

基于自适应非凸高阶法向滤波与 Mumford-Shah 间断函数的 ℓ_p - ℓ_1 混合保特征网格去噪模型

蒲倩^{1,2}, 仲彦军^{1,2*}

¹新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

²新疆师范大学CAD&CG实验室, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2026年6月26日; 录用日期: 2026年7月23日; 发布日期: 2026年7月30日

摘要

近几年来, 随着激光扫描, 结构光扫描, 摄影测量等3D数字化技术逐渐普及到成为刚需, 人们可以轻松地从这些设备当中获取到三角网格模型。但是, 我们从中获取到的三角网格模型往往会因为激光、结构光扫描仪的测量精度的限制或者是深度相机的深度值漂移值等设备带来的物理误差, 或是物体表面反光, 环境光变化等环境干扰引入各类噪声的干扰。这些噪声会降低网格模型的质量, 还会给网格分割、参数化、可视化、重构等网格处理应用带来一定的误差。因此, 如何从含噪的三角网格模型中还原出高质量的网格模型是我们要解决的重要问题。网格去噪的核心难点在于在去噪保真的同时也要尽可能保证网格的特征。

关键词

三角网格, 正则项, 特征保持, 网格去噪

A Feature-Preserving Mesh Denoising Model Based on Adaptive Non-Convex High-Order Normal Filtering and Mumford-Shah Discontinuity Function with ℓ_p - ℓ_1 Hybrid Regularization

Qian Pu^{1,2}, Yanjun Zhong^{1,2*}

¹School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

*通讯作者。

文章引用: 蒲倩, 仲彦军. 基于自适应非凸高阶法向滤波与 Mumford-Shah 间断函数的 ℓ_p - ℓ_1 混合保特征网格去噪模型[J]. 计算机科学与应用, 2026, 16(7): 242-253. DOI: 10.12677/csa.2026.167255

Abstract

In recent years, 3D digitization technologies such as laser scanning, structured light scanning, and photogrammetry have evolved from niche applications into indispensable tools, enabling convenient acquisition of triangular mesh models. However, the raw meshes obtained from these devices are inevitably corrupted by various types of noise. This noise arises from either hardware-induced physical errors—such as the limited measurement precision of laser and structured light scanners, or depth value drift in depth cameras—or environmental interferences including object surface reflectance and ambient illumination variations. The presence of noise degrades the quality of mesh models and introduces significant errors into subsequent mesh processing tasks, including segmentation, parameterization, visualization, and surface reconstruction. Therefore, reconstructing high-quality meshes from noisy triangular mesh data has become a critical research problem. The core challenge in mesh denoising lies in achieving a balance between effective noise removal and faithful preservation of intrinsic geometric features.

Keywords

Triangular Mesh, Regularization Term, Feature Preservation, Mesh Denoising

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 激光扫描、结构光扫描等三维数字化技术的广泛应用, 使得三角网格模型成为计算机图形学、工业制造、文物保护等领域的核心数据表示。然而, 受设备测量精度限制与环境干扰影响, 原始扫描网格不可避免地受到各类噪声污染, 严重降低模型质量并导致后续网格分割、曲面重构等应用产生显著误差。因此, 在有效去除噪声的同时完整保留模型固有几何特征, 是三维几何处理领域亟待解决的核心问题。

现有网格去噪方法主要分为三类: 基于滤波的方法计算简单但参数敏感, 难以区分微小特征与高频噪声; 基于变分优化的方法通过能量泛函最小化实现去噪, 但一阶模型易产生阶梯伪影, 高阶模型对强噪声鲁棒性不足; 数据驱动方法在复杂场景下表现优异, 但存在可解释性差、泛化能力有限及对训练数据依赖度高等问题。

2. 三角网格算法去噪分类

本文章仅梳理了现阶段具有代表性的网格去噪方法, 以及跟本文内容联系紧密的去噪方法, 对网格去噪感兴趣, 想要快速了解有关网格去噪相关内容的读者可以参考文献[1][2], 获取网格去噪的综述。根据本文的研究, 现阶段的网格去噪方法大致分为三类: 基于优化的方法, 基于滤波的方法, 数据驱动的方法。基于滤波的网格去噪方法是把三角网格的表面看作是顶点信号, 接着通过对局部邻域的加权、平均、修正的方法, 把噪声去除, 保留网格的真实几何结构。早期的滤波类方法主要以各向同性滤波为主,

它假定网格表面是光滑连续的, 噪声是局部扰动, 直接对邻域顶点做平均或者是加权平均, 这种方法虽简单, 但是带来模型严重收缩, 尖锐特征模糊等问题。相比于各向同性的滤波方法, 各向异性滤波方法的鲁棒性更强, 对强噪声, 复杂噪声效果大幅度提升。但是由于高频噪声和高频细节都属于高频信号, 各向异性方法无法从根本上区分两者, 只能靠曲率或者法向间接判断, 在噪声密度较高的情况下, 精细纹理仍易模糊。为了更好地还原网格的尖锐特征, Fleishman 等人[3]先对网格的面片法向进行双边滤波处理, 再根据滤波后的面片法向来更新顶点位置。尽管这类方法已经极力保留模型的几何特征, 但是还是无法完美地区分微小特征和强噪声, 可能导致细微纹理丢失, 且对选择的参数敏感, 不同模型需要手动调整。致细微纹理丢失, 且对选择的参数敏感, 不同模型需要手动调整。近期, 张等[4]针对传统双边滤波在三角网格去噪中尺度参数人工配置难、对非均匀采样、强噪鲁棒性差的核心问题, 提出了基于自适应尺度参数的保特征双边滤波框架, 设计了自适应局部和全局两种滤波器。但是该方法并没有对非高斯噪声的鲁棒性进行充分验证, 且计算效率在大规模网格场景下存在瓶颈。

