与信息技术, 2022, 6(3): 111-113.
- [2] 李静, 高飞, 秦素娟, 等. 量子网络系统研究进展与关键技术分析[J]. 中国工程科学, 2023, 25(6): 80-95.
- [3] Hayashi, M., Iwama, K., Nishimura, H., Raymond, R. and Yamashita, S. (2007) Quantum Network Coding. In: Thomas, W. and Weil, P. Eds., *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 610-621. https://doi.org/10.1007/978-3-540-70918-3_52
- [4] Raussendorf, R. and Briegel, H.J. (2001) A One-Way Quantum Computer. *Physical Review Letters*, **86**, 5188-5191. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.5188>
- [5] Raussendorf, R., Browne, D.E. and Briegel, H.J. (2003) Measurement-Based Quantum Computation on Cluster States. *Physical Review A*, **68**, Article 022312. <https://doi.org/10.1103/physreva.68.022312>
- [6] Li, J., Chen, X., Sun, X., Li, Z. and Yang, Y. (2016) Quantum Network Coding for Multi-Unicast Problem Based on 2D and 3D Cluster States. *Science China Information Sciences*, **59**, 1-15. <https://doi.org/10.1007/s11432-016-5539-3>
- [7] Matsuo, T., Satoh, T., Nagayama, S. and Van Meter, R. (2018) Analysis of Measurement-Based Quantum Network Coding over Repeater Networks under Noisy Conditions. *Physical Review A*, **97**, Article 062328. <https://doi.org/10.1103/physreva.97.062328>
- [8] Pathumsoot, P., Matsuo, T., Satoh, T., Hajdušek, M., Suwanna, S. and Van Meter, R. (2020) Modeling of Measurement-Based Quantum Network Coding on a Superconducting Quantum Processor. *Physical Review A*, **101**, Article 052301. <https://doi.org/10.1103/physreva.101.052301>
- [9] Lim, C.C.W., Curty, M., Walenta, N., Xu, F. and Zbinden, H. (2014) Concise Security Bounds for Practical Decoy-State Quantum Key Distribution. *Physical Review A*, **89**, Article 022307. <https://doi.org/10.1103/physreva.89.022307>
- [10] Bennett, C.H., Brassard, G., Popescu, S., Schumacher, B., Smolin, J.A. and Wootters, W.K. (1996) Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels. *Physical Review Letters*, **76**, 722-725. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.76.722>
- [11] Deutsch, D., Ekert, A., Jozsa, R., Macchiavello, C., Popescu, S. and Sanpera, A. (1996) Quantum Privacy Amplification and the Security of Quantum Cryptography over Noisy Channels. *Physical Review Letters*, **77**, 2818-2821. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.77.2818>
- [12] Briegel, H., Dür, W., Cirac, J.I. and Zoller, P. (1998) Quantum Repeaters: The Role of Imperfect Local Operations in Quantum Communication. *Physical Review Letters*, **81**, 5932-5935. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.81.5932>
- [13] Leung, D., Oppenheim, J. and Winter, A. (2010) Quantum Network Communication—The Butterfly and Beyond. *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**, 3478-3490. <https://doi.org/10.1109/tit.2010.2048442>
- [14] Kobayashi, H., Le Gall, F., Nishimura, H. and Rötteler, M. (2009) General Scheme for Perfect Quantum Network Coding with Free Classical Communication. In: Albers, S., Marchetti-Spaccamela, A., Matias, Y., Nikolettseas, S. and Thomas, W., Eds., *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 622-633. https://doi.org/10.1007/978-3-642-02927-1_52
- [15] Kobayashi, H., Le Gall, F., Nishimura, H. and Rötteler, M. (2010) Perfect Quantum Network Communication Protocol Based on Classical Network Coding. 2010 *IEEE International Symposium on Information Theory*, Austin, 13-18 June 2010, 2686-2690. <https://doi.org/10.1109/isit.2010.5513644>
- [16] Lu, H., Li, Z., Yin, X., Zhang, R., Fang, X., Li, L., et al. (2019) Experimental Quantum Network Coding. *npj Quantum Information*, **5**, Article No. 89. <https://doi.org/10.1038/s41534-019-0207-2>

