

基于离散高斯曲率感知的融合网格参数化方法

涂佳冉, 仲彦军

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年5月22日; 录用日期: 2026年6月23日; 发布日期: 2026年6月30日

摘要

三维网格参数化是计算机图形学和数字几何处理中的基础问题,其目标是将三维曲面映射到二维参数域,同时尽可能降低角度畸变,面积畸变以及三角形翻转等问题。传统保角参数化方法能够较好地保持局部角度结构,但在高曲率区域容易产生面积拉伸。保面积参数化方法能够改善面积分布,却可能引入局部形状变形。针对单一参数化方法难以兼顾角度保持与面积保持的问题本文提出一种基于离散曲率感知的加权融合网格参数化方法。该方法先分别得到构造共形能量函数的保角参数化坐标和基于迭代拉伸方法的保面积参数化坐标。随后利用面积归一化角亏量刻画顶点局部曲率特征,并构造曲率驱动的自适应融合权重。为提高融合结果的稳定性,本文对两类参数化结果进行相似变换对齐,在统一边界约束下对内部顶点进行加权融合后结合三角形有向面积检测与无翻转投影策略减少局部翻转现象。实验结果表明,所提出方法在部分具有复杂局部几何特征的模型上能够在角度畸变,面积畸变和翻转控制之间取得较为稳定的折中效果。本文方法在保持局部形状特征的同时改善面积分布,为低复杂度、几何感知的三维网格参数化提供了一种可行思路。该方法也适用于具有复杂局部几何特征的三角网格参数化处理,但在复杂拓扑模型,自适应切割以及严格全局双射性约束方面仍有进一步研究空间。

关键词

三维模型, 网格参数化, 高斯曲率, 权重融合

A Gaussian Curvature-Based Weight Fusion Mesh Parameterization Method

Jiaran Tu, Yanjun Zhong

School of Mathematical Sciences Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: May 22, 2026; accepted: June 23, 2026; published: June 30, 2026

Abstract

3D mesh parameterization is a fundamental problem in computer graphics and digital geometry

文章引用: 涂佳冉, 仲彦军. 基于离散高斯曲率感知的融合网格参数化方法[J]. 计算机科学与应用, 2026, 16(6): 343-355. DOI: 10.12677/csa.2026.166233

processing. Its objective is to map a three-dimensional surface onto a two-dimensional parameter domain while minimizing angular distortion, area distortion, and triangle flips. Traditional conformal parameterization methods can effectively preserve local angular structures, but they tend to produce area stretching in high-curvature regions. Area-preserving parameterization methods can improve area distribution, but may introduce local shape deformation. To address the difficulty of simultaneously preserving angles and areas using a single parameterization method, this paper proposes a weighted fusion mesh parameterization method based on discrete curvature awareness. The proposed method first obtains conformal parameterization coordinates by constructing a conformal energy function and area-preserving parameterization coordinates based on an iterative stretching method. Then, an area-normalized angle defect is used to characterize the local curvature features of vertices, and a curvature-driven adaptive fusion weight is constructed. To improve the stability of the fusion result, the two parameterization results are aligned by a similarity transformation. Under consistent boundary constraints, the interior vertices are weighted and fused, followed by the use of oriented triangle area detection and a no-flip projection strategy to reduce local triangle inversions. Experimental results show that the proposed method can achieve a relatively stable trade-off among angular distortion, area distortion, and flip control on some models with complex local geometric features. While preserving local shape features, the proposed method improves area distribution and provides a feasible approach for low-complexity, geometry-aware 3D mesh parameterization. This method is also applicable to the parameterization of triangular meshes with complex local geometric features; however, further research is still needed for complex topological models, adaptive cutting, and strict global bijectivity constraints.

Keywords

3D Model, Mesh Parameterization, Gaussian Curvature, Weight Fusion

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

三维网格模型是计算机图形学中对三维连续曲面进行离散化表示的核心数据结构, 通过有限数量的顶点, 边与面片, 按照拓扑连接关系构成分片线性曲面, 以此逼近、表征任意复杂的三维几何形体, 而三角面片网格模型因为有诸多良好性质是三维实体数字化的主流表示形式。网格参数化技术[1]是建立三维网格曲面与二维参数域之间连续可逆映射的关键几何变换技术, 旨在将嵌入三维欧氏空间的网格曲面, 双射或近似双射地展开至平面参数域, 同时尽可能保持网格的几何度量与拓扑结构, 实现三维几何问题向二维平面问题的降维转化。参数化技术有着悠久的历史, 最初作为一种将纹理映射到曲面的方法被引入计算机图形学等领域, 随着现代计算机技术的飞速发展与信息多媒体的广泛推广, 其应用场景延伸至计算机图形学领域, 并迅速发展成为该领域的主要研究课题。其中, 为确保众多算法的收敛性和稳定性, 三角网格的质量备受重视, 而网格参数化作为网格处理技术的基础, 一直是计算机图形学领域的关注重点与研究热点。网格参数化方法本质上是三维空间中的网格映射到二维空间的算法, 作为数字几何处理技术的基础工具之一, 其在曲面重采样[2]、重网格化[3]、配准[4]、融合和纹理映射[5], 以及脑部平坦化[6]和脑肿瘤分割[7]的图像处理等各个方面发挥着至关重要的作用。关于网格参数化的方法与应用, 已在多篇综述文献中得到详细介绍[8]-[10]。