变分去噪方法将去噪过程构建为一个优化问题, 旨在求解满足该优化目标的理想解。核心思想是构建包含保真项和正则项的能量泛函, 通过最小化泛函求解最优去噪解。该方法最早诞生于二维图像处理领域, 后逐步拓展至三角网格去噪, 其发展始终围绕“去噪保特征”的平衡、噪声鲁棒性提升、求解效率优化三大核心目标。Rudin、Osher、Fatemi 等人[5]首次提出非线性全变分去噪模型(POF 模型), 打破传统各向同性平滑滤波模糊边缘的缺陷, 开创了保边去噪的变分框架, 也是首个将稀疏性引入去噪的经典模型。He 和 Schaefer 在文献[6]将 ℓ_0 稀疏正则引入网格变分去噪, 将图像的 ℓ_0 梯度稀疏拓展至网格边基算子的 ℓ_0 稀疏, 通过对网格离散边基算子施加 ℓ_0 稀疏约束, 实现“特征区域算子非零, 平滑区域算子为 0”, 从根源上区分网格的特征与噪声。但是, ℓ_0 最小化是 NP 难问题, 求解计算耗时极高, 无法处理大规模网格。此外, ℓ_0 最小化对稀疏性的要求过于严苛, 容易拉平网格的平滑区域, 丢失弱特征。针对一阶变分模型的阶梯伪影缺陷, Liu [7]等提出了基于自适应尺度参数的双边网格去噪算法, 通过动态权重区分平滑区域与特征区域, Zhang 等人在文献[8]中提出 ℓ_1 正则的高阶法向滤波变分模型, 设计网格高阶法向微分算子, 并引入动态权重, 将一阶网格微分算子替换为高阶法向算子, 从根源上缓解平滑区域的阶梯伪影, 同时保留 ℓ_1 正则的保特征能力。但是在强噪声场景下, 会模糊尖锐特征, 鲁棒性不足, 且仅针对高斯噪声设计, 无法处理脉冲或者是混合噪声。

基于数据驱动的网络去噪是三维几何处理领域的革命性方向, 核心是通过机器学习从海量数据中学习“噪声 - 干净网格”的映射关系, 替代传统手工设计的滤波核或优化目标, 解决了传统方法对参数敏感、高频特征与噪声难以区分的痛点[3]。这类方法不再依赖人工设计的平滑算子或正则项, 而是通过训练数据隐式地学习噪声分布与几何特征的内在规律, 因此在处理强噪声、非均匀采样网格和复杂细节时展现出更强的鲁棒性与自适应性。目前主流的数据驱动网络去噪方法大致可分为两类: 一类是基于回归学习的方法, 另一类是基于深度学习的端到端方法, 例如文献[9]。早期的工作如 Wang 等人[10]提出的级联非线性回归模型, 首次将数据驱动思想引入网络去噪领域, 采用级联的非线性回归网络学习从噪声法向量到真实法向量的映射, 通过多阶段逐步修正噪声法向量, 再重建顶点位置, 为后续数据驱动方法的发展奠定了基础。随着深度学习技术的发展, 后续工作开始利用卷积神经网络、图卷积网络或点云网络直接处理网格数据, 实现端到端的去噪。例如, Zhang [11]等人提出的两阶段学习机制, 将去噪过程分为两个互补的阶段: 第一阶段学习从噪声网格到初步滤波网格的映射, 快速去除大部分噪声; 第二阶段学习从滤波网格到真实干净网格的几何细节恢复, 弥补第一阶段可能造成的细节丢失, 解决了单一网络难以兼顾去噪与细节保留的问题, 显著提升了复杂模型的细节还原度。此外, Zhou 等人在文献[12]中提出的基于深度特征嵌入的方法, 通过预训练的几何特征提取网络, 在保留多尺度细节的同时有效抑制了噪声; 而 Zhang 等人在文献[13]则提出了基于生成对抗网络的去噪框架, 通过对抗学习进一步提升了模型对

真实噪声的泛化能力。尽管数据驱动方法在去噪效果上取得了显著突破,但仍面临着可解释性差、泛化能力受限、对训练数据依赖度高等挑战。大多数方法依赖大规模合成数据进行训练,在真实噪声、非均匀拓扑和未见几何结构上的泛化性能仍有待提升;同时,如何设计轻量高效的网络结构以适配大规模网格数据,也是数据驱动方法在实际应用中需要解决的关键问题。

综上,上述所提及的网格去噪方法均存在各自的局限性,本文通过构建一种全新的法向滤波模型,该模型包含三项核心内容:第一部分为自适应高阶正则化项,其中 ω 为自适应权重,启用 ℓ_p 非凸正则化,旨在去噪过程中保留精细细节同时抑制阶梯伪影的产生,启用 ℓ_1 正则化,旨在去噪的同时保留模型的尖锐特征。第二部分为不连续定位项,用 β 控制不连续边长度惩罚,通过自适应权重场 v 实现边函数的扩散,精准标记特征边,避免出现无明确特征定位导致的高噪声情况下模型出现特征模糊的情况;第三部分为抗噪保真项,通过 α 控制法向拟合度,采用 ℓ_1 范数,解决Liu等人的模型中 ℓ_2 保真项对离群点敏感的缺陷。以上,本文的主要研究贡献总结如下:

新算法通过“高阶正则化 + 自适应不连续定位 + 抗噪保真项”的三层融合,实现高、中、低噪声全场景适配;尖锐特征 + 精细细节 + 平滑区域同步优化,且对高斯、脉冲、混合噪声均表现出良好鲁棒性。然后模型通过“双阶段交替优化”,兼顾了计算效率与精度。本文的模型在合成网格以及由激光扫描仪和Kinect传感器采集各类扫描数据上,均验证了本文的模型去噪的效果。实验结果表明,本文的滤波模型无论是在视觉效果上还是定量指标上均优于当前典型或主流的方法。

本文后续内容结构安排如下:第二部分提出一种新的高阶法向滤波模型,并通过交替最小化与增广拉格朗日双阶段交替优化求解该模型;第三部分根据滤波后的面法向完成网格顶点位置的重构;第四部分将本文所提出的高阶法向滤波模型与以往典型的去噪方法和当前主流的去噪方法进行视觉效果和定量指标的对比分析;第五部分对全文进行总结。

