

PMC与MM*模型下交叉立方体的非包含 g 好邻诊断度

虞 丹, 吕盛梅*

青海民族大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2026年8月4日; 录用日期: 2026年9月4日; 发布日期: 2026年9月11日

摘 要

多处理器系统的故障诊断是保障系统稳定运行的核心技术。 g 好邻条件限制每个无故障顶点都与至少 g 个无故障顶点相邻, 非包含 g 好邻诊断度限制满足 g 好邻条件的故障集对互不包含。本文以 n 维交叉立方体 CQ_n 为研究对象, 证明了在PMC模型下当 $1 \leq g \leq n-3$ 时 CQ_n 的非包含 g 好邻诊断度上界为 $[2(n-g)+1]2^g - 1$, 当 $n-2 \leq g \leq n-1$ 时上界为 $2^{n-1} - 1$; 在PMC模型下当 $n \geq 4$ 时非包含1好邻诊断度为 $4n-7$ 。在MM*模型下当 $n \geq 4$ 时 CQ_n 的非包含1好邻诊断度为 $3n-5$ 。

关键词

交叉立方体, PMC模型, MM*模型, 非包含 g 好邻诊断度

The Non-Inclusive g -Good-Neighbor Diagnosability of Crossed Cubes under the PMC and MM* Models

Dan Yu, Shengmei Lyu*

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining Qinghai

Received: August 4, 2026; accepted: September 4, 2026; published: September 11, 2026

Abstract

Fault diagnosis is a core technology to guarantee the stable operation of multiprocessor systems.

*通讯作者。

文章引用: 虞丹, 吕盛梅. PMC 与 MM*模型下交叉立方体的非包含 g 好邻诊断度[J]. 计算机科学与应用, 2026, 16(9): 130-139. DOI: 10.12677/csa.2026.169295

The g -good-neighbor constraint requires every fault-free vertex to be adjacent to at least g fault-free vertices, while the non-inclusive constraint restricts that any pair of g -good-neighbor faulty sets cannot contain one another. This paper takes the n -dimensional crossed cube CQ_n as the research object. Under the PMC model, we prove that the upper bound of the non-inclusive g -good-neighbor diagnosability of CQ_n is $[2(n-g)+1]2^g - 1$ for $1 \leq g \leq n-3$, and the upper bound is $2^{n-1} - 1$ for $n-2 \leq g \leq n-1$. When $n \geq 4$, the non-inclusive g -good-neighbor diagnosability of CQ_n under the PMC model equals $4n-7$. Under the MM* model, the non-inclusive 1-good-neighbor diagnosability of CQ_n is $3n-5$ where $n \geq 4$.

Keywords

Crossed Hypercube, PMC Model, MM* Model, Non-Inclusive g -Good-Neighbor Diagnosability

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着计算机网络技术持续发展,大规模多处理器系统的运行可靠性受到广泛关注。通常情况下,通过对互连网络进行图论建模,可以将处理器抽象为简单无向图的顶点,通信链路抽象为图的边。多处理器系统故障诊断依靠节点间的相互关系定位故障节点,是评价网络容错能力的核心指标。1967年,Preparata等人首次提出PMC单向测试诊断模型,同时给出经典t可诊断定义,奠定了互连网络故障诊断的理论基础[1]。在PMC模型中,相邻节点可相互发起测试,通过测试结果完成故障节点定位。后续Sengupta与Dahbura提出改进后的比较诊断模型,即MM*模型,依靠节点对相邻两节点同时进行信号输出的结果对比完成故障节点定位,工程实用性更强[2]。这两类模型的工作机制与适用场景不同,但均为互连网络故障诊断领域的经典研究模型。Fan研究了比较诊断模型下交叉立方体的传统诊断度[3]。

传统无约束诊断假设故障可随机分布,但实际系统中单个节点所有邻点同时故障属于极低概率事件,因此有学者逐步引入受限故障约束。2005年,Lai等人提出条件诊断概念,要求任意顶点的邻点不能全部为故障点[4]。Zhou证明了在比较诊断模型下交叉立方体的条件诊断度[5]。Hong等人研究出增广立方体在比较诊断模型下的条件诊断度[6]。在此基础上,Peng等人进一步提出 g 好邻条件诊断度,限制每个非故障顶点至少拥有 g 个非故障邻点,该诊断度被广泛应用于各类正则互连网络的分析中[7]。针对 g 好邻诊断度相关问题,国内外学者开展了大量研究。Ye等人给出了 n 维交叉立方体的 g 好邻连通度,即删除后剩余子图最小度不低于 g 的顶点割所含顶点数的最小值,为后续 g 好邻条件诊断度的证明提供了关键引理[8]。Guo等人证明了交叉立方体在PMC与MM*模型下的 g 好邻条件诊断度[9]。Wang等人给出了MM*模型下的交换交叉立方体的 g 好邻条件诊断度[10]。Liu等人证明了PMC与MM*模型下扭结超立方的 g 好邻条件诊断度[11]。

在单一故障约束之外,非包含故障集约束成为近年来新的研究方向。实际故障检测场景下,两组故障集为包含关系的概率极小,实际研究价值有限,因此引入非包含故障约束,规定任意两组故障集不能相互包含[12]。2022年,Yuan等人正式提出非包含 g 好邻诊断度,并针对通用互连网络给出基础判定方法[13]。随后Tian等人进行了星图的非包含 g 好邻诊断度相关研究[14]。Zhang等人研究了 n 维立方体在

PMC 与 MM*模型下的非包含 g 好邻诊断度[15]。

交叉立方体 CQ_n 是 n 维立方体的变体, 继承递归构造与正则性的同时缩短了网络直径, 嵌入能力与容错性能更加优异[16]。现有文献仅针对标准 n 维立方体开展非包含 g 好邻诊断度研究, 尚无工作系统推导交叉立方体在非包含与 g 好邻双重限制下的诊断度, 且交叉立方体独特的交错邻接规则使得其非包含 g 好邻故障集的构造及诊断度上下界的推导远复杂于标准 n 维立方体, 研究存在挑战。本文首先推导 PMC 模型下交叉立方体 CQ_n 的非包含 g 好邻诊断度上界, 再证明 $g=1$ 时 CQ_n 的非包含 1 好邻诊断度, 之后完成 CQ_n 在 MM*模型下的 1 好邻条件诊断度推导, 再对特例 CQ_4 在 MM*模型下的非包含 1 好邻诊断度进行证明, 特例的得证使得 CQ_n 在 MM*模型下的非包含 1 好邻诊断度的适用范围从 $n \geq 5$ 拓展到 $n \geq 4$ 。