2. 相关工作

限制角度失真的参数化是指通过角度保持的微分同胚映射, 将曲面转换为具有规范形状的平面区域。计算曲面共形参数化旨在开发高效且稳健的算法, 用于构建将曲面映射到规范平面区域的共形微分同胚。限制角度失真的参数化方法都致力于最小化参数化过程中的角度畸变。限制角度失真的参数化方法不仅计算效率高, 还适用于纹理映射等场景, 只要参数化拉伸程度较低。当参数化曲面与可展曲面距离较近时, 通常就能满足这一条件。根据黎曼定理, 对于任意平面区域, 光滑曲面都存在保角平面参数化。Bruno Lévy 提出基于最小二乘共形映射的 LSCM (Least Squares Conformal Maps) 算法[11]通过对柯西黎曼方程做最小二乘近似构建二次目标函数以最小化角度变形, 将保角优化转化为可高效求解的线性问题。Sheffer 等人首先提出了经典的 ABF (Angle-based Flattening) 算法[12] [13], 对非零亏格的网格, 基于三角形面片的内角度数把问题转化成一个带有约束条件的非线性最优化问题进行加权求解。为了处理更复杂的拓扑结构 Rabinovich 等人结合谱方法与局部化技术结合全局优化与局部精细调整提出了 SLIM (Scalable Locally Injective Mappings) 算法[14]。但是以上方法专注于降低角度的失真, 对拉伸的约束较小, Hormann 等人首先提出能自动生成边界轮廓, 用全局统一逻辑构建畸变能量的 MIPS (Most Isometry-Parametrization Standard) 算法[15], Degener 等人引入了权重因子, 使用 SGP (Spectral Geometry Processing) 方法允许在保持角度和保持面积之间进行权衡[16], 傅孝明等人在 2015 年提出的改进, 通过重构 MIPS 能量函数, 提升计算速度并有效降低了局部畸变[17], 而 scott 使用自由边界双射算法用畸变屏障能量保证局部无三角翻转, 表达式与梯度求解远快于 MIPS 算法[18]。近年来 Yuch 等人提出的基于能量的畸变均衡参数化方法 EBDB (Energy Based Distortion Balancing) 采用增广拉格朗日法求解约束优化, 结合预处理非线性共轭梯度内层求解方程, 为传统固定权重的均衡问题提出了新思路[19]。

3. 构造共形能量函数的参数化方法

设三角形 $T_i = (P_1^i, P_2^i, P_3^i) \in M$ 是三维网格 M 中的一个面片, 其三个顶点在三维欧氏空间中的坐标分别为 $(P_1^i, P_2^i, P_3^i) = ((x_1^i, y_1^i, z_1^i), (x_2^i, y_2^i, z_2^i), (x_3^i, y_3^i, z_3^i)) \in R^3$ 。

为了在平面上应用复分析中的保角条件, 我们首先需要为每个三角形构建一个局部的二维标准正交基。具体做法是, 对每一个三角形来说, 取一个顶点作为原点即 $P_1^i = O$ 再对向量进行归一化处理:

$$X = \frac{P_2^i - P_1^i}{\|P_2^i - P_1^i\|}; Z = \frac{(P_2^i - P_1^i) \times (P_3^i - P_1^i)}{\|(P_2^i - P_1^i) \times (P_3^i - P_1^i)\|}; Y = Z \times X \quad (1)$$

每一个三角形而言可以构建局部坐标系, 则在任一三角面片 T_i 中设面片三个顶点局部坐标表示为:

$$\begin{cases} (x_1^i, y_1^i) = (0, 0) \\ (x_2^i, y_2^i) = [(P_2^i - P_1^i)X, 0] \\ (x_3^i, y_3^i) = [(P_3^i - P_1^i)X, (P_3^i - P_1^i)Y] \end{cases} \quad (2)$$

在此局部坐标系下, 定义参数化映射为线性函数, 且在局部坐标系下, 保角映射必须满足柯西黎曼方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

然而, 对于一般的三维离散网格, 全局严格保角映射通常是不存在的。因此, 算法通过在所有三角形面片上对柯西黎曼方程的违反程度进行最小二乘近似, 构造如下的共形能量函数:

$$E(u, v) = \sum_{T_i \in M} A_i \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

其中 A_i 为局部坐标系下三角形面片 T 的面积, (u_i, v_i) 为网格顶点在二维参数域中的坐标。为了对上述连续的共形能量函数进行求解, 需要将其转化为基于网格顶点的离散形式。在三角形 T_i 内, 参数化映射被假定为分片线性函数, 因此其梯度 $\nabla u_i, \nabla v_i$ 在面片内部是常数, 根据线性插值特性, 函数 $u(x, y)$ 的偏导数可以表示为顶点坐标的线性组合, 同理可得 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 的矩阵表达:

$$\nabla u_i = \frac{1}{2A_i} \sum_{j=1}^3 (y_j - y_k) u_j; \quad \nabla v_i = \frac{1}{2A_i} \sum_{j=1}^3 (y_j - y_k) v_j \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2A_i} \begin{pmatrix} y_2^i - y_3^i & y_3^i - y_1^i & y_1^i - y_2^i \\ x_3^i - x_2^i & x_1^i - x_3^i & x_2^i - x_1^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

将这些离散的梯度代入共形能量函数 $E(u, v)$ 中可以将每个面片上的保角误差转化为关于未知顶点坐标 (u_i, v_i) 的二次型:

$$E(u, v) = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & W \\ W^T & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P^T H P \quad (7)$$

$$\frac{\partial E(u, v)}{\partial X} = 2PH = 0; \quad X = (u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n)^T \quad (8)$$