3. 高阶法向滤波

本节主要探讨高阶法向滤波模型。在此之前,我们先简单介绍三角网格的相关定义。在三维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中,三角网格用 $\mathcal{M}=(\mathcal{V},\mathcal{E},\mathcal{T})$ 表示,其中 $\mathcal{V}=\{p_1,p_2,\dots,p_V\}$ 为顶点集合, $\mathcal{E}=\{e_1,e_2,\dots,e_E\}$ 为边集合, $\mathcal{T}=\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_T\}$ 为三角面片集合。

对于给定的含噪网格,我们将原始输入的含噪面片法向记作 $\tilde{N}$,为了消除 $\tilde{N}$ 中的噪声,我们将 N 记作待优化的面片法向场。那么新模型的总能量函数 $E(N,v)$ 由四部分构成,通过加权系数 γ,β,α 平衡各部分能量,具体公式如下:

$$\min_{N \in C_N, v \in V} \gamma \sum_l \text{len}(l) \cdot v_e^2 \cdot \left[\omega \cdot \|\nabla^2 N\|_l + (1-\omega) \cdot \|\nabla^2 N\|_l \right] + \beta \left(\epsilon \|\nabla_E v\|_w^2 + \frac{\|v-1\|_v^2}{4\epsilon} \right) + \alpha \sum_\tau \text{area}(\tau) \cdot \|N_\tau - \tilde{N}_\tau\| \quad (1)$$

其中 $C_N = \{N \in \mathbb{R}^{3 \times T} \mid \|N_\tau\| = 1, \forall \tau\}$ 为约束集合,强制每个面片的法向量必须为单位向量,确保几何方向的一致性。

γ 为正则化参数, $\text{len}(l)$ 表示连接三角形面片 τ 的重心与其任一顶点的线段的长度, $\omega \in [0,1]$ 为自适应权重,其中 ω 的计算方式为:

$$\omega = \exp \left(-\frac{\sigma}{\sigma_0} \cdot \frac{\|\nabla_M N\|_v}{\max(\|\nabla_M N\|_v)} \right) \quad (2)$$

其中 σ_0 为基准噪声强度。当 $\omega \rightarrow 1$ 时启用 ℓ_p 非凸正则化, 利用其非凸的特性最大化保留精细细节, 且抑制平滑区域产生阶梯伪影, 当 $\omega \rightarrow 0$ 时, 启用 ℓ_1 正则化。利用其鲁棒性, 抑制大梯度突变, 保护尖锐特征。 ω 可以根据局部噪声强度和法向梯度自动调节正则化类型, 实现动态自适应。 v_e^2 为特征定位加权, 由边函数 v 提供权重, 在特征边缘处, 权重趋近于 0, 直接停止正则化, 防止特征被平滑, 在平滑区域处, 权重最大化, 算法将全力去噪。二阶微分算子 $\nabla^2 N$ 作用于每条边上, 其表达式为:

$$\nabla^2 N|_l = \sum_{\tau \in N(l)} w_{\tau,l} N_\tau - N_{\tau_1} - N_{\tau_2} \quad (3)$$

其中 τ_1, τ_2 为两个相邻的面片, N_{τ_1}, N_{τ_2} 分别为两个相邻面片的单位法向。上述所有的定义的几何关系均在图中有标注。有关更多的高阶微分算子 $\nabla^2 N$ 的详细描述, 感兴趣的读者可参考文献[1]和[14]。

本文所提出的高阶法向滤波模型主要由自适应高阶正则化项, MS 间断函数正则化项和抗噪 ℓ_1 保真项这三项构成。其中 ℓ_p 正则化跟高阶算子配合, 能够使求解结果保持平滑的同时, 最大程度地保留几何特征, 实现高质量去噪。由于 ℓ_p 正则化具有非凸特性, 相较于 ℓ_1 和 ℓ_2 正则化, 它的稀疏性更强, 对噪声强压制的同时, 能够对真实特征几乎不影响。这说明选择非凸正则项能够取得更理想的效果, 且非凸正则项因具有强稀疏诱导性、优异的特征保持能力、对噪声与异常值鲁棒等特性, 已经在图像处理领域得到了广泛的应用[15]。传统的 ℓ_2 保真项当搭配非凸正则项如 ℓ_p 时, ℓ_2 保真项的二次平滑性会与非凸正则的尖锐性产生冲突, 导致优化陷入局部极小值, 难以收敛到高质量解。总所周知, ℓ_1 保真项最早在文献[16]提出, 主要用于处理异常值和脉冲噪声。所以本文将 ℓ_1 保真项加入到模型当中, 旨在更好地保留尖锐边缘和几何特征, 避免出现“阶梯效应”的情况。

4. 所提模型的数值求解算法

由于本文的模型中采用的是 ℓ_p 正则项, 因此模型具有非凸且非光滑的特性, 难以直接对其进行求解。根据戴等人在文献[17]中所提出的迭代重加权 ℓ_1 最小化算法(IRL1), 将原来非凸问题转化成一系列可解的加权 ℓ_1 凸问题, 是求解稀疏恢复问题的核心凸近似方法。

由于变量 N 和 v 耦合, 本文采用交替优化的策略, 即固定一个变量, 求解另一个变量, 迭代直至收敛。

首先选择固定 v , 求解 N , 此时的目标简化为:

$$\min_{N \in C_N} \gamma \sum_l \text{len}(l) \cdot v_e^2 \cdot \left[\omega \cdot \|\nabla^2 N|_l\|_p + (1-\omega) \cdot \|\nabla^2 N|_l\|_1 \right] + \alpha \sum_\tau \text{area}(\tau) \cdot \|N_\tau - \tilde{N}_\tau\|_1 \quad (4)$$

由于 ℓ_p 非凸的特性, 采用迭代重加权将 ℓ_p 转化为加权 ℓ_1 :

$$\|\nabla^2 N|_l\|_p^p \approx \sum_i w_{l,i}^{(k)} \|\nabla^2 N|_{l,i}\|_1 \quad (5)$$