2. 准备工作

2.1. 基础图论概念

设图 $G=(V, E)$ 为一个无向简单图, 其中 V 为图 G 的顶点集, E 为图 G 的边集。

对任意顶点 $v \in V$, 记 $N_G(v)$ 为顶点 v 的邻域, 即与顶点 v 相邻的所有邻点的集合; 对图 G 的顶点子集 S , 定义顶点子集 S 的开邻域 $N(S) = (\bigcup_{v \in S} N_G(v)) - S$, 表示与 S 中的顶点相邻且不属于 S 的顶点集合。对图 G 的非空顶点子集 $V_1 \subset V$, 导出子图指保留子集 V_1 内所有顶 a 点以及顶点之间的全部连边。定义 $G-S$ 为在图 G 中删除顶点子集 S 得到的导出子图。对于图 G 中某一顶点 v , $d(v)$ 记作点 v 的度, 即与顶点 v 相连的边的条数。 $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度, 取 $d(v)$ 的最小值; $\Delta(G)$ 表示图 G 的最大度, 取 $d(v)$ 的最大值。定义 k 正则图, 若对图 G 中任意顶点 $v \in V$ 都有 $d(v) = \delta(G) = \Delta(G) = k$, 则称图 G 为 k 正则图。对故障集 F , 若任意的无故障顶点 $v \in V - F$, 都有至少 g 个无故障的邻点 $|N(v) \cap (V - F)| \geq g$ 。设 $F_1, F_2 \subset V$, 定义对称差 $F_1 \Delta F_2 = (F_1 - F_2) \cup (F_2 - F_1)$, 交集 $F_1 \cap F_2$, 并集 $F_1 \cup F_2$ 。非包含故障集指一组故障集对 F_1 和 F_2 互不包含, 满足 $F_1 \subsetneq F_2$ 且 $F_2 \subsetneq F_1$ 。定义公共无故障区域 $U = V - (F_1 \cup F_2)$ 。

2.2. 故障诊断模型与相关定义

经典故障诊断模型分为 PMC 模型和 MM*模型两类, 用以判断复杂网络中各节点是否故障。

在 PMC 模型中, 相邻节点之间可互相发起测试: 设相邻节点 u 为测试节点, v 为被测试节点, 测试结果记为 $\sigma(u, v)$; 若 u 无故障且 v 无故障, 则 $\sigma(u, v) = 0$; 若 u 无故障且 v 故障, 则 $\sigma(u, v) = 1$; 若测试节点 u 本身故障, 则测试结果不具备参考价值[1]。

在 MM*模型中, 引入比较器节点 w , 对相邻节点 u 和 v 同时发出信号做对比测试, 结果记为 $\sigma((u, v)_w)$; 若 w 无故障且被测试点 u 和 v 均无故障, 则记为 $\sigma((u, v)_w) = 0$; 若 w 无故障而 u 和 v 之中至少一个故障, 则记为 $\sigma((u, v)_w) = 1$; 若比较器 w 故障则结果无效。且该模型要求满足测试条件的节点组必须执行对比测试。

两类模型中, 所有测试结果构成症状 σ , σ 为边集 E 到 $(0,1)$ 的映射函数。

定义 1 (g 好邻故障集) [7] 设 $F \subseteq V$, 若 $\delta(G - F) \geq g$, 则称 F 为图 G 的 g 好邻故障集。

定义 2 (非包含 g 好邻诊断度) [13] 图 G 的任意一对互不包含的 g 好邻故障集 F_1, F_2 都是可区分的, 且满足 $|F_1| \leq t$, $|F_2| \leq t$, 则称图 G 是非包含 g 好邻可诊断的。取满足条件的最小整数 t 作为非包含 g 好邻诊断度, 记作 $t_{N_g}(G)$ 。

定义 3 (g 好邻割) [8] 设图 G 的顶点子集 F , 若 $G - F$ 不连通且满足删去集合 F 后剩余导出子图的每个顶点都有至少 g 个邻点, 即 $\delta(G - F) \geq g$, 则称 F 为 g 好邻割, 最小 g 好邻割的顶点数定义为 g 好邻连通度。

2.3. 交叉立方体及其性质

定义 4 (n 维交叉立方体 CQ_n) [16] 当 $n=1$ 时, CQ_1 为两点完全图 K_2 ; 当 $n \geq 2$ 时, CQ_n 由两个 $n-1$ 维子交叉立方体 CQ_{n-1}^0 与 CQ_{n-1}^1 以固定规则连接而成(如图 1)。

设顶点 $u = 0u_{n-2} \cdots u_0 \in CQ_{n-1}^0$, $v = 1v_{n-2} \cdots v_0 \in CQ_{n-1}^1$, 则顶点 u 与顶点 v 相邻当且仅当满足以下条件条件: (1) 当 n 为偶数时有 $u_{n-2} = v_{n-2}$; (2) 有 $(u_{2i+1}u_{2i}, v_{2i+1}v_{2i}) \in \{(00,00), (01,11), (11,01), (10,10)\}$, 其中 $0 \leq i < \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 。