考虑求解矩阵的稀疏对称正定特性, 在实际计算中, 通过固定至少两个顶点的坐标以消除平移和旋转自由度并使方程变为一个非齐次的稀疏线性方程组再使用基于 Cholesky 分解的 SimplicialLDLT 求解器来高效求解该线性系统

4. 基于迭代拉伸的参数化方法

在三维曲面的参数化过程中, 保角映射虽然能有效维持局部形状的夹角不发生畸变, 但往往会在曲率变化剧烈的区域引发极大的面积缩放。为了在后续的融合算法中引入面积约束, 本文采用了基于迭代拉伸分布的离散保面积参数化方法。该方法旨在极小化参数化前后的面积畸变能量, 使得二维参数域上的面片面积比例尽可能忠实于原三维网格。由于复杂三维网格在全局上往往无法同时满足所有的连续等面积偏微分方程, 在离散几何处理中, 参数化问题通常被转化为求解一个由加权拉普拉斯算子构成的线性系统。对于网格上的任意内部顶点 V_i , 其参数化坐标 $U_i = (u_i, v_i)$ 需要满足其单点邻域内的凸组合条件:

$$\sum_{j \in N(i)} w_{ij} (U_i - U_j) = 0 \quad (9)$$

其中, $N(i)$ 表示顶点 s_i 的一环邻接顶点集合, w_{ij} 为边 $e_{ij} = (s_i, s_j)$ 对应的权重。为了最小化面积畸变, 本文引入离散等面积权重, 离散等面积权重与主要依赖角度的余切权重用于保角参数化不同, 等面积权重同时考虑了角度与边长的关系, 其数学表达式为:

$$w_{ij} = \frac{\cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}}{\|l_i - l_j\|^2} \quad (10)$$

α_{ij} 和 β_{ij} 分别是与边 e_{ij} 相对的两个三角形的内角, $\|l_i - l_j\|^2$ 表示三维空间中顶点 s_i 和 s_j 之间的欧氏距

离的平方。分母中边长平方的引入, 使得拉普拉斯算子的散度能够直接关联网格的局部面积变化, 从而有效地控制参数化过程中的面积缩放。但是单纯依赖一次线性方程组的求解, 通常难以在曲率复杂的区域彻底消除面积畸变。因此, 本文实验中采用了一种迭代优化策略, 该迭代框架的核心思想是将全局面积畸变转化为一种可优化的能量函数, 并通过多次迭代使得参数域内的面积拉伸分布更加均匀:

$$\lambda = \frac{\sum_{T \in \mathcal{T}} A_1(T)}{\sum_{T \in \mathcal{T}} A_2(T)}; w_{ij}^{k+1} = w_{ij}^k \lambda; k = 0, 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{R} \quad (11)$$

其中 λ 是三角形面积比系数, 固定 k 次权重后求解上述方程, 为保持效果最优, 有相关文献[20]证明最优解为 $k = 20$, 实验时固定 $k = 20$ 得出迭代拉伸的保面积二维参数化坐标。

5. 基于曲率和畸变反馈驱动的保角保面积的联合方法

5.1. 基参数化坐标的对齐方法

因为构造共形能量函数和迭代拉伸的参数化方法的参数化坐标由不同的方法独立求解得到, 所以各自的参数化坐标可能存在平移, 旋转和尺度差异。若直接进行坐标融合, 将会引入由全局坐标系不一致造成的额外误差。因此, 在混合坐标构造之前, 本文首先将基于迭代拉伸的参数化坐标对齐到基于构造共形能量函数的参数化坐标。

设三维模型 $M \in (P, E, T)$ 其中 P, E, T 分别代表顶点集, 边集和三角面片集, 对于任意顶点 $p^i \in P$ 设由构造共形能量函数得到的保角参数化坐标为 $C_1 = \{u_i^{C_1}\}_{i=1}^P$, 由基于迭代拉伸的保面积参数化方法得到的参数化坐标为 $C_2 = \{u_i^{C_2}\}_{i=1}^P$ 。

设相似变换 $F(C) = \tau RC + t$, 其中 $\tau > 0$ 为尺度因子, R 为二维旋转矩阵, $t \in \mathbb{R}^2$ 为平移向量, 通过最小化两组参数化坐标之间的平方误差, 得到最优相似变换

$$\min_{\tau, R, t} \sum_{p_i \in P} \|\tau R u_i^{C_1} + t - u_i^{C_2}\|^2 \quad (12)$$

在实际计算中, 为保持边界一致性, 本文采用边界顶点进行相似变换估计令 $x = u_i^{C_1}; y = u_i^{C_2}$ 计算两组参数域坐标的质心 $\bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{p_i \in P} x_i, \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{p_i \in P} y_i$ 再对两组坐标进行去中心化 $\hat{x} = x_i - \bar{x}; \hat{y} = y_i - \bar{y}$ 因此在二维参数域中设:

$$\begin{cases} n_1 = \sum_{p_i \in P} (\hat{x}_i^1 \hat{y}_i^1 + \hat{x}_i^2 \hat{y}_i^2) \\ n_2 = \sum_{p_i \in P} (\hat{x}_i^1 \hat{y}_i^2 - \hat{x}_i^2 \hat{y}_i^1) \\ n_3 = \sum_{p_i \in P} [(\hat{x}_i^1)^2 + (\hat{x}_i^2)^2] \end{cases} \quad (13)$$

