

The LQG/LTR Design Procedure for Nonlinear Robot Manipulators

Chijui Chung, Chengneng Hwang

Department of Systems and Naval Mechatronics Engineering, National Cheng Kung University, Tainan
Email: rayinncku@hotmail.com

Received: Nov. 7th, 2012; revised: Dec. 2nd, 2012; accepted: Dec. 10th, 2012

Abstract: In this thesis, the multivariable robust control of nonlinear manipulator systems is based on the compute torque method and the LQG/LTR design procedure was proposed. This controller is able to handle the system that have modeling errors and external disturbances while it keeps the close-loop system robustness and satisfied the prescribed performance. In this research, the computed torque method is applied to design the proposed control law to form the main control structure by using the benefit of its feedback linearization strategy. The error dynamics of the plant is then formulated to the standard H_2/H_∞ control problem, which is easy to be applied by the LQG/LTR design procedure to find the optimal control gain and observer gains in the process of matching the target loop. With regard to the non-canceling nonlinear terms, the closed-loop system is formulated to the Lu're-type problem form with sector-bounded uncertainties, which is then analyzed by the Multivariable Circle Criterion to discuss the stability and robustness. To verify the feasibility of proposed controller, one example with various external disturbances and parameter uncertainties is made and its computer simulation result shows the efficiency and feasibility of the proposed design methodology.

Keywords: Compute Torque Method; LQG/LTR Theory; Multivariable Circle Criterion

机械手臂之 LQG/LTR 最佳控制综合设计

钟启瑞, 黄正能

国立成功大学系统及船舶机电工程学系, 台南
Email: rayinncku@hotmail.com

收稿日期: 2012 年 11 月 7 日; 修回日期: 2012 年 12 月 2 日; 录用日期: 2012 年 12 月 10 日

摘 要: 本研究综合计算扭矩法与 LQG/LTR 对非线性机械手臂系统进行多变量强健控制设计, 解决存在于系统内部的不确定性与受到随机干扰情况下的非线性机械手臂系统之控制设计问题, 使得非线性机械手臂控制系统具有良好的强健性与满足性能要求。文中首先使用计算扭矩法对非机械手臂系统中各项的估计值进行控制律的设计与回授线性化, 并使用变异渐进法对回授系统进行适当的加权扩增; 接着使用 LQG/LTR 设计, 使得输出回授控制器(output feedback controller)能够趋近于预先设计的目标回授回路(target feedback loop)。至于非线性机械手臂闭环回路系统在形成 Lu're-type 问题后, 可讨论非线性项之稳定性容许在一定的上界与下界, 根据多变量圆稳定准则理论(multivariable circle criterion)探索此控制器之强健性能。文末则以非线性机械手臂系统为范例, 进行计算机仿真, 验证控制器的有效性与可行性。

关键词: 计算扭矩法; LQG/LTR 理论; 多变量圆稳定准则

1. 引言

迄今, 控制理论发展至少经历了四个阶段。第一

阶段, 1932 年 Nyquist 运用复变函数理论建立了根据频率响应判断单输入 - 单输出回授系统稳定性的准

则^[1]，而在 30 年代末期 Bode 与 Nichols 进一步将频域响应法加以推广^[2]，使之更臻成熟。1948 年 Evans 提出名为根轨迹(root locus)的分析法^[3]，研究系统参数对回授系统稳定性和动态特性的影响，系统极/零点的重要性亦因之具体呈现。前述方法形成了古典控制理论的核心，其中增益(gain)与相位(phase)界限被广泛的用来度量稳定强健性，藉其反映控制设计之良窳。虽然这些方法并未明显的将模型不确定等因素纳入问题内，但我们却可由稳定准则中，估计出系统所能容许的整体开回路增益与相位变动范围，这也算是间接的反映了系统的强健稳定性。至于早期 Wiener 利用频域响应法探讨最佳控制与滤波理论所得到的结果并未具备强健性^[4]。该法的重点是使信号变异量极小化，而非使某些决定强健性(稳定性或性能)之性能准则(performance measure)极小化。应用该理论并无法确定闭回路系统稳定性，亦即，控制器和受控系统间可能出现极、零点对消(pole-zero cancellation)，导致闭回路不稳定。

第二阶段，1960 年 Kalman 等人引入状态空间法(state-space method)探讨最佳控制与滤波理论^[5]，但在本阶段受控系统模式皆假设已知。至于最佳状态回授之线性二次调节器(linear quadratic regulator, LQR)本身即具有优异的既存强健性^[6]。亦即，至少 60 度的相位界限与正无穷大的增益界限，1977 年才由 Safonov 与 Athans 发现。但对于采输出回授之控制系统则无法获致类似的理论。

大约 1970 年开始的第三阶段，控制理论发展又转回频域设计法，但学者们将其推广至多变量系统的控制器设计。这段时期，理论发展系由 Rosenbrock 与 MacFarlane 等人主导。虽然 Rosenbrock 曾提倡高度整合性设计，以便克服回路增益变化对稳定性的影响^[7]，但这些方法并未对系统含有不确定项，该如何改进强健性正式的提出对策。

简而言之，前三阶段，控制理论发展并未正式的将系统既存扰动因素纳入问题中，并且特别针对这些问题提出答案。至于某些设计所能提供的强健特性，也只是后人偶然发觉这些方法亦可提供一些附加效益罢了。虽然早在 1945 年，Bode 在其著作中就曾提及负回授可降低参数变动灵敏度，1964 年 Cruz 与 Perkins 亦曾提出适用于多变量系统的灵敏度函数(sensitivity function)，以描述参数变化对系统的影响