CQ_n 的总顶点数为 2^n , 是 n 正则连通无三角形图, 其中任意一对相邻顶点无公共邻点, 任意一条边均包含于 4 圈中。

性质 1 [8] [17] 当 $0 \leq g \leq n-2$ 时, CQ_n 的 g 好邻连通度 $k^g(CQ_n) = (n-g)2^g$ 。

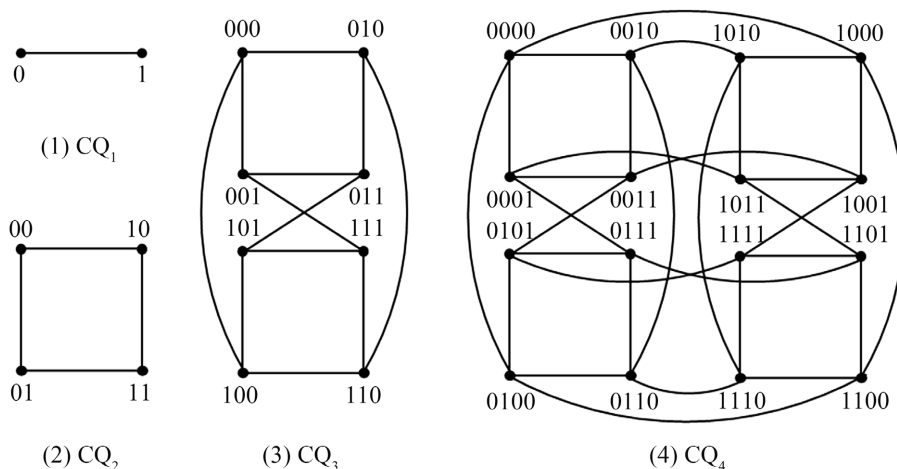


Figure 1. Crossed Cube CQ_n

图 1. 交叉立方体 CQ_n

3. PMC 模型下 CQ_n 的非包含 g 好邻诊断度

引理 1 [1] 设 F_1, F_2 为故障集。若存在 $u \in F_1 \Delta F_2$, $v \in V - (F_1 \cup F_2)$, $uv \in E$, 则故障集 F_1, F_2 在 PMC 模型下可区分。否则, F_1, F_2 不可区分(如图 2)。

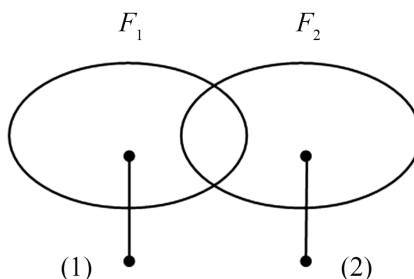


Figure 2. Distinguishability condition of fault sets under the PMC model

图 2. PMC 模型下故障集可区分条件

定理 1 设 $n \geq 4$, n 维交叉立方体 CQ_n 在 PMC 模型下的非包含 g 好邻诊断度上界为

$$t_{N_g}(CQ_n) \leq \begin{cases} [2(n-g)+1]2^g - 1, 0 \leq g \leq n-3 \\ 2^{n-1} - 1, n-2 \leq g \leq n-1 \end{cases}.$$

证明 当 $0 \leq g \leq n-3$ 时, 在 CQ_n 中选取两个顶点不交且彼此无边的 g 维子立方体 $A = 00 \cdots 0x_{n-g-1} \cdots x_0$ 和 $B = 00 \cdots 0x_{n-g-1} \cdots x_0$, 其中 $x_i \in \{0,1\}$, $i \in (0, n-g-1)$ 。由交叉立方体邻接规则可知 $A \cap B = \emptyset$ 且 A 与 B 之间无边相连。记 $D = N(A \cup B)$, 构造故障集 $F_1 = A \cup D$, $F_2 = B \cup D$ 。由于 A 和 B 均为 g 维交叉子立方体, 故 A 和 B 的顶点数 $|A| = |B| = 2^g$, 又由 CQ_n 的正则性得到 A 和 B 的开邻域所含顶点数即开邻域大小 $|N(A)| = |N(B)| = (n-g)2^g$, 又 $N(A) \cap N(B) = \emptyset$, 因此 $|D| = |N(A)| + |N(B)| = 2(n-g)2^g$, 进而 $|F_1| = |A| + |D| = 2^g + 2(n-g)2^g = [2(n-g)+1]2^g$, 显然 $|F_2| = |F_1|$ 。由构造形式可得 $F_1 - F_2 = A$, $F_2 - F_1 = B$, 对称差 $F_1 \Delta F_2 = A \cup B$, 且 $N(F_1 \Delta F_2) = D$ 。因为 A, B 均非空, 故 F_1, F_2 满足非包含故障对定义, 又 $D \subseteq F_1$ 且 $D \subseteq F_2$, 可得 $N(F_1 \Delta F_2) \subseteq F_1 \cup F_2$, 根据引理 1 可知该故障对在 PMC 模型下不可区分。任取顶点 $u \in V(CQ_n) - F_1$, 可知 u 与 A 之间无连边, 删除 A 不会改变 u 的邻接关系, 推得 $\delta(CQ_n - F_1) \geq g$, 即 F_1 为 g 好邻故障集。同理 F_2 也为 g 好邻故障集。由此区间 $0 \leq g \leq n-3$ 内有在 PMC 模型下顶点数为 $[2(n-g)+1]2^g$ 的非包含 g 好邻不可区分故障对, 故 $t_{N_g}(CQ_n) \leq [2(n-g)+1]2^g - 1$ 。

当 $n-2 \leq g \leq n-1$ 时, 令 $F_1 = \Gamma_0(CQ_n)$, $F_2 = \Gamma_1(CQ_n)$, 其中 $\Gamma_i(CQ_n)$ 表示以 i 开头的 $n-1$ 维子图, $i \in \{0,1\}$ 。此时 $|F_1| = |F_2| = 2^{n-1}$ 且故障集对 (F_1, F_2) 满足互不包含条件。因为 F_1, F_2 顶点不交, 同时 $F_1 \Delta F_2 = V(CQ_n)$, 所以 $N(F_1 \Delta F_2)$ 为空集, 自然满足 $N(F_1 \Delta F_2) \subseteq F_1 \cup F_2$, 故障对 (F_1, F_2) 不可区分。当 $g = n-2$ 时, $CQ_n - F_1 = \Gamma_1(CQ_n)$ 为 $n-1$ 正则图, $\delta(CQ_n - F_1) = n-1 \geq n-2$; 当 $g = n-1$ 时, $\delta(CQ_n - F_1) = n-1 = g$, 两种情况下故障集 F_1, F_2 均满足 g 好邻约束。因此该区间存在基数为 2^{n-1} 的合法不可区分故障对, 可得 $t_{N_g}(CQ_n) \leq 2^{n-1} - 1$ 。

综合两个区间推导, 定理得证。

定理 2 设整数 $n \geq 4$, n 维交叉立方体 CQ_n 在 PMC 模型下的非包含 1 好邻诊断度 $t_{N_1}(CQ_n) = 4n-7$ 。