则最优相似变换的两个线性系数为 $\eta_1 = \frac{n_1}{n_3}; \eta_2 = \frac{n_2}{n_3}$, 那么尺度因子和旋转角为 $\tau = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$;

$\theta = \arctan 2(\eta_1, \eta_2)$ 因此旋转矩阵与平移向量可写为:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$t = \bar{y} - \tau R\bar{x} \quad (15)$$

由此可以得到对齐后的基于迭代拉伸的参数化坐标:

$$u_i^{C_2'} = \tau R u_i^{C_2} + t \quad (16)$$

5.2. 面积归一化离散曲率计算

曲率能够反映曲面局部弯曲程度, 是判断局部区域应偏向保角还是保面积的重要几何依据。对于高曲率区域, 例如指尖、耳朵、鼻子等位置, 若过度追求面积均匀, 容易破坏局部形状特征; 而对于相对平坦区域, 适当增强保面积约束可以有效降低纹理拉伸。因此, 本文利用离散高斯曲率构造局部几何先验。对于内部顶点 p 用面积归一化角亏量定义其离散曲率:

$$K_i = \frac{\left| 2\pi - \sum_{T \in N_i} \theta_i^T \right|}{A_i + \varepsilon} \quad (17)$$

其中 N_i 表示与顶点 p 相邻的三角面片集合, θ_i^T 表示三角面片 T 在顶点 p 处的三维内角, ε 为极小正数防止分母为 0。对于边界顶点 p , 其角亏量形式改为:

$$K_i = \frac{\left| \pi - \sum_{T \in N_i} \theta_i^T \right|}{A_i + \varepsilon} \quad (18)$$

对于任意三角面片, 其面片曲率定义为三个顶点曲率的平均值:

$$K = \frac{K_i + K_j + K_k}{3} \quad (19)$$

传统曲率加权方法通常采用最大曲率归一化或指数衰减函数, 引入各种需人工调节的参数但是不同模型的曲率范围和采样密度差异较大, 固定归一化方式容易受到极端曲率值影响。为避免人工参数对融合结果的影响, 本文采用经验分布函数对曲率进行无参归一化。定义面片 T_i 的经验分布归一化曲率为:

$$C_{T_i} = \frac{\text{card}\{n \in F | K_n \geq K\}}{|F|} \quad (20)$$

其中 card 表示集合中元素的数量, $|F|$ 表示三角面片总数。由定义可知当 C_{p_i} 接近 1 时, 说明面片 T_i 的曲率在全局曲率分布中处于较高位置, 该区域应更偏向降低角度扭曲; 当 C_{p_i} 接近 0 时, 说明面片 T_i 处于相对平坦区域, 该区域可更偏向降低面积扭曲。式(20)不依赖最大曲率、不需要人为设定衰减因子, 也不受模型整体尺度影响, 因此可作为无人工权重参数的曲率先验。

5.3. 计算局部角度畸变与面积畸变

仅依赖曲率先验虽然能够反映局部几何复杂度, 但不能直接描述当前参数化结果中的实际畸变状态。为此, 本文进一步引入角度畸变和面积畸变反馈项, 使融合权重能够根据当前参数化结果自适应调整。

设曲面上某个三角面片 T_i 中某点的的局部坐标为 (x, y) , 其在参数域中的对应坐标为 (u, v) , 则该映射的雅可比矩阵 J 定义为:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (21)$$

设 J 的两个奇异值为 σ_1 和 σ_2 , 当 σ_1 和 σ_2 相等时局部映射为各向同性缩放, 对应的角度畸变为零则局部角度畸变可由两个主方向拉伸比定义, 面积畸变由参数化后后面片面积比例定义:

$$D_1 = \left| \log \frac{\sigma_1}{\sigma_1} \right| \quad (22)$$

$$D_2 = \left| \log \frac{A \sum_{i \in T} \bar{A}_i}{A \sum_{i \in T} A_i} \right| \quad (23)$$

由于角度畸变和面积畸变的量纲及数值范围不同, 直接参与竞争会导致某一项在数值上占据主导。为此, 本文采用全局均值进行归一化:

$$\bar{D}_1(T) = \frac{|F|D_1(T)}{\sum_{n \in T} T_n + \varepsilon} \quad (24)$$

$$\bar{D}_2(T) = \frac{|F|D_2(T)}{\sum_{n \in T} T_n + \varepsilon} \quad (25)$$

式(24)和式(25)仅依赖当前参数化结果中的畸变统计量, 不引入任何人工权重参数。

5.4. 基于曲率的畸变竞争权重融合机制

根据经验归一化曲率 C_{T_i} 和归一化畸变 $\bar{D}_1(T)$ 与 $\bar{D}_2(T)$ 构造基于曲率的畸变竞争第 $t+1$ 次权重迭代为:

$$\lambda^{t+1} = \frac{C_{T_i} [\bar{D}_1(T_i)]}{C_{T_i} [1 + \bar{D}_1(T_i)] + (1 - C_{T_i}) [1 + \bar{D}_2(T_i)] + \varepsilon} \quad (26)$$