其中

$$w_{l,i}^{(k)} = \frac{p}{\left(\|\nabla^2 N^{(k)}|_{l,i}\|^2 + \delta \right)^{\frac{2-p}{2}}} \quad (6)$$

则原模型中的混合正则变为了加权 ℓ_1 形式:

$$\sum_l \text{len}(l) \cdot v_e^2 \cdot \left[\omega \cdot w_l^{(k)} \|\nabla^2 N|_l\|_1 + (1-\omega) \cdot \|\nabla^2 N|_l\|_1 \right] \quad (7)$$

但是由于上式中存在 ℓ_1 范数, ℓ_1 范数不可导在 0 点不可导, 无法直接用梯度下降等基于导数的方法

求解。所以本文引入增广拉格朗日(ALM)和 ADMM 求解子问题。

引入辅助变量:

$$G = \nabla^2 N, D = N - \tilde{N} \quad (8)$$

得到带约束的优化问题, 形式化如下:

$$\min_{N, G, D} \gamma \sum_l \text{len}(l) v_e^2 \tilde{w}_l \|G_l\|_1 + \alpha \sum_{\tau} \text{area}(\tau) \|D_{\tau}\|_1 \quad (9)$$

随后我们引入增广拉格朗日以求解上述优化问题:

$$\begin{aligned} L(N, G, D; \lambda_1, \lambda_2) = & \gamma \sum_l \text{len}(l) v_e^2 \tilde{w}_l \|G_l\|_1 + \alpha \sum_{\tau} \text{area}(\tau) \|D_{\tau}\|_1 \\ & + \langle \lambda_1, G - \nabla^2 N \rangle + \frac{\rho_1}{2} \|G - \nabla^2 N\|_F^2 \\ & + \langle \lambda_2, D - (N - \tilde{N}) \rangle + \frac{\rho_2}{2} \|D - (N - \tilde{N})\|_F^2 \end{aligned} \quad (10)$$

其中 λ_1, λ_2 为拉格朗日乘子, $\rho_1, \rho_2 > 0$ 为惩罚参数。那么引入增广拉格朗日后将上式拆分为三个子问题: N 子问题, G 子问题, D 子问题。

关于 N 的子最小化问题: 在 ADMM 增广拉格朗日 $\mathcal{L}$ 中, 仅保留含 N 的二次项:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N = & \langle \lambda_1, G - \nabla^2 N \rangle + \frac{\rho_1}{2} \|G - \nabla^2 N\|_F^2 \\ & + \langle \lambda_2, D - (N - \tilde{N}) \rangle + \frac{\rho_2}{2} \|D - (N - \tilde{N})\|_F^2 \end{aligned} \quad (11)$$

然后对 N 用求梯度并置于零, 得到:

$$\begin{aligned} \nabla_N \mathcal{L} = & -\rho_1 (\nabla^2)^* \left(G - \nabla^2 N + \frac{\lambda_1}{\rho_1} \right) - \rho_2 \left(D - (N - \tilde{N}) + \frac{\lambda_2}{\rho_2} \right) = 0 \\ \Rightarrow & \rho_1 (\nabla^2)^* \nabla^2 N + \rho_2 N = \rho_1 (\nabla^2)^* \left(G + \frac{\lambda_1}{\rho_1} \right) + \rho_2 \left(\tilde{N} + D + \frac{\lambda_2}{\rho_2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

其中, $(\nabla^2)^*$ 是 ∇^2 的伴随算子。令:

$$\zeta_1 = G + \frac{\lambda_1}{\rho_1}, \zeta_2 = \tilde{N} + D + \frac{\lambda_2}{\rho_2} \quad (13)$$

则线性系统为:

$$\left(\rho_1 (\nabla^2)^* \nabla^2 + \rho_2 I \right) N = \rho_1 (\nabla^2)^* \zeta_1 + \rho_2 \zeta_2 \quad (14)$$

这是一个对称正定稀疏线性系统, 可通过共轭梯度法(CG)稀疏线性代数库求解。求解后需将 N 的每列投影到单位球面。

关于 G 的子最小化问题, 在交替方向乘子法(ADMM)框架下, 当固定法向 N , 辅助变量 D 及拉格朗日乘子 λ_1, λ_2 时, 增广拉格朗日函数中仅保留与辅助变量 G 相关的变量, 得到子问题目标函数:

$$\mathcal{L}_G(G) = \gamma \sum_l \text{len}(l) v_e^2 \tilde{w}_l \|G_l\|_1 + \langle \lambda_1, G - \nabla^2 N \rangle + \frac{\rho_1}{2} \|G - \nabla^2 N\|_F^2 \quad (15)$$

其中 $\gamma > 0$ 为正则化权重, v_e 为自适应边权重, $\tilde{w}_l$ 为迭代重加权得到的权重系数, ρ_1 为 ADMM 惩罚参数, λ_1 为对应约束 $G = \nabla^2 N$ 的拉格朗日乘子。

在固定当前迭代的法向 N 、辅助变量 G ，以及拉格朗日乘子 λ_1, λ_2 后，我们对增广拉格朗日函数中，仅含 D 的项进行最小化。首先，提取增广拉格朗日函数中与 D 相关的部分：

$$\mathcal{L}_D(D) = \alpha \sum_{\tau} \text{area}(\tau) \|D_{\tau}\|_1 + \left\langle \lambda_2, D - (N - \tilde{N}) \right\rangle + \frac{\rho_2}{2} \|D - (N - \tilde{N})\|_F^2 \quad (16)$$

通过配方法将其整理为逐面片独立的形式：

$$\mathcal{L}_D(D) = \sum_{\tau} \left[\alpha \text{area}(\tau) \|D_{\tau}\|_1 + \frac{\rho_2}{2} \left\| D_{\tau} - \left((N_{\tau} - \tilde{N}_{\tau}) - \frac{\lambda_{2,\tau}}{\rho_2} \right) \right\|^2 \right] \quad (17)$$