证明 首先证明上界 $t_{N_1}(CQ_n) \leq 4n-7$ 。根据定义 4, 在 CQ_n 中任取一个 4 圈 $C_4 = v_1v_2v_3v_4v_1$, 满足 $v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1 \in E$ 。令 $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $D = N(S)$, CQ_n 中无三角形, 4 圈内部不存在其他连边。构造故障集 $F_1 = D \cup \{v_1, v_4\}$, $F_2 = D \cup \{v_2, v_3\}$, 将各顶点邻域拆分为圈内邻点与圈外邻点, 由 CQ_n 的正则性, v_1, v_2, v_3 和 v_4 共有 $4n$ 个邻点, 圈内邻点各 2 个共 8 个, 不计入开邻域中。计算得出 $|D| = |N(S)| = 4n-8$, 所以 $|F_1| = |F_2| = 4n-8+2 = 4n-6$ 。易知 $\{v_2, v_3\} \in F_2$ 但 $\{v_2, v_3\} \notin F_1$, $\{v_1, v_4\} \in F_1$ 但 $\{v_1, v_4\} \notin F_2$, 故障对互不包含。其余顶点邻接关系未被破坏, 得到 $\delta(CQ_n - F_1) \geq 1$, F_1 为 1 好邻故障集。同理可知, F_2 也是 1 好邻故障集。取对称差 $F_1 \Delta F_2 = S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, 可知 $N(S) \subseteq F_1 \cup F_2$, $F_1 \cup F_2$ 与 $CQ_n - F_1 \cup F_2$ 之间没有连边, 因此, 依据引理 1, 故障集对 (F_1, F_2) 在 PMC 模型下不可区分。令 $v \in CQ_n - F_1 \cup F_2$, v 为无故障点且点 v 的所有邻点都在 $CQ_n - F_1 \cup F_2$ 中, $\delta(CQ_n - F_1 \cup F_2) = n \geq 1$ 。分析子图 $CQ_n - F_1$ 的结构, 无故障顶点 v_2 与 v_3 互为邻点, F_1 满足 1 好邻条件。同理, F_2 为 1 好邻条件故障集。非包含的 1 好邻故障集对 (F_1, F_2) 是不可区分的, 因此 $t_{N_1}(CQ_n) \leq 4n-6-1 = 4n-7$ 。

再证明下界 $t_{N_1}(CQ_n) \geq 4n-7$ 。反证, 假设存在一组互不包含的 1 好邻故障集 F_1, F_2 , 满足 $|F_1| \leq 4n-7$, $|F_2| \leq 4n-7$ 且二者在 PMC 模型下不可区分。由不可区分性得 $N(F_1 \Delta F_2) \subseteq F_1 \cup F_2$, 结合 1 好邻故障集定义, $F_1 \cap F_2$ 为一个 1 好邻割。因为 F_1 和 F_2 是不可区分的, 为保持 F_1 和 F_2 的非包含 1 好邻性, 需要 $|F_1 - F_2| \geq 2$ 且 $|F_2 - F_1| \geq 2$, 即 $|F_1 \Delta F_2| \geq 4$ 。因此 $|F_1 \Delta F_2| \geq |N(F_1 \Delta F_2)| \geq 4n-8$, 矛盾。假设不成立, 所有

基数不超过 $4n-7$ 的互不包含 1 好邻故障集均可区分, 即 $t_{N_1}(CQ_n) \geq 4n-7$ 。

联立上下界, $t_{N_1}(CQ_n) = 4n-7$ 得证。

4. MM*模型下 CQ_n 的非包含 1 好邻诊断度

引理 2 [2] 设 F_1, F_2 为故障集。 F_1, F_2 可区分当且仅当以下其中一个条件成立(如图 3):

- (1) 存在 $w \in V - (F_1 \cup F_2)$, $\{u, v\} \in F_1 - F_2$, 使得 $\{uw, vw\} \in E$;
- (2) 存在 $w \in V - (F_1 \cup F_2)$, $\{u, v\} \in F_2 - F_1$, 使得 $\{uw, vw\} \in E$;
- (3) 存在 $\{u, v\} \in U$, $w \in F_1 \Delta F_2$, 使得 $\{uv, vw\} \in E$ 。

否则, F_1, F_2 不可区分。

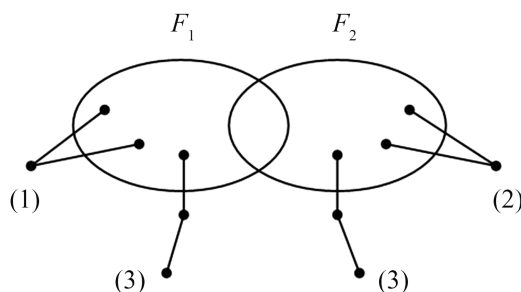


Figure 3. Distinguishability condition of fault sets under the MM* model
图 3. MM*模型下故障集可区分条件

定理 3 当 $n \geq 3$ 时, n 维交叉立方体 CQ_n 在 MM*模型下的非包含 1 好邻诊断度上界为 $3n-5$, 即 $t_{N_1}(CQ_n) \leq 3n-5$ 。

证明 为证上界, 在 CQ_n 中任取一条长度为 2 的 3 路 $v_1v_2v_3$, 令 $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, 满足 $v_1v_2 \in E$, $v_2v_3 \in E$, $v_1v_3 \notin E$, 记 $D = N(S)$ 。结合定义 1, CQ_n 是 n 正则图, 图中无三角形, 且 CQ_n 中任意两点至多有 2 个公共邻点, 因此 v_1 与 v_3 的公共邻点除 v_2 外至多还有 1 个, 所以 $3n-4 \leq |D| \leq 3n-5$ 。构造故障集 $F_1 = D \cup \{v_1\}$, $F_2 = D \cup \{v_3\}$, 计算得 $|F_1| = |F_2| = |D| + 1 \leq 3n-4$ 。因为 $v_3 \in F_2$ 且 $u \notin F_1$, $v_1 \in F_1$ 且 $v_1 \notin F_2$, v_2 为无故障点, 所以 F_1 和 F_2 满足 1 好邻条件, 均为 1 好邻故障集, 且故障对 (F_1, F_2) 互不包含。 $F_1 - F_2 = v_1$ 和 $F_2 - F_1 = v_3$ 均为单点集, 不满足 MM*模型下故障集对可区分的条件(1)和(2)。此时