其中 $0 \leq \lambda \leq 1$, 当 λ 趋近于 1 时, 说明该面片更偏向基于构造共形能量函数的保角参数化; 当 λ 趋近于 0 时, 说明该面片更偏向基于迭代拉伸的保面积参数化。式(26)是本文的核心创新点之一, 若面片 T 位于高曲率区域, 则 C_{T_i} 较大, 保角项在竞争中占主导, 融合结果更接近保角参数化, 以维持尖锐特征和局部角度结构; 若面片 T 位于低曲率区域, 则 $1 - C_{T_i}$ 较大, 保面积项在竞争中占主导, 融合结果更接近保面积参数化, 以改善平坦区域的面积分布。式(26)还考虑了当前参数化结果中的畸变反馈。当 $\bar{D}_1(T)$ 较大时, 分子项增大, 算法自动增强保角倾向; 当 $\bar{D}_2(T)$ 较大时, 分母中的保面积竞争项增大, 算法自动增强保面积倾向。因此, 该权重不是人为指定的固定权重, 而是由网格曲率统计分布和当前畸变状态共同决定的自适应融合权重。

式(26)给出的是面片级融合权重, 而最终参数化坐标定义在顶点上。因此, 需要将面片权重转换为顶点权重。对于任意顶点定义顶点保角融合权重为:

$$\lambda_i = \frac{\sum_{T \in N(i)} A_T \lambda^{t+1}}{\sum_{T \in N(i)} A_T \lambda + \varepsilon} \quad (27)$$

面积加权平均能够降低小面积退化三角形对顶点权重的干扰, 使顶点融合权重更加稳定, 由式(16)可知 $0 \leq \lambda_i \leq 1$ 当 λ^{t+1} 较大时, 顶点 P_i 的混合坐标更接近保角参数化坐标; 当 λ^{t+1} 较小时, 混合坐标更接近保面积参数化坐标。对于内部顶点 P_i 本文最终混合坐标定义为保角坐标 $u_i^{C_1}$ 与对齐后的保面积坐标 $u_i^{C_2'}$ 之间的加权最小二乘折中解。构造如下局部能量:

$$E(u_i) = \lambda \|u_i^{C_1} - u_i^{C_2}\|^2 + (1-\lambda) \|u_i^{C_1} - u_i^{C_2'}\|^2 \quad (28)$$

其中, 第一项表示混合坐标接近保角参数化坐标的程度, 第二项表示混合坐标接近保面积参数化坐标的程度。由于 $0 \leq \lambda \leq 1$, 式(26)是关于 u_i 的凸二次函数。对 u_i 求导后令其梯度为 0 可得唯一极小解:

$$u_i = \lambda u_i^{C_1} + (1-\lambda) u_i^{C_2'} \quad (29)$$

式(29)表明, 本文的混合坐标并非简单经验插值, 而是由曲率—畸变竞争权重控制的加权最小二乘闭式解。高曲率区域或角度畸变较大的区域, 其 λ 较大, 最终坐标更接近保角参数化结果; 低曲率区域或面积畸变较大的区域, 其 λ 较小, 最终标更接近保面积参数化结果。将所有内部顶点的局部能量相加, 可得全局混合能量:

$$E'(u_i) = \sum_{p_i \in M} \left[\lambda_i \|u_i^{C_1} - u_i^{C_2}\|^2 + (1-\lambda_i) \|u_i^{C_1} - u_i^{C_2'}\|^2 \right] \quad (30)$$

由于每一项均为凸二次函数, 且 $0 \leq \lambda \leq 1$ 因此式(29)关于内部顶点坐标具有唯一极小解并且可以由式(30)求解得到。

5.5. 三角形防翻转策略

线性混合坐标能够在保角坐标和保面积坐标之间形成折中, 但坐标融合本身不能完全保证所有三角面片均保持正向。因此, 本文进一步引入有向面积检测和无翻转投影策略, 以减少局部翻转现象, 对于任一三角面片 $T_i = (P_1^i, P_2^i, P_3^i) \in M$, 其混合参数域坐标为 $(\tilde{u}_1^i, \tilde{v}_1^i)^T; (\tilde{u}_2^i, \tilde{v}_2^i)^T; (\tilde{u}_3^i, \tilde{v}_3^i)^T$ 定义其二维有向面积矩阵为:

$$\tilde{A}^i = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} \tilde{u}_2^i - \tilde{u}_1^i & \tilde{u}_3^i - \tilde{u}_1^i \\ \tilde{v}_2^i - \tilde{v}_1^i & \tilde{v}_3^i - \tilde{v}_1^i \end{pmatrix} \quad (31)$$

当 $\tilde{A} > 0$ 时参数化映射在局部保持方向一致, 不产生三角形翻转。若存在某个面片满足 $\tilde{A} < 0$ 则说明该面片发生翻转或退化。为避免直接采用混合坐标导致翻转, 本文从一个无翻转基准映射 $(\tilde{U}_1^i, \tilde{V}_1^i)$ 出发, 逐步向混合目标坐标靠近。对于内部顶点 \hat{p} 定义候选更新为:

$$\tilde{A}^i = (\tilde{U}_1^i, \tilde{V}_1^i) + \phi \left((\tilde{u}_1^i, \tilde{v}_1^i) - (\tilde{U}_1^i, \tilde{V}_1^i) \right) \quad (32)$$

其中 $0 < \phi \leq 1$ 若更新后所有与顶点 \hat{p} 相邻的三角面片均满足有向面积为正, 则接受该更新; 否则将 ϕ 减半并重新检测即寻找满足下式的最大步长:

$$\phi' = \max \{ \phi \in (0, 1] \mid \tilde{A}^i > 0, \forall T_i \in N(i) \} \quad (33)$$