-
- [17] 杨文灵, 李祯祯, 高博, 等. 二维簇态上基于测量的量子网络编码[J]. 计算机应用研究, 2025, 42(12): 3723-3731.
- [18] Kato, G., Owari, M. and Hayashi, M. (2021) Single-Shot Secure Quantum Network Coding for General Multiple Unicast Network with Free One-Way Public Communication. *IEEE Transactions on Information Theory*, **67**, 4564-4587. <https://doi.org/10.1109/tit.2021.3078812>
- [19] Kobayashi, H., Le Gall, F., Nishimura, H. and Rotteler, M. (2011) Constructing Quantum Network Coding Schemes from Classical Nonlinear Protocols. 2011 *IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings*, St. Petersburg, 31 July 2011-5 August 2011, 109-113. <https://doi.org/10.1109/isit.2011.6033701>
- [20] Beaudrap, N.d. and Herbert, S. (2020) Quantum Linear Network Coding for Entanglement Distribution in Restricted Architectures. *Quantum*, **4**, Article 356. <https://doi.org/10.22331/q-2020-11-01-356>
- [21] Owari, M., Kato, G. and Hayashi, M. (2018) Single-Shot Secure Quantum Network Coding on Butterfly Network with Free Public Communication. *Quantum Science and Technology*, **3**, Article 014001. <https://doi.org/10.1088/2058-9565/aa8ac4>
- [22] Hirota, Y. and Owari, M. (2022) Asymmetric Quantum Multicast Network Coding: Asymmetric Optimal Cloning over Quantum Networks. *Applied Sciences*, **12**, Article 6163. <https://doi.org/10.3390/app12126163>
- [23] Kimble, H.J. (2008) The Quantum Internet. *Nature*, **453**, 1023-1030. <https://doi.org/10.1038/nature07127>
- [24] Wehner, S., Elkouss, D. and Hanson, R. (2018) Quantum Internet: A Vision for the Road Ahead. *Science*, **362**, eaam9288. <https://doi.org/10.1126/science.aam9288>
- [25] Munro, W.J., Stephens, A.M., Devitt, S.J., Harrison, K.A. and Nemoto, K. (2012) Quantum Communication without the Necessity of Quantum Memories. *Nature Photonics*, **6**, 777-781. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2012.243>
- [26] Pant, M., Krovi, H., Towsley, D., Tassiulas, L., Jiang, L., Basu, P., *et al.* (2019) Routing Entanglement in the Quantum Internet. *npj Quantum Information*, **5**, Article No. 25. <https://doi.org/10.1038/s41534-019-0139-x>
- [27] Jiang, L., Taylor, J.M., Nemoto, K., Munro, W.J., Van Meter, R. and Lukin, M.D. (2009) Quantum Repeater with Encoding. *Physical Review A*, **79**, Article 032325. <https://doi.org/10.1103/physreva.79.032325>
- [28] Pirandola, S. (2019) End-to-End Capacities of a Quantum Communication Network. *Communications Physics*, **2**, Article No. 51. <https://doi.org/10.1038/s42005-019-0147-3>

附录

从 14 粒子二维簇态到端节点受噪贝尔对角态的理论推导为了严格量化偏置 Pauli 噪声对空间复用网络编码的影响, 本附录给出了从全局二维簇态制备、信道噪声演化到端节点执行局域测量后, 最终形成双比特贝尔对角态 ρ_m 的完整解析推导。A.1 初始二维簇态的制备模型。首先, 我们在蝶形网络的 14 个节点上制备初始量子态。网络中的各节点(顶点集 V , 其中 $|V|=14$)在初始化时均处于 $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ 态。根据蝶形网络晶格的物理连接关系(边集 E), 在相邻节点间施加受控相位门(CZ 门), 构建出全局的纯态二维簇态 $|G\rangle$:

$$|G\rangle = \prod_{(a,b) \in E} CZ_{a,b} |+\rangle^{\otimes 14}$$

在理想无噪环境下, 该系统对应的密度矩阵为 $\rho_{ideal} = |G\rangle\langle G|$ 。A.2 偏置 Pauli 信道下的系统演化与文献中假设的理想条件不同, 实际纠缠分发过程中粒子暴露于偏置 Pauli 噪声环境中。对于任意单量子比特 j , 其演化受到噪声信道 \mathcal{E}_j 的作用:

$$\mathcal{E}_j(\rho) = (1-p)\rho + p_x X_j \rho X_j + p_y Y_j \rho Y_j + p_z Z_j \rho Z_j$$