$|F_1 \cap F_2| - |F_1| - 1 \geq 3n-4$, CQ_n 的 1 好邻连通度为 $2n-2$, 当 $n \geq 3$ 时 $3n-4 > 2n-2$, 故 $F_1 \cap F_2$ 是 CQ_n 的一个 1 好邻割, 又因为 $F_1 \Delta F_2$ 连通, 所以 $F_1 \Delta F_2$ 与 $CQ_n - F_1 \cup F_2$ 之间没有连边, 不满足 MM*模型下故障集对可区分的条件(3)。MM*模型下的可区分条件(1)(2)(3)均不满足, 故障对 (F_1, F_2) 不可区分, 故 $t_{N_1}(CQ_n) \leq 3n-5$ 。上界得证。

定理 4 4 维交叉立方体 CQ_4 在 MM*模型下的非包含 1 好邻诊断度是 7, 即 $t_{N_1}(CQ_4) = 7$ 。

证明 首先证明上界, $t_{N_1}(CQ_4) \leq 7$ 。由定理 3 可知, 当 $n=4$ 时 $3n-5=7$, 所以 $t_{N_1}(CQ_4) \leq 7$ 。

再证下界, $t_{N_1}(CQ_4) \geq 7$ 。即, 要证 CQ_4 是非包含 1 好邻 7 可诊断的。反证, 假设 CQ_4 不满足非包含 1 好邻 7 可诊断。即, CQ_4 中存在的两个互不包含的 1 好邻故障集 F_1 和 F_2 , 满足 $|F_1| \leq 7$, $|F_2| \leq 7$, 故障集对 (F_1, F_2) 不可区分。 $|F_1 - F_2| \geq 1$ 且 $|F_2 - F_1| \geq 1$, $|F_1 \cup F_2| = |F_1| + |F_2| - |F_1 \cap F_2| \leq |F_1| + |F_2| = 14$ 。而 CQ_4 的顶点数为 $2^4 = 16 > 14$, 所以 $V(CQ_4) \neq F_1 \cup F_2$ 。

断言 1 $CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 中无孤立点。

反证, 假设 $CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 中至少存在一个孤立点 w 。由于 F_2 是 1 好邻故障集, 故存在 $v_1 \in F_2 - F_1$, 使得 v_1 与 w 相邻。又因为故障集对 (F_1, F_2) 不可区分, 所以 $F_1 - F_2$ 中至多有一个点 v_1 , 使得 v_1 与 w 相邻。同理, $F_2 - F_1$ 中有且只有一个点 v_2 使得 v_2 与 w 相邻。令 W 为 $CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 中的所有孤立点作成的点集, H 为 $CQ_4 - F_1 \cup F_2 \cup W$ 的导出子图。对任意的 $w \in W$, $d(w) = 4$, 所以 $N(w) \cap (F_1 \cap F_2) = 2$ 。因为 $|F_1| \leq 7$, 所以 $\sum_{w \in W} |N_{F_1 \cap F_2}(w)| = 2|W| \leq |F_1 \cap F_2| \leq |F_1| - 1 \leq 8$, 故由此得知 $|W| \leq 4$ 。假设 $V(H)$ 不空, 当 $|W| = 4$ 时, $|F_1 \cup F_2| = 12$, 此时 $|F_1 \cap F_2| = |F_1| + |F_2| - |F_1 \cup F_2| = 7 + 7 - 12 = 2$, 得出矛盾。当 $|W| < 4$ 时, $|F_1 \cup F_2| \leq 7 + 7 - 2 = 12$, 而 $|V(CQ_4)| = 16 = |F_1 \cup F_2| + |W| < 12 + 4 = 16$, 由此得出矛盾。故 $V(H)$ 不空。因为 H 中无孤立点, 所以 H 中的点不与 $F_1 \Delta F_2$ 中的点相邻。因此, $F_1 \cap F_2$ 是 CQ_4 的一个割, 又因为 $F_1 \cap F_2$ 是 1 好邻的, 所以 $F_1 \cap F_2$ 是 CQ_4 的一个 1 好邻割。又因为 CQ_4 的 1 好邻连通度是 6, 所以 $|F_1 \cap F_2| \geq 6$ 。因为 $|F_1| \leq 7$, $|F_2| \leq 7$, 所以 $|F_1 - F_2| = |F_2 - F_1| = 1$ 。令 $v_1 \in F_1 - F_2$, $v_2 \in F_2 - F_1$, 则对 $w \in W$, 都有 w 与 v_1 相邻且 w 与 v_2 相邻。因为 CQ_4 的性质, CQ_4 中任意一对点的公共邻点数不超过 2, 所以 $CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 中至多有 2 个孤立点。

情形 1 如果 $CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 中恰好只有一孤立点 w_1 且有 w_1 与 v_1, v_2 相邻。 $N(w_1) - \{v_1, v_2\} \subseteq F_1 \cap F_2$, $N(v_1) - \{w_1\} \subseteq F_1 \cap F_2$, $N(v_2) - \{w_1\} \subseteq F_1 \cap F_2$ 。因为 CQ_4 是无三角的, 故 $|(N(w_1) - \{v_1, v_2\}) \cap (N(v_1) - \{w_1\})| = 0$, $|(N(w_1) - \{v_1, v_2\}) \cap (N(v_2) - \{w_1\})| = 0$ 。因为 CQ_4 中任意两点的公共邻点数至多为 2, 所以 $|N(v_1) - \{w_1\} \cap (N(v_2) - \{w_1\})| \leq 1$, 因此可以

$$|F_1 \cap F_2| \geq |N(w_1) - \{v_1, v_2\}| + |N(v_1) - \{w_1\}| + |N(v_2) - \{w_1\}| - |(N(w_1) - \{v_1, v_2\}) \cap (N(v_2) - \{w_1\})|, \text{ 即}$$

$$|F_1 \cap F_2| \geq 2 + 3 + 3 - 1 = 7, \text{ 那么 } |F_1| = |F_1 - F_2| + |F_1 \cap F_2| \geq 1 + 7 = 8, \text{ 与 } |F_1| \leq 7 \text{ 矛盾。}$$