经实验证明该策略能够在保持融合目标方向的同时, 极大避免局部三角形翻转。本文算法不需要人工设置保角权重、保面积权重或曲率衰减系数。曲率先验 λ 由当前网格的离散曲率经验分布自动生成, 畸变反馈项由当前参数化结果中的角度畸变和面积畸变自动计算。融合权重完全由网格自身几何特征和参数化状态决定。经验分布归一化方法具有尺度不变性。若输入模型经过整体缩放, 面积归一化曲率的数值可能发生比例变化, 但曲率在全局面片集合中的相对排序保持不变, 则 $\lambda^{(t)}$ 不受模型尺度影响。基于高斯曲率感知畸变竞争机制能够根据模型局部区域自动调整融合倾向。在高曲率区域算法增强保角约束以维持局部形状。在低曲率区域算法增强保面积约束以降低面积拉伸。当某一区域出现明显角度畸变或面积畸变时反馈项会自动修正局部融合比例, 混合坐标由凸二次加权最小二乘能量推导得到。

6. 实验与结果分析

6.1. 实验设置与实验结果

为了验证本文算法的低扭曲参数化结果, 本文使用了斯坦福数据库, 普林斯顿数据库和 common-3d-test-models 中的部分模型数据进行实验, 所有输入模型在实验前均被处理为三角网格, 并切割为具有边界的拓扑圆盘网格, 以满足平面参数化的基本要求。实验在同一硬件平台上完成, 系统环境为 Windows 11, 处理器为 12th Gen Intel(R)Core(TM)i5-12500H, 显卡为 NVIDIA GeForce RTX 3050 Laptop, 内存为 16 GB, 程序采用 C++ 算法实现, 图形处理库为 CGAL, 编译环境为 Visual Studio。参数化结果可视图使用 meshlab 和 blender 渲染展示。实验模型的顶点数和面片数如表 1 所示。从表中数据表明实验模型规模覆盖范围较广, 其中 Pig 模型最简单, 仅包含 265 个顶点和 498 个面片; Igea 模型最复杂, 包含 122155 个顶点和 243,838 个面片。因此该实验数据集能够同时考察算法在小规模网格和大规模网格上的适用性。

Table 1. Basic data of experimental models

表 1. 实验模型基础数据

模型名称	顶点数	面片数
Bunny	31,006	61,463
Camelhead	11,381	22,704
Chineselion	8534	16,727
Face	17,157	34,144
Femur	3827	7627
Igea	122,155	243,838
Lefthand	20,624	41,008
Maxplanck	48,270	96,214
Nefertiti	47,924	95,324
Pig	265	498

图 1 展示了本文选取的实验模型。从模型外观可以看出, 不同模型具有不同的局部几何特征。例如 Bunny 和 Camelhead 具有较明显的耳部, 头部等局部凸起结构, Face 和 Nefertiti 具有鼻部, 眼部等高曲率区域, Lefthand 包含手指等细长局部结构, Femur 则表现出较强的骨骼形态特征。这些模型能够用于测试本文方法在高曲率区域保持局部形状、在相对平坦区域降低面积拉伸的能力。

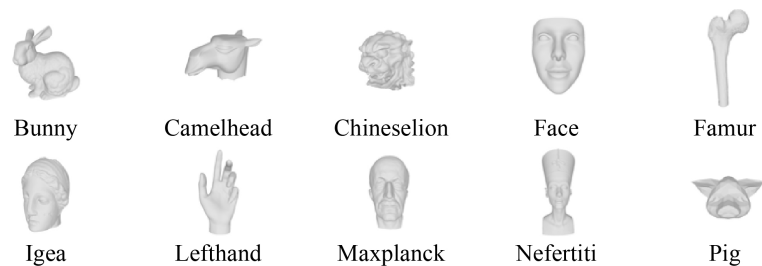


Figure 1. Experimental models

图 1. 实验模型

6.2. 算法对比实验

为了验证本文算法对比, 本文对构造共形能量函数的参数化方法, 基于迭代拉伸的算法和本文算法在十个不同的模型上进行实验, 并根据式(24)和式(25)计算角度畸变与面积畸变数值大小。

从表 2~4 的实验数据对比可以看出, 基于共形能量函数的参数化在部分模型上能够获得较低的平均角度误差且能够保持局部角度结构, 但在复杂几何区域或细长结构模型中容易产生严重面积拉伸和局部翻转, 而基于迭代拉伸的参数化方法整体上能够显著降低面积误差, 是该方法并不能稳定保证局部无翻转, 在复杂几何区域或细长结构模型中容易产生严重面积拉伸和局部翻转而且平均角度误差高于前者。

Table 2. Experimental results of the algorithm for constructing a conformal energy function

表 2. 构造共形能量函数的算法实验结果

模型名称	翻转三角形数量	平均角度畸变	平均面积畸变	最大角度畸变	最大面积畸变
Bunny	88	0.4743	2.7382	2.6519	18.4169
Camelhead	3	0.664	3.6191	2.7412	12.8266
Chineselion	56	0.9609	1.4809	2.6021	8.0729
Face	5019	0.371	1.176	2.8721	14.999
Femur	2880	0.2793	19.8212	2.9128	58.056
Igea	2	0.0258	1.9651	1.7538	5.8518
Lefthand	186	0.7493	4.8614	1.9926	31.6412
Maxplanck	7	0.0166	3.2627	1.9382	7.1003
Nefertiti	117	0.751	8.1232	2.1543	16.0181
Pig	12	0.2640	1.9079	2.1193	7.04861

Table 3. Experimental results of the proposed algorithm based on iterative stretching