可以看出，该目标函数可分解为每个面片 τ 上的独立子问题，因此可逐面片求解最小值，这是一个典型的 ℓ_1 范数正则化的二次最小化问题，其闭式解由 Combettes 等人在文献[18]提出的软阈值算子得到。

本文通过求解高阶法向滤波模式后的面片法向

需要更新网格的顶点位置，以与滤波后的面片法向相匹配。顶点更新就是求解带约束的最小二乘问题，让重构顶点尽可能满足所有法向约束，同时保持网格的拓扑与体积。为此，本文采用的是 Liu [7] 等人提出的顶点更新方案。该方案是网格去噪中最常用的顶点重构方法，核心分为两步：

第一步，对每个顶点 v ，收集其邻接面 $\{\tau \in \mathcal{N}(v)\}$ ，然后建立线性约束

$$\sum_{\tau \in \mathcal{N}(v)} w_{\tau} \cdot ((u - v) \cdot N_{\tau})^2 \rightarrow \min \quad (18)$$

其中， u 为顶点 v 的待更新位置。

第二步，为避免单纯的法向约束导致的体积收缩或网格扭曲，本文将额外加入位置保真项和拉普拉斯正则项，然后将所有约束项合并为稀疏线性系统：

$$\left(\sum_{\tau} w_{\tau} (N_{\tau} N_{\tau}^T) + \lambda I + \mu L^T L \right) u = \sum_{\tau} w_{\tau} (N_{\tau} N_{\tau}^T) v_0 + \lambda v_0 + \mu L^T L v_0 \quad (19)$$

其中系数矩阵 A 是对称正定的，可通过共轭梯度法高效求解。求解后得到新顶点位置 u^* 。

等式的左边由法向约束项、位置保真项、拉普拉斯正则项三项构成。法向约束项 $\sum_{\tau} w_{\tau} (N_{\tau} N_{\tau}^T)$ 对每个面 τ ，定义投影矩阵 $P_{\tau} = I - N_{\tau} N_{\tau}^T$ ，而法向约束的最小二乘形式为：

$$\sum_{\tau} w_{\tau} \|P_{\tau} (u - v_0)\|^2 = u^T \left(\sum_{\tau} w_{\tau} (I - N_{\tau} N_{\tau}^T) \right) u - 2u^T \left(\sum_{\tau} w_{\tau} (I - N_{\tau} N_{\tau}^T) \right) v_0 + \text{常数}$$

对上式展开后，与 u 有关的二次项就是 $-\sum_{\tau} w_{\tau} (N_{\tau} N_{\tau}^T)$ ，因此在目标函数最小化时，会被整理为线性系统中的 $\sum_{\tau} w_{\tau} (N_{\tau} N_{\tau}^T)$ 项，其中权重 w_{τ} 通常取面积 $\text{area}(\tau)$ 。位置保真项 λI 作用是防止顶点过度漂移，保持网格的整体形状和体积。拉普拉斯正则项旨在让新顶点与邻域的相对位置和原始网格一致。

4.1. 实验结果与对比分析

本节内容在数几种三角网格上展开去噪实验，实验对象包括 CAD 网格，非 CAD 网格以及由激光扫描仪和 Kinect 传感器采集的原始数据。本节实验所用的网格均被合成噪声或真实扫描噪声所污染。我们采用均方误差，平均角度差和去噪时间作为实验效果的评定指标，以验证本文方法对网格质量的鲁棒性。

本节所测试的干净网格如图 1 所示。本节先讨论算法中参数的取值对去噪效果的影响，随后给出本文方法与当前主流方法的实验对比效果和定量指标的对比结果。

众所周知，每种网格去噪方法都需要手动调节参数以达到理想的去噪效果。本文方法包含 4 个参数： γ 、 β 、 α 和 p 。其中 γ 为正则化项的权重系数，用于控制算法的整体去噪强度，面对高噪声场景，可将

γ 值调大以强化去噪。针对低噪声网格, 可减小 γ 的取值以保留细节。 β 为自适应权重场正则化系数用于约束权重场的空间平滑性, 进而调控特征区域的范围与锐度。 α 为数据保真项权重系数, 用于平衡算法的去噪平滑能力与原始几何结构的保真度, α 越大数据保真项的主导性越强, 算法越严格约束 N 贴近 $\tilde{N}$, 避免过度平滑导致的细节丢失; α 越小, 正则化项的主导性越强, 去噪平滑效果越显著, 但易出现特征模糊。



Figure 1. The clean meshes tested in Section 4, from top-left to bottom-right, are Block, Bunny, Fandisk, Angle, octa-flower, and Armadillo

图 1. 第四节所测试的干净网格, 从左上到右下依次为 Block, Bunny, Fandisk, Angle, octa-flower, Armadillo

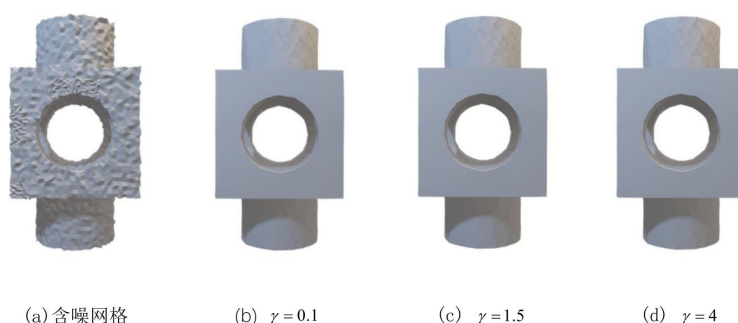


Figure 2. Denoising results of the Block model with different values of γ parameter
图 2. Block 模型在不同参数 γ 取值下的去噪结果