情形 2 考虑第二种情形, 如果 $CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 中有两孤立点 w_1 和 w_2 且与 v_1, v_2 相连。 $N(w_1) - \{v_1, v_2\} \subseteq F_1 \cap F_2$, $N(w_2) - \{v_1, v_2\} \subseteq F_1 \cap F_2$, $N(v_1) - \{w_1, w_2\} \subseteq F_1 \cap F_2$, $N(v_2) - \{w_1, w_2\} \subseteq F_1 \cap F_2$ 。根据 CQ_4 的边邻接构造法则, 可知交叉立方体 CQ_4 是无三角的, 故因此可得 $|F_1 \cap F_2| \geq |N(w_1) - \{v_1, v_2\}| + |N(w_2) - \{v_1, v_2\}| + |N(v_1) - \{w_1, w_2\}| + |N(v_2) - \{w_1, w_2\}| - |(N(v_1) - \{w_1, w_2\}) \cap (N(v_2) - \{w_1, w_2\})|$, 由此即可得 $|F_1 \cap F_2| \geq 2 + 2 + 2 + 2 - 0 = 8$, 那么有 $|F_1| = |F_1 - F_2| + |F_1 \cap F_2| \geq 1 + 8 = 9$, 与 $|F_2| \leq 7$ 矛盾。

断言得证。

令 $v \in CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 。由断言 1 可知, u 在 $CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 中至少存在一个邻点 v , 因为故障集对 (F_1, F_2) 不可区分, 故对 u, v 而言, 不存在点 $w \in F_1 \Delta F_2$, 使得 $uw \in E$ 且 $uv \in E$, 或者 $vw \in E$ 且 $vu \in E$, 所以 $CQ_4 - F_1 \cup F_2$ 和 $F_1 \Delta F_2$ 之间不存在连边, 即不连通。因为 (F_1, F_2) 为非包含 1 好邻故障集对, 为满足其中的 1 好邻条件, 需要 $|F_1 - F_2| = |F_2 - F_1| \geq 2$ 。由此可知 $F_1 \cap F_2$ 是 CQ_4 中的一个 1 好邻割, 即这 $|F_1 \cap F_2| \geq 6$ 。因此, $|F_1| = |F_1 - F_2| + |F_1 \cap F_2| \geq 2 + 6 = 8$, 与 $|F_2| \leq 7$ 矛盾。综上所述, CQ_4 是 1 好邻 7 可诊断的。

$t_{M_1}(CQ_4) \geq 7$ 得证。

综合上界和下界, 定理 4 得证。

引理 3 [5] 令 $\{u, v\}$ 是 n 维交叉立方体 CQ_n 中的一相邻点对, 则当 $n \geq 3$ 时有 $\kappa(CQ_n - N\{u, v\} \cup \{u, v\}) \geq n - 3$ 。

引理 4 令 F 是 CQ_n 中的非包含 1 好邻故障集且满足 $|F| \leq 3n - 6$, 则当 $n \geq 4$ 时 $CQ_n - F$ 满足下列条件之一:

(1) $CQ_n - F$ 是连通的;

(2) $CQ_n - F$ 由两个连通部分组成, 其中一个部分与 K_2 同构, 另一部分的顶点数为 $2^n - |F| - 2$ 。

证明 令 $F_0 = F \cap CQ_n^0$, $F_1 = F \cap CQ_n^1$, 由 CQ_n 的结构可知 $F_0 \cap F_1 = \emptyset$ 。故障集 F 是非包含 1 好邻故障集且满足 $|F| \leq 3n - 6$, 考虑以下两种情况:

情形 1 CQ_n 中任意无故障相邻顶点对 $\{u, v\}$ 满足 $N(u, v) \not\subset F$ 。

子情形 1 $CQ_n^0 - F_0$ 或 $CQ_n^1 - F_1$ 连通

不失一般性, 假设 $CQ_n^0 - F_0$ 不连通, 考虑此情形下故障集大小, 由此假设可知

$|F_0| \geq 2(n-1) - 2 = 2n - 4$, $|F_1| \leq 3n - 6 - |F_0| \leq 3n - 6 - (2n - 4) = n - 2$, 此时 $CQ_n^1 - F_1$ 连通。下面证明

$CQ_n^0 - F_0$ 与 $CQ_n^1 - F_1$ 之间有路相连。

令 $u \in CQ_n^0 - F_0$, $u_1 \in CQ_n^1 - F_1$, 若 $u_1 \notin F$, 则根据 CQ_n 的邻接结构可知 u 与 u_1 之间通过交错边相邻; 否则, 因为 CQ_n 中任意相邻无故障点对 $\{u, v\}$ 满足 $N(u, v) \not\subset F$, 所以存在一顶点 $v \in N(u) \cap (CQ_n^0 - F_0)$, 若 $v_1 \notin F$, 类似地, $CQ_n^0 - F_0$ 与 $CQ_n^1 - F_1$ 之间有路连通; 否则, 存在一顶点 $w \in N(u) \cap (CQ_n^0 - F_0)$ 使得 $w_1 \notin F$, 故 $CQ_n^0 - F_0$ 与 $CQ_n^1 - F_1$ 之间有路相连。以此类推, $CQ_n^0 - F_0$ 与 $CQ_n^1 - F_1$ 连通, 若不然, 有 $|F| \geq 3n - 5$, 矛盾。 $CQ_n^0 - F_0$ 连通且 $CQ_n^1 - F_1$ 不连通和 $CQ_n^0 - F_0$ 与 $CQ_n^1 - F_1$ 均不连通两种情况相似可证。

子情形 2 $CQ_n^0 - F_0$ 与 $CQ_n^1 - F_1$ 均不连通

此时, 考虑故障集大小可得知 $|F_0| \geq 2(n-1) - 2 = 2n - 4$ 且 $|F_1| \geq 2n - 4$, 则有

$|F| = |F_0 + F_1| = |F_0| + |F_1| \geq 4n - 8 > 3n - 6 (n \geq 4)$, 与 $|F| \leq 3n - 6$ 矛盾。

综合子情形 1 和子情形 2, $CQ_n - F$ 连通得证。

情形 2 CQ_n 中存在一无故障相邻顶点对 $\{u, v\}$ 满足 $N(u, v) \subset F$ 。

无故障相邻点对 $\{u, v\}$ 的所有邻点均故障, $|F \cap (N(u, v) \cup \{u, v\})| = |N(u, v)| = 2n - 2$, 故有 $|F - N(u, v)| = |F| - |F \cap N(u, v)| \leq (3n - 6) - (2n - 2) = n - 4 < n - 3$ 。根据引理 3 所述可得知, 有 $CQ_n - N(u, v) \cup \{u, v\} - F$ 是连通的, 又 F 是 1 好邻故障集, 得出结论, $CQ_n - F$ 有两部分, 其中一个部分与 K_2 同构, 另一部分的顶点数为 $2^n - |F| - 2$ 。