其中, 总物理误码率为 $p = p_x + p_y + p_z$, 且由于偏置效应, $p_z \gg p_x, p_y$ 。考虑到网络分发的独立性, 14 粒子全局系统在经历噪声信道后的混合态密度矩阵演化为:

$$\rho_{global} = \left(\sum_{j=1}^{14} \mathcal{E}_j \right) (|G\rangle\langle G|)$$

由于 CZ 门与 Z 误差对易 ($[CZ, Z \otimes I] = 0$), 信道中的相位误差 Z 会在图态的制备和传输中保持并累积, 这是导致最终纠缠品质下降的物理根源。A.3 局域泡利测量与拓扑雕刻为了在源节点 S_1 (持有粒子 1) 和宿节点 T_1 (持有粒子 14) 之间建立端到端的纠缠, 中继节点需对中间粒子集合 M 执行单比特投影测量。根据投影算符的定义, 对于特定基 $i \in \{x, y, z\}$, 其投影算子可统一表示为:

$$P_{i,\pm} = \frac{I \pm \sigma_i}{2}$$

其中 σ_i 为泡利矩阵, $P_{i,\pm}$ 将量子态投影到本征值为 ± 1 的子空间。假设中继节点根据路由策略, 对粒子集 M 执行特定的 X 或 Y 基测量, 测量结果集合记为 \bar{s} 。对应的多体联合测量投影算符为: $M_{\bar{s}} = \sum_{k \in M} P_{i(k), s_k}^{(k)}$ 将该测量操作作用于受噪的全局密度矩阵 ρ_{global} , 系统塌缩为:

$$\rho_{measured} = \frac{M_{\bar{s}} \rho_{global} M_{\bar{s}}^\dagger}{\text{Tr}(M_{\bar{s}} \rho_{global} M_{\bar{s}}^\dagger)}$$

A.4 求偏迹与端节点约化密度矩阵 ρ_m 的导出在完成测量后, 中间节点 M 的粒子被消耗并从网络中移除。此时, 我们对除端节点(如粒子 1 和 14)以外的所有测量粒子求偏迹(Partial Trace), 即可得到源节点与宿节点共享的端节点约度矩阵 ρ_m :

$$\rho_m = \text{Tr}_M(\rho_{measured})$$

由于测量基(X 或 Y)的本征态与信道主导的 Z 误差之间存在非对易关系, 中间链路上的 Z 误差在求偏迹的过程中, 会以特定概率传播至两端未被测量的粒子上。由于噪声的独立同分布特性, 最终存留在粒子 1 和 14 上的纠缠态会退相干为标准贝尔基 $\{|\Phi^\pm\rangle, |\Psi^\pm\rangle\}$ 的对角混合态形式:

$$\rho_m = A |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + B |\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + C |\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + D |\Phi^-\rangle\langle\Phi^-|.$$

其中, 系数 A, B, C, D 构成端节点的纠缠保真度特征向量。以主导相位误差为例, 若测量路径长度为 L (即经历的链路段数), 在忽略极小的位翻转概率 ($p_x, p_y \rightarrow 0$) 的极限近似下, 偶数个 Z 误差会相互抵消, 而奇数个 Z 误差会导致 $|\Phi^+\rangle$ 翻转为 $|\Phi^-\rangle$ 。因此, 系数可解析近似为:

$$A \approx \sum_{k=0, k \in \text{even}}^L \binom{L}{k} (1-p_z)^{L-k} p_z^k$$

$$D \approx \sum_{k=1, k \in \text{odd}}^L \binom{L}{k} (1-p_z)^{L-k} p_z^k$$

$$B \approx 0, C \approx 0$$

此时初始保真度 $F_{in} = A$ 。该推导明确表明, 在偏置 Pauli 噪声下, D 误差项(由 Z 误差累积引起)将随链路长度指数级增长, 最终导致 $D \gg B, C$ 。这为正文 3.2 节中引入 DEJMPS 协议以对抗非对称偏置噪声提供了严密的数学基础与物理输入条件。