为验证自适应高阶正则项权重 γ 对去噪结果的影响, 本文以 Block 模型为测试对象, 在固定其他参数的前提下, 选取如图 2 所示的三个值进行比对实验, 从实验结果可以看出, γ 的取值对模型的平滑能力与特征保留能力具有显著影响: 当 γ 值过小, 正则化的约束强度不足, 模型对噪声的抑制能力较弱。当 γ 值过大, 正则化强度过高, 模型对曲面进行了过度的平滑。

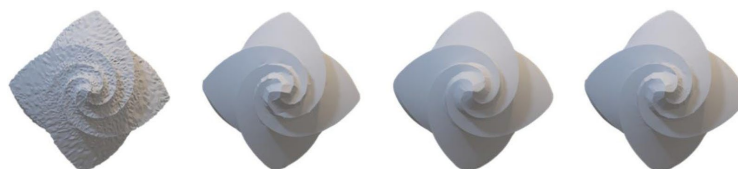


Figure 3. Denoising results of the octa-flower model under different values of parameter β , from left to right: noisy model, $\beta = 0.1$, $\beta = 1$, $\beta = 3$

图 3. octa-flower 模型在不同参数 β 取值下的去噪结果, 从左至右依次为: 含噪模型, $\beta = 0.1$, $\beta = 1$, $\beta = 3$

β 是对动态权重变量 $\mathbf{v}$ 进行约束, 如果没有这个约束, 优化过程中 $\mathbf{v}$ 可能会无规律的变化。如图 3 可以看出来, 当 β 的取值过小时, 网络的噪声无法完全的去除, 随着 β 的取值越来越大, 去噪的效果明显提升, 但 β 取值过大时, 可以看到, 网格出现过度平滑, 产生阶梯伪影。

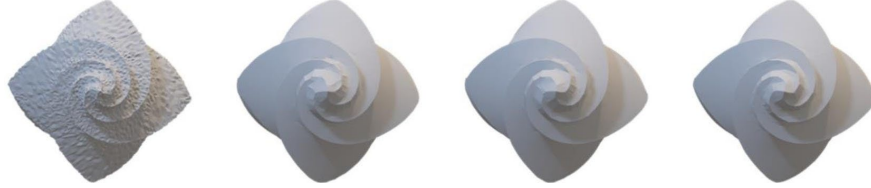


Figure 4. Denoising results of the octa-flower model under different values of parameter α , from left to right: noisy model, $\alpha = 50$, $\alpha = 100$, $\alpha = 300$

图 4. octa-flower 模型在不同参数 α 取值下的去噪结果, 从左至右依次为: 含噪模型, $\alpha = 50$, $\alpha = 100$, $\alpha = 300$

为验证抗噪保真项的权重系数 α 对去噪效果的影响, 本文以 octa-flower 模型为测试对象, 在固定其他参数的前提下, 选取如图 4 的三个值进行比对实验, 从实验结果可以看出, α 取值过小, 模型过度依赖正则化项, 导致曲面被过度平滑, α 取值过大, 正则化项的作用被抑制, 导致噪声无法被完全去除。

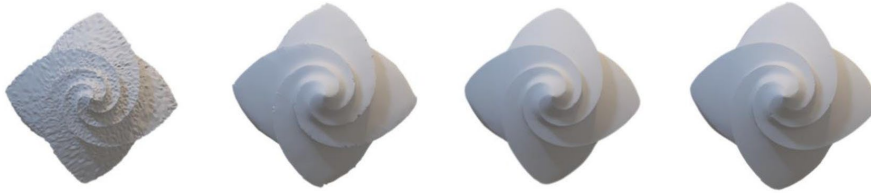


Figure 5. Denoising results of the octa-flower model under different values of parameter p , from left to right: noisy model, $p = 0.1$, $p = 0.5$, $p = 0.9$

图 5. octa-flower 模型在不同参数 p 取值下的去噪结果, 从左至右依次为: 含噪模型, $p = 0.1$, $p = 0.5$, $p = 0.9$

从图 5 的实验结果可以看出, p 的取值对模型的噪声鲁棒性与特征保持能力具有显著的影响: 当 p 取值过小时正则项趋于 ℓ_0 范数, 具有较强的稀疏约束特性, 模型倾向于仅保留少数非零梯度, 导致曲面被过度平滑, 螺旋结构的细节被严重模糊。当 p 值过大时, 稀疏强度明显减弱, 对噪声异常值的鲁棒性减弱。此时正则项无法充分抑制高频噪声分量, 导致去噪后的曲面仍残留细微的噪声痕迹。

本文在多种表面上测试了所提出的网格去噪方法, 包括计算机辅助设计(CAD)模型, 非 CAD 模型, 以及由激光扫描仪和 Kinect 传感器采集的真实扫描网格。所测试的网格均被合成噪声或原始噪声所污染。合成噪声沿随机方向添加, 由零均值高斯函数生成, 其标准差(σ)与平均边长($\bar{l}_e$)成正比。我们将本文提出的网格去噪方法与当前主流方法比对, 包括双边法向滤波[4], 全变分法向滤波[8], ℓ_0 最小化[6], 引导法向滤波[19], 高阶法向滤波[7] (分别简称为 BNF、TV、 ℓ_0 、GNF、HO)



Figure 6. Comparison of denoising results for CAD mesh models (the models are corrupted by Gaussian noise with a standard deviation of 0.3 times the average edge length). From left to right: our method, BNF [4], TV [8], ℓ_0 [6], GNF [19], HO [7]

图 6. CAD 网格模型的去噪结果比对(模型被标准差为 0.3 倍平均边长的高斯噪声污染)。从左至右依次为: 本文方法, BNF [4], TV [8], ℓ_0 [6], GNF [19], HO [7]

在图 6 当中, 我们展示并比对了同时包含尖锐特征和平滑区域的 CAD 网格的去噪结果。可以看到除双边法向滤波(BNF)以外, 其余五种方法均能在一定程度上保留尖锐特征, 本文的方法在 CAD 模型上展现出最优的综合性能: 在有效去除高斯噪声的同时, 完整地保留了模型的尖锐棱角与平滑过渡区域, 去噪后曲面光滑连续, 无明显伪影。