综合情形 1 和情形 2, 引理 4 得证。

引理 5 当 $n \geq 5$ 时, 令 F_1 和 F_2 是 CQ_n 中的一对非包含故障集对且满足条件 $|F_1| \leq 3n - 5$, $|F_2| \leq 3n - 5$, 若 F_1 和 F_2 是不可区分的, 则 $CQ_n - F_1 \cup F_2$ 中无孤立点。

证明 因为故障集大小满足条件 $|F_1| \leq 3n - 5$, $|F_2| \leq 3n - 5$, 所以当 $n \geq 4$ 时, 有

$|F_1 \cup F_2| \leq |F_1| + |F_2| \leq 6n - 10 < 2^n = |V(CQ_n)|$ 。因此, $F_1 \cup F_2 \neq CQ_n$ 。令 W 为 $CQ_n - F_1 \cup F_2$ 中所有孤立点作成的孤立点集, H 为 $CQ_n - F_1 \cup F_2 \cup W$ 。假设 W 不为空, 令 w 是 W 中的一孤立点, 则有 $N(w) - F_1 \subseteq F_2 - F_1$ 。因为 F_1 是 1 好邻故障集, 所以顶点 w 在 $CQ_n - F_1$ 中至少有一邻点, 而且 F_1 和 F_2 是不可区分的, 根据引理 2, 有 $|N(w) \cap (F_2 - F_1)| = 1$ 。相似地, 有 $N(w) - F_2 \subseteq F_1 - F_2$ 且 $|N(w) \cap (F_1 - F_2)| = 1$, 因此有 $|N(w) \cap (F_1 - F_2)| = n - 2$ 。

综合以上, $\sum_{w \in W} |N_{F_1 \cup F_2}(w)| = |W|(n - 2) \leq |F_1 \cap F_2| \leq 3n - 6$, 因此有, $|W| \leq \frac{3n - 6}{n - 2} = 3$ 。考虑以下两种情形:

情形 1 $V(H) = \emptyset$

在情形 1 的情况下, 即若 H 为空, 考虑故障集大小与 CQ_n 中顶点数大小关系, 则有

$2^n = |CQ_n| = |F_1 \cup F_2| + |W| \leq |F_1| + |F_2| + |W| \leq (3n - 5) + (3n - 5) + 3 = 6n - 7$, 当 $n \geq 5$ 时, 得到矛盾。

情形 2 $V(H) \neq \emptyset$

因为 F_1 和 F_2 是不可区分的, $|N(F_1 \Delta F_2 \cup W)| \subseteq F_1 \cap F_2$, 且 F_1 和 F_2 是互不包含的, 即 $|F_1 - F_2| \geq 1$ 且 $|F_2 - F_1| \geq 1$, 所以 $|F_1 \cap F_2| \leq 3n - 6$ 。由引理 4 所述, 可得知 $CQ_n - F_1 \cap F_2$ 由两分别连通的部分组成, 其中一个部分与 K_2 同构, 另一连通部分的顶点数为 $2^n - |F| - 2$, 两部分间无边相连。令 G_1 是 $CQ_n - F_1 \cap F_2$ 中的一部分且满足条件 $\{u_1, w, u_2\} \subseteq G_1$, 其中 $u_1 = N(w) \cap (F_1 - F_2)$, $u_2 = N(w) \cap (F_2 - F_1)$, 则有 $|V(G_1)| \geq 3$, 除 G_1 外另一部分与 K_2 同构, 然而, 当 $n \geq 5$ 时, $|CQ_n| - |F_1 \cup F_2| - |W| \geq 2^n - 2(3n - 5) - 3 = 2^n - 6n + 7 > 2$, 矛盾。

综上所述, $CQ_n - F_1 \cup F_2$ 中无孤立点得证。

定理 5 当 $n \geq 5$ 时, n 维交叉立方体 CQ_n 在 MM^* 模型下的非包含 1 好邻诊断度上界为 $3n - 5$, 即 $t_{N_1}(CQ_n) \geq 3n - 5$ 。

证明 要证 CQ_n 的非包含 1 好邻诊断度上界为 $3n - 5$, 即要证明当 $n \geq 5$ 时, 对 n 维交叉立方体 CQ_n 中任意一对满足条件 $|F_1| \leq 3n - 5$ 且 $|F_2| \leq 3n - 5$ 的非包含 1 好邻故障集对 (F_1, F_2) , 都有 F_1 和 F_2 是可区分的。

反证法, 假设 F_1 和 F_2 是不可区分的。不失一般性, 令 $|F_1| \geq |F_2|$ 。由引理 5 可知, $F_1 \cup F_2 \neq CQ_n$, 且 $CQ_n - F_1 \cup F_2$ 中无孤立点。因为 F_1 和 F_2 都是 1 好邻故障集且不可区分, 所以 $F_1 \Delta F_2$ 与 $CQ_n - F_1 \cup F_2$ 之间无边相连, 且 $|F_1 - F_2| \geq 2$, $|F_2 - F_1| \geq 2$, 即有 $|F_1 \Delta F_2| \geq 4$, $N(F_1 \Delta F_2) \subseteq F_1 \cap F_2$ 。由此得知, 有 $|F_1 \cap F_2| \leq 3n - 7 < 3n - 6$, 而由引理 4 可知, $CQ_n - F_1 \cap F_2$ 由两部分组成, 其中一个部分与 K_2 同构。因为当 $n \geq 5$ 时, $|CQ_n - F_1 \cup F_2| \geq 2^n - 2(3n - 5) > 2$, 所以 $|F_1 \Delta F_2| \leq 2$, 矛盾。

综上, $t_{N_1}(CQ_n) \geq 3n - 5$ 得证。

定理 6 当 $n \geq 4$ 时, n 维交叉立方体 CQ_n 在 MM^* 模型下的非包含 1 好邻诊断度为 $3n - 5$, 即 $t_{N_1}(CQ_n) = 3n - 5$ 。