表 3. 基于迭代拉伸的算法实验结果

模型名称	翻转三角形数量	平均角度畸变	平均面积畸变	最大角度畸变	最大面积畸变
Bunny	0	0.5601	0.3318	2.1853	2.9191
Camelhead	16	0.5887	0.3953	1.7518	4.5435
Chineselion	0	0.4267	0.2782	2.1644	2.5834
Face	12	0.3689	0.22193	2.2869	2.6976
Femur	452	0.7250	3.321	2.8934	15.2963
Igea	0	0.3434	0.2848	1.8044	2.868
Lefthand	43	0.5052	2.3359	2.3358	7.7994
Maxplanck	4	0.4535	0.449	1.5745	3.0313
Nefertiti	29544	0.9357	4.3409	2.9307	18.4546
Pig	0	0.3825	0.3008	1.4401	1.54488

Table 4. Experimental results of the proposed algorithm
表 4. 本文算法实验结果

模型名称	翻转三角形数量	平均角度畸变	平均面积畸变	最大角度畸变	最大面积畸变
Bunny	0	0.3799	0.3652	1.0031	2.0414
Camelhead	0	0.5544	0.2916	1.9010	1.9071
Chineselion	0	0.6458	0.1918	2.2186	2.1248
Face	0	0.2061	1.2528	2.0742	2.5835
Femur	0	0.3784	4.786	2.9128	2.1946
Igea	0	0.6314	0.1512	1.7863	1.966
Lefthand	0	0.5186	2.9915	1.9915	9.5626
Maxplanck	0	0.6598	0.396	1.1173	3.0688
Nefertiti	44	0.6901	4.8318	1.9231	20.8471
Pig	0	0.3557	1.2718	1.7914	1.5292

通过表 4 的数据可以说明本文方法在大多数模型上能够有效减少翻转三角形数量。在角度畸变方面, 本文方法并非在所有模型上都优于保角方法, 这是符合方法设计预期的。因为本文方法并不是单一保角优化, 而是在保角和保面积之间进行折中。本文方法在 Bunny、Camelhead、Face 和 Nefertiti 等模型上取得了较低的平均角度误差。这说明对于部分局部曲率变化明显的模型, 本文使用的曲率感知融合权重方法能够有效改善角度畸变。在面积畸变方面, 虽然保面积方法在平均面积误差上通常具有较强优势, 但本文方法在最大面片面积误差方面表现更稳定。通过表 4 数据可以看出本文方法的最大面片面积误差均低于或接近基于迭代拉伸的参数化方法。综合来看, 基于共形能量函数的保角方法在部分模型上具有较低的角度误差, 但面积误差和翻转数量较大; 基于迭代拉伸的保面积方法能够降低平均面积误差, 但在复杂模型上容易出现翻转; 本文方法通过曲率先验、畸变反馈和防翻转投影策略, 在角度保持, 面积保持和翻转控制之间取得了更加稳定的折中效果(图 2)。



Figure 2. Parameterization results of the bunny model

图 2. Bunny 模型参数化结果展示

7. 结论

本文针对三维网格参数化方法中单一保角方法难以兼顾面积分布、单一保面积方法容易引入局部形状变形的问題, 提出了一种基于离散高斯曲率感知的融合网格参数化方法。该方法首先分别构造基于共

形能量函数的保角参数化坐标和基于迭代拉伸的保面积参数化坐标, 在此基础上利用相似变换对两类参数域结果进行统一对齐, 为后续坐标融合提供一致的参数空间。再采用面积归一化角亏量描述网格局部曲率特征, 并结合角度畸变和面积畸变反馈构造自适应融合权重, 使高曲率区域更倾向于保持局部角度结构, 而相对平坦区域更倾向于改善面积分布。最后通过三角形有向面积检测和无翻转投影策略, 在一定程度上减少了融合过程中可能出现的局部三角形翻转现象。

实验结果表明, 本文方法在多个典型三角网格模型上能够在角度畸变、面积畸变和翻转控制之间取得较为稳定的折中效果。与单纯保角参数化方法相比, 本文方法能够改善部分模型中的面积拉伸问题; 与基于迭代拉伸的保面积参数化方法相比, 本文方法在复杂局部结构模型上具有更好的翻转控制能力和局部形状保持效果。特别是对于包含耳部、鼻部、手指等高曲率或细长结构的模型, 曲率感知权重能够较好地反映局部几何特征, 使融合结果在保持特征形状和降低面积畸变之间获得较为合理的平衡。

本文方法的创新点在于不依赖人工设定固定融合权重, 而是通过网格自身曲率分布和当前参数化畸变状态自适应确定融合比例, 具有一定的几何适应性和实现简洁性。融合阶段主要涉及曲率计算、畸变统计、权重更新和局部投影等步骤, 与基于能量函数的参数化方法相比计算复杂度相对较低, 适合用于一般规模三角网格的参数化处理。不过本文方法仍存在不足。实验模型主要集中于切割为拓扑圆盘的三角网格, 对于复杂拓扑, 多边界曲面以及不同切割方式下的稳定性仍需进一步验证。当前融合策略主要基于顶点坐标层面的加权折中, 尚未从全局能量优化角度进一步提升双射性和畸变控制能力, 后续研究可在保持算法低复杂度的基础上, 引入更严格的无翻转约束、全局畸变优化机制以及面向复杂拓扑模型的自适应切割策略, 从而进一步提高网格参数化结果的稳定性和适用范围。