Figure 7. Comparison of denoising results for non-CAD mesh models (the models are corrupted by Gaussian noise with a standard deviation of 0.3 times the average edge length). From left to right: our method, BNF [4], TV [8], ℓ_0 [6], GNF [19], HO [7]

图 7. 非 CAD 网格模型的去噪结果比对(模型被标准差为 0.3 倍平均边长的高斯噪声污染)。从左至右依次为: 本文方法, BNF [4], TV [8], ℓ_0 [6], GNF [19], HO [7]

在图 7 当中, 我们展示了非 CAD 网格的比对结果。我们可以看到所有的测试方法都能有效地去除噪声。但是 TV 和 ℓ_0 基于分数段假设, 在处理连续曲面时会引入严重的阶梯效应, 使原本光滑的曲面呈现出不自然的块状结构。本文方法在去除噪声的同时, 完整保留了 Bunny 模型的耳朵轮廓、身体曲线等连续曲面特征, 去噪后的曲面光滑, 没有出现阶梯效应与褶皱伪影。综上所述, 实验结果表明本文的方法在非 CAD 网格也能得到良好的去噪效果。



Figure 8. Denoising results for scan data captured by the Kinect sensor. From left to right: our method, BNF [4], TV [8], ℓ_0 [6], GNF [19], HO [7]

图 8. Kinect 传感器采集的扫描数据去噪结果。从左至右依次为: 本文方法, BNF [4], TV [8], ℓ_0 [6], GNF [19], HO [7]

在图 8 中, 我们展示了由激光扫描仪采集的网格的去噪结果比对。可以看出本文的方法在不同的噪声场景下的去噪效果, 可以看出, 当噪声水平小于特征尺寸的时候, 本文的方法能够完好地保留尖锐特征。但是, 如果噪声水平过高, 本文的方法无法在去除噪声的同时并保持尖锐特征。

上述视觉对比结果表明, 我们所提出的去噪方法在所有测试方法中取得了最优的去噪效果。接下来的小结中, 我们将对本文方法与另外五种方法进行定量对比。

4.2. 定量对比

除上述定性视觉对比外, 为对所提模型进行客观、全面的性能评估, 本小节开展定量评估实验。对于已知真实几何结构的网格, 采用网格去噪领域广泛使用的两项误差指标: 均方角误差(MSAE)和基于顶点的 ℓ_2 面到面误差 $E_{v,2}$ 。这两种误差指标定义如下:

$$\text{MSAE} = \text{average}(\angle(\mathbf{N}', \mathbf{N})^2)$$

MSAE 用于衡量去噪网格与真实网格之间法向量场的一致性, 直接反映几何结构的恢复精度, 其中, $\angle(\mathbf{N}', \mathbf{N})$ 表示去噪后面片法向量 $\mathbf{N}'$ 与对应干净面片法向量 $\mathbf{N}$ 之间的夹角, $\text{average}(\cdot)$ 为所有面片的夹角

平方取平均值。MSAE 值越低, 代表法向量场恢复越精准, 对应去噪性能越优、特征保持越完整。

$E_{v,2}$ 用于量化去噪后顶点位置与干净曲面之间的空间几何偏差, 评估去噪方法的整体形状恢复精度, 其定义为:

$$E_{v,2} = \sqrt{\frac{1}{3 \sum_{\tau} \text{area}(\tau)} \sum_{i=0}^{V-1} \left(\sum_{M_1(v_i)} \text{area}(\tau) \right) \text{dist}(v'_i, M)^2}$$

其中, $\text{dist}(v'_i, M)$ 为去噪网格更新后的顶点 v'_i 到干净参考曲面 M 的最短欧氏距离, $M_1(v_i)$ 为干净网格中顶点 v_i 关联的三角面片集合, $\text{area}(\tau)$ 为面片 τ 的面积, V 为网格总顶点数。 $E_{v,2}$ 值越低, 代表与真实几何的空间偏差越小, 验证了方法在恢复原始网格形状上的有效性。

Table 1. Quantitative evaluation results of all tested methods in Figures 6~8, which include: our method, BNF [4], TV [8], ℓ_0 [6], GNF [19], HO [7]

表 1. 图 6, 图 7 与图 8 中所有测试方法的定量评价结果, 其中包含: 本文方法, BNF [4], TV [8], ℓ_0 [6], GNF [19], HO [7]

MSAE ($\times 10^{-3}$), $E_{v,2}$ ($\times 10^{-3}$); Time (in Seconds)						
Meshe	BNF	TV	ℓ_0	GNF	HO	our
Fandisk	5.31, 3.14; 2.04	4.13, 1.91; 1.68	5.09, 3.38; 20.1	3.51, 2.87; 4.03	4.88, 2.39; 1.18	2.67, 1.76; 5.42
Bunny	16.3, 2.02; 11.8	49.1, 4.32, 9.5	51.1, 7.16; 20.3	6.59, 2.78; 18.4	38.4, 4.15; 28.6	5.56, 1.87, 22.6
Angle	33.9, 0.99; 2.32	40.5, 1.16; 6.72	99.1, 2.01; 47.4	30.7, 1.19; 15.4	31.5, 1.23; 11.8	25.7, 1.63; 18.7

从表 1 可以看出无论是 CAD 网格还是非 CAD 网格, 本文的方法在 MASE 和 $E_{v,2}$ 数值上显著低于其他比对的方法。这些定量评估结果表明, 本文所提出的方法优于其他主流的算法, 充分体现了本文方法的优越性。我们在表 1 同时记录了所有测试方法的耗时, 可以看出, 本文方法的计算时间虽然略高于 BNF 和 TV 等轻量级方法, 但明显快于 ℓ_0 方法, 且与 GNF 和 HO 相比处于可接受范围。综合精度与效率两方面, 本文方法在去噪性能与计算成本之间取得了良好的平衡, 验证了其在实际应用中的有效性与实用性。