证明 综合定理 4 和定理 5 可知, 当 $n \geq 5$ 时 n 维交叉立方体 CQ_n 在 MM^* 模型下的非包含 1 好邻诊断度上界和下界均为 $3n - 5$, 又由定理 3, CQ_4 在 MM^* 模型下的非包含 1 好邻诊断度为 7, 故当 $n \geq 4$ 时, n 维交叉立方体 CQ_n 在 MM^* 模型下的非包含 1 好邻诊断度为 $3n - 5$ 得证。

5. 结论与研究展望

本文主要研究结论: 当 $n \geq 4$ 时, $t_{N_g}^{PMC}(CQ_n) \leq \begin{cases} [2(n-g)+1]2^g - 1, 0 \leq g \leq n-3 \\ 2^{n-1} - 1, n-2 \leq g \leq n-1 \end{cases}$; 当 $n \geq 4$ 时,

$t_{N_1}^{PMC}(CQ_n) = 4n - 7$; 当 $n \geq 4$ 时, $t_{N_1}^{MM^*}(CQ_n) = 3n - 5$ 。

之前已有的非包含 g 好邻诊断度研究结果主要针对经典 n 维立方体 Q_n : 当 $n \geq 4$ 时,

$t_{N_1}^{PMC}(Q_n) = 4n - 7$; 当 $n \geq 7$ 时, $t_{N_1}^{MM^*}(Q_n) = 3n - 5$ 。

对两类结果进行比较, 可知本文所做 CQ_n 在 MM^* 模型下的 1 好邻诊断度结果的适用范围 $n \geq 4$ 比 Q_n 的已有结果适用范围 $n \geq 7$ 更优。

关于本文研究结果的局限性与未来研究展望, 本文仅做出 CQ_n 在 PMC 和 MM^* 模型下的 1 好邻诊断度精确值, 未拓展至扭结立方体、增广立方体等衍生变体网络; 在此基础上未来研究方向是证明得出 n 维交叉立方体 CQ_n 在 PMC 模型下的 g 好邻诊断度以及 CQ_n 在 MM^* 模型下的 1 好邻诊断度和 g 好邻诊断度, 除理论推导外考虑与实际复杂网络应用场景结合, 验证结果的实际适用性。

参考文献

[1] Preparata, F.P., Metze, G. and Chien, R.T. (1967) On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems.

- IEEE Transactions on Electronic Computers*, **16**, 848-854. <https://doi.org/10.1109/pgec.1967.264748>
- [2] Sengupta, A. and Dahbura, A.T. (1992) On Self-Diagnosable Multiprocessor Systems: Diagnosis by the Comparison Approach. *IEEE Transactions on Computers*, **41**, 1386-1396. <https://doi.org/10.1109/12.177309>
 - [3] Fan, J.X. (2002) Diagnosability of Crossed Cubes under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **13**, 1099-1104. <https://doi.org/10.1109/tpds.2002.1041887>
 - [4] Lai, P.L., Tan, J.J.M., Chang, C.P. and Hsu, L.H. (2005) Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **54**, 165-175. <https://doi.org/10.1109/tc.2005.19>
 - [5] Zhou, S. (2010) The Conditional Diagnosability of Crossed Cubes under the Comparison Model. *International Journal of Computer Mathematics*, **87**, 3387-3396. <https://doi.org/10.1080/00207160903477175>
 - [6] Hong, W.S. and Hsieh, S.Y. (2012) Strong Diagnosability and Conditional Diagnosability of Augmented Cubes under the Comparison Diagnosis Model. *IEEE Transactions on Reliability*, **61**, 140-148. <https://doi.org/10.1109/tr.2011.2170105>
 - [7] Peng, S.L., Lin, C.K., Tan, J.J.M. and Hsu, L. (2012) The G-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of Hypercube under PMC Model. *Applied Mathematics and Computation*, **218**, 10406-10412. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.092>
 - [8] Ye, L. and Liang, J. (2016) On Conditional h -Vertex Connectivity of Some Networks. *Chinese Journal of Electronics*, **25**, 556-560. <https://doi.org/10.1049/cje.2016.05.023>
 - [9] Guo, J., Li, D. and Lu, M. (2019) The G-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of the Crossed Cubes under the PMC and MM* Model. *Theoretical Computer Science*, **755**, 81-88. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2018.06.046>
 - [10] Wang, X., Li, H., Sun, Q., Guo, C., Zhao, H., Wu, X., et al. (2022) The G-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of Exchanged Crossed Cube under the MM* Model. *Symmetry*, **14**, Article 2376. <https://doi.org/10.3390/sym14112376>
 - [11] Liu, H., Hu, X. and Gao, S. (2018) The G-Good Neighbor Conditional Diagnosability of Twisted Hypercubes under the PMC and MM* Model. *Applied Mathematics and Computation*, **332**, 484-492. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2018.03.042>
 - [12] Ding, T., Xu, M. and Zhu, Q. (2020) The Non-Inclusive Diagnosability of Hypercubes under the MM* Model. *International Journal of Foundations of Computer Science*, **31**, 929-940. <https://doi.org/10.1142/s0129054120500355>
 - [13] Yuan, J., Li, Y., Liu, A. and Qiao, H. (2022) The Non-Inclusive G-Good-Neighbor Diagnosability of Interconnection Networks. *Theoretical Computer Science*, **922**, 179-192. <https://doi.org/10.1016/j.tcs.2022.04.023>
 - [14] Tian, T., Zhang, S., Li, Y. and Geng, F. (2025) The Non-Inclusive G-Good-Neighbor Diagnosability of Star Graphs. *Parallel Processing Letters*, **35**, Article ID: 2550003. <https://doi.org/10.1142/s0129626425500033>
 - [15] Zhang, S., Tian, T., Li, Y. and Ye, C. (2024) Non-Inclusive g-Good-Neighbour Diagnosability of Hypercubes. *International Journal of Computer Mathematics: Computer Systems Theory*, **9**, 54-63. <https://doi.org/10.1080/23799927.2024.2307409>
 - [16] Efe, K. (1992) The Crossed Cube Architecture for Parallel Computation. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **3**, 513-524. <https://doi.org/10.1109/71.159036>
 - [17] Chang, C. and Wu, C. (2009) Conditional Fault Diameter of Crossed Cubes. *Journal of Parallel and Distributed Computing*, **69**, 91-99. <https://doi.org/10.1016/j.jpdc.2008.08.001>