参考文献

- [1] Sheffer, A., Praun, E. and Rose, K. (2007) Mesh Parameterization Methods and Their Applications. *Foundations and Trends® in Computer Graphics and Vision*, **2**, 105-171. <https://doi.org/10.1561/06000000011>
- [2] Choi, G.P., Man, M.H. and Lui, L.M. (2016) Fast Spherical Quasiconformal Parameterization of Genus-0 Closed Surfaces with Application to Adaptive Remeshing. *Geometry, Imaging and Computing*, **3**, 1-29. <https://doi.org/10.4310/gic.2016.v3.n1.a1>
- [3] Dai, P., Xu, J., Xie, W., Liu, X., Wang, H. and Xu, W. (2024) High-Quality Surface Reconstruction Using Gaussian Surfels. *Special Interest Group on Computer Graphics and Interactive Techniques Conference Conference Papers*, Denver, 27 July 2024- 1 August 2024, 1-11. <https://doi.org/10.1145/3641519.3657441>
- [4] Lipschütz, H., Reitebuch, U., Polthier, K. and Skrodzki, M. (2026) Feature-Aware Manifold Meshing and Remeshing of Point Clouds and Polyhedral Surfaces with Guaranteed Smallest Edge Length. *Computer-Aided Design*, **192**, Article ID: 104010. <https://doi.org/10.1016/j.cad.2025.104010>
- [5] Wendling, Q., Ravaglia, J. and Sauvage, B. (2025) Deformed Tiling and Blending: Application to the Correction of Distortions Implied by Texture Mapping. *Computer Graphics Forum*, **44**, e70011. <https://doi.org/10.1111/cgf.70011>
- [6] Yu, B., Wang, S., Luo, C., Hu, X. and Zhang, L. (2026) Study on Silicon Dioxide Chemical Mechanical Planarization Using Iron-Cobalt Double-Doped Cerium Dioxide Abrasives. *Physica Scripta*, **101**, Article ID: 195911. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ae64b3>
- [7] Lei, J., Dai, L., Jiang, H., Wu, C., Zhang, X., Zhang, Y., et al. (2025) UniBrain: Universal Brain MRI Diagnosis with Hierarchical Knowledge-Enhanced Pre-training. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, **122**, Article ID: 102516. <https://doi.org/10.1016/j.compmedimag.2025.102516>
- [8] Zimmermann, A. (2019) Method Evaluation, Parameterization, and Result Validation in Unsupervised Data Mining: A Critical Survey. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*, **10**, e1330. <https://doi.org/10.1002/widm.1330>
- [9] 李海生, 曹国梁, 魏阳, 等. 三角网格曲面共形参数化研究综述[J]. *图学学报*, 2021, 42(4): 535-545.
- [10] Eichhoff, J.R. and Roller, D. (2015) A Survey on Automating Configuration and Parameterization in Evolutionary Design Exploration. *Artificial Intelligence for Engineering Design, Analysis and Manufacturing*, **29**, 333-350. <https://doi.org/10.1017/s0890060415000372>
- [11] Lévy, B., Petitjean, S., Ray, N. and Maillot, J. (2002) Least Squares Conformal Maps for Automatic Texture Atlas

-
- Generation. *Proceedings of the 29th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*, San Antonio, 23-26 July 2002, 362-371. <https://doi.org/10.1145/566570.566590>
- [12] Sheffer, A. and de Sturler, E. (2001) Parameterization of Faceted Surfaces for Meshing Using Angle-Based Flattening. *Engineering With Computers*, **17**, 326-337. <https://doi.org/10.1007/pl00013391>
- [13] Sheffer, A., Lévy, B., Mogilnitsky, M. and Bogomyakov, A. (2005) ABF++: Fast and Robust Angle Based Flattening. *ACM Transactions on Graphics*, **24**, 311-330. <https://doi.org/10.1145/1061347.1061354>
- [14] Rabinovich, M., Poranne, R., Panozzo, D. and Sorkine-Hornung, O. (2017) Scalable Locally Injective Mappings. *ACM Transactions on Graphics*, **36**, 1-16. <https://doi.org/10.1145/2983621>
- [15] Hormann, K. and Greiner, G. (2000) MIPS: Efficient Global Parameterization of Triangular Meshes. *Computing*, **65**, 357-374.
- [16] Degener, P., Meseth, J. and Klein, R. (2003) An Adaptable Surface Parameterization. *Proceedings of the 12th International Meshing Roundtable*, Santa Fe, 14-17 September 2003, 201-213.
- [17] Fu, X.M., Liu, Y. and Guo, B. (2015) Computing Locally Injective Mappings by Advanced MIPS. *ACM Transactions on Graphics*, **34**, 1-12. <https://doi.org/10.1145/2766938>
- [18] Smith, J. and Schaefer, S. (2015) Bijective Parameterization with Free Boundaries. *ACM Transactions on Graphics*, **34**, 1-9. <https://doi.org/10.1145/2766947>
- [19] Yueh, M.H., Lin, W.W. and Yau, S.T. (2024) Energy-Based Distortion-Balancing Parameterization for Open Surfaces. arXiv: 2412.09909. <https://arxiv.org/abs/2412.09909>
- [20] Jain, H., Wollhaf, M. and Hellwich, O. (2019) Learning to Reconstruct Symmetric Shapes Using Planar Parameterization of 3D Surface. 2019 *IEEE/CVF International Conference on Computer Vision Workshop (ICCVW)*, Seoul, 27-28 October 2019, 4133-4140. <https://doi.org/10.1109/iccvw.2019.00508>