5. 结论

本文针对三角网格去噪中噪声去除与特征保留难以兼顾、复杂噪声鲁棒性不足的核心问题, 提出了变分网格去噪模型。该模型以法向量场二阶差分的 L_p - L_1 混合正则化为核心, 引入自适应顶点权重场 v 实现特征区域与平滑区域的差异化平滑; 通过 Moreau-Yosida 正则化约束权重场的空间平滑性, 结合 ℓ_1 数据保真项强化对异常值的鲁棒性, 构建了完整的变分优化框架。实验结果表明, 所提方法在高斯噪声、脉冲噪声与混合噪声三类场景下, 均能有效去除网格噪声, 同时完整保留尖锐边、角等几何特征, 在 MSAE、 $E_{v,2}$ 等定量指标上显著优于传统滤波类、变分类方法, 且在 CAD 与非 CAD 扫描网格上均具备优异的通用性与鲁棒性, 可有效适配实际三维扫描数据的去噪需求。尽管所提模型取得了优异的去噪性能, 但仍存在一定局限性: 模型引入了自适应权重场的迭代优化过程, 相较于传统双边滤波等线性滤波方法, 计算复杂度更高, 在处理超大规模网格(百万级顶点)时, 运行时间较长, 实时性不足。针对上述局限性, 对未来的工作希望可以做到将所提变分模型与深度学习技术相结合, 利用数据驱动的方式学习最优正则化权重与噪声分布, 进一步提升极端强噪声场景下的去噪性能与特征保持能力, 拓展方法的应用场景。

基金项目

自治区自然科学基金(2021D01A125);

自治区高校科研计划基金(XJEDU2020Y027);
中央支持地方高校改革发展专项资金项目(新疆师范大学)。

参考文献

- [1] Bunge, A., Botsch, M. and Alexa, M. (2021) The Diamond Laplace for Polygonal and Polyhedral Meshes. *Computer Graphics Forum*, **40**, 217-230. <https://doi.org/10.1111/cgf.14369>
- [2] Selesnick, I.W., Parekh, A. and Bayram, I. (2015) Convex 1-D Total Variation Denoising with Non-Convex Regularization. *IEEE Signal Processing Letters*, **22**, 141-144. <https://doi.org/10.1109/lsp.2014.2349356>
- [3] Fleishman, S., Drori, I. and Cohen-Or, D. (2003) Bilateral Mesh Denoising. *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*, San Diego, 27-31 July 2003, 950-953. <https://doi.org/10.1145/1201775.882368>
- [4] Zheng, Y., Fu, H., Au, O.K. and Tai, C. (2011) Bilateral Normal Filtering for Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **17**, 1521-1530. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2010.264>
- [5] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **60**, 259-268. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-f](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-f)
- [6] He, L. and Schaefer, S. (2013) Mesh Denoising via L_0 Minimization. *ACM Transactions on Graphics*, **32**, 1-8. <https://doi.org/10.1145/2461912.2461965>
- [7] Liu, Z., Lai, R., Zhang, H. and Wu, C. (2019) Triangulated Surface Denoising Using High Order Regularization with Dynamic Weights. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **41**, B1-B26. <https://doi.org/10.1137/17m115743x>
- [8] Zhang, H., Wu, C., Zhang, J. and Deng, J. (2015) Variational Mesh Denoising Using Total Variation and Piecewise Constant Function Space. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **21**, 873-886. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2015.2398432>
- [9] Guo, Y., Liu, Y., Zhang, L.-X. and Xin, S. (2019) Neural Projection: Unsupervised Mesh Denoising with Deep Learning. *Proceedings ACM SIGGRAPH Asia*, New York, 17-20 November 2019, 1-12.
- [10] Wang, P.S., Liu, Y. and Tong, X. (2016) Mesh Denoising via Cascaded Normal Regression. *ACM Transactions on Graphics*, **35**, 232:1-232:12. <https://doi.org/10.1145/2980179.2980232>
- [11] Zhang, W., Deng, B., Zhang, J., Bouaziz, S. and Liu, L. (2015) Guided Mesh Normal Filtering. *Computer Graphics Forum*, **34**, 23-34. <https://doi.org/10.1111/cgf.12742>
- [12] Zhou, Y., Zhang, L., Liu, Y. and Xin, S. (2021) Deep Feature Embedding for Robust Mesh Denoising. *The IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 19-25 June 2021, 13245-13254.
- [13] Zhang, K., Li, G., Liu, X. and Bao, H. (2022) MeshDenoisingGAN: A Generative Adversarial Network for Robust Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Multimedia*, **25**, 3456-3469.
- [14] Liu, Z., Li, Y., Wang, W., Liu, L. and Chen, R. (2022) Mesh Total Generalized Variation for Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **28**, 4418-4433. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2021.3088118>
- [15] Sasaki, T., Hayase, K., Kitahara, M. and Ono, S. (2025) Sparse Regularization with Reverse Sorted Sum of Squares via an Unrolled Difference-of-Convex Approach. *IEEE Open Journal of Signal Processing*, **6**, 57-67. <https://doi.org/10.1109/ojsp.2025.3529312>
- [16] Nikolova, M. (2002) Minimizers of Cost-Functions Involving Nonsmooth Data-Fidelity Terms. Application to the Processing of Outliers. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **40**, 965-994. <https://doi.org/10.1137/s0036142901389165>
- [17] Candès, E.J., Wakin, M.B. and Boyd, S.P. (2008) Enhancing Sparsity by Reweighted ℓ_1 Minimization. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **14**, 877-905. <https://doi.org/10.1007/s00041-008-9045-x>
- [18] Combettes, P.L. and Pesquet, J.C. (2008) Proximal Thresholding Algorithm for Minimization over Orthonormal Bases. *SIAM Journal on Optimization*, **18**, 1351-1376. <https://doi.org/10.1137/060669498>
- [19] Yadav, S.K., Reitebuch, U. and Polthier, K. (2019) Robust and High Fidelity Mesh Denoising. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, **25**, 2304-2310. <https://doi.org/10.1109/tvcg.2018.2828818>