^[8]。但严格来说，这些方法只能算是提出了降低系统对参数变化灵敏度的对策，并非方法。因为这些文献所探讨的问题模式，并未正式考虑扰动因素。这类对策自然无法以量化方式明确的告诉我们，受控系统可承受多少扰动量，回路仍能维系稳定度。

1980 年以后的控制理论发展正式将模式不确定性因素纳入问题中，大量文献深入且广泛的探讨模式扰动对系统稳定性与性能的影响。1981 年由 Doyle 与 Stein 利用小增益原理(small gain theorem)提出了保证受扰动回授控制系统稳定性的强健稳定条件(robust stability condition)^[9]，同时提出了回路转移函数回复(loop transfer recovery, LTR)技术(亦即，在控制输入处附加一含虚拟噪声的 Kalman 滤波器，以便在受控系统输入端恢复 LQR 所具有的强健性)最为著名。1981 年，Zames 提出了灵敏度函数的 H_∞ -norm 最小化之稳定控制器参数解法^[10]，使系统获致最佳强健性(性能或稳定性)。自此，强健性主题开始纳入优化设计过程。这篇文献同时还以现代控制的观点考虑了一些古典控制的基本问题，并将其表达为 H_∞ -norm 优化问题的模式。

2. 计算扭矩法与 LQG/LTR 之设计

2.1. 计算扭矩法

针对一个具有 n 个关节之机械手臂系统状态方程式，表示如下^[11]：

$$B_i(\underline{q}(t))\ddot{\underline{q}}(t) + C_i(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)) + g_i(\underline{q}(t)) = \tau_i(t) \quad (1)$$

式中： $\ddot{\underline{q}}(t), \dot{\underline{q}}(t), \underline{q}(t)$ 为 $n \times 1$ 向量，代表 n 个关节变量与其时间导数； $B_i(\underline{q}(t))$ 为惯性项； $C_i(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t))$ 为柯氏力和离心力总和项； $g_i(\underline{q}(t))$ 为重力项； $\tau_i(t)$ 为驱动马达在各关节之作用力与力矩， $i = 1, 2, \dots, n$ 。

现在将(1)外加考变动项 $\Delta B_i(\underline{q}(t))$ 、 $\Delta C_i(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t))$ 、 $\Delta g_i(\underline{q}(t))$ ，外部输入之扰动 $\tau_{di}(t)$ 及系统模型可求得之标称值(nominal value)

$B_{0i}(\underline{q}(t)), C_{0i}(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t)), g_{0i}(\underline{q}(t))$ ，改写如下：

$$[B_{0i} + \Delta B_i]\ddot{\underline{q}}_i(t) + [C_{0i} + \Delta C_i] + [g_{0i} + \Delta g_i] = \tau_i(t) + \tau_{di}(t) \quad (2)$$

考虑如(2)式之机械手臂方程式，令 $\delta_i(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t))$ 与计算扭矩法之控制扭矩 $\tau_i(t)$ 设计如下：

$$\delta_i(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) = \Delta B_i + \Delta C_i + \Delta g_i \quad (3)$$

$$\tau_i(t) = B_{0i} [u(t) + \underline{\ddot{q}}_r(t)] + C_{0i} + g_{0i} \quad (4)$$

式中: $\underline{q}_r(t)$ 代表关节位置变量参考值; $u(t)$ 代表等效控制输入。

将(3)式与(4)式代入(2)式, 且令状态变量矩阵 $\mathbf{x}(t)$ 为关节位置变量与速度变量之误差矩阵、 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_{ri}(t)$, 整理可得到以下的受控系统状态方程式:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{G}\mathbf{d}(t) - \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \gamma, t) \quad (5)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6)$$

式中:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_i & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \mathbf{I}_{2i}, \mathbf{C} = [\mathbf{0} \quad \mathbf{I}_i] \\ \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \gamma, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{0i}^{-1} \delta_i(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t)) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

2.2. LQG/LTR 控制设计

现在将(5)式与(6)式辅以伺服控制器(Servo-compensator S_c)加权扩增成标准 H_2 控制问题, 表示如下^[12]:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_a \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_a \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}_a \mathbf{w}(t) - \mathbf{f}_a(\mathbf{y}(t), \gamma, t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \bar{\mathbf{x}}(t) \end{cases} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^p$: 控制输入; $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c)$ 为可控制;

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}_c| &= \lambda^q + \alpha_{q-1} \lambda^{q-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0; \\ \mathbf{A}_c &\in \mathbb{R}^{pq \times pq}; \mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{pq \times p}; \mathbf{x}_c(t) \in \mathbb{R}^{pq} \end{aligned}$$

且各项表示如下:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_a(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_c(t) \end{bmatrix}, \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(t) \\ \mathbf{d}(t) \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}_a(\mathbf{y}(t), \gamma, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \gamma, t) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_c \mathbf{C} & \mathbf{A}_c \end{bmatrix}, \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{B}_c & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{C}_a = [\mathbf{c} \quad \mathbf{0}] \end{cases} \quad (9)$$

则此非线性机械手臂系统之 LQG/LTR 架构图如

图 1 所示, 且控制器设计如下:

a) 伺服控制器(servo-compensator S_c):

$$\dot{\mathbf{x}}_c(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{B}_c (\mathbf{r}(t) - \mathbf{y}(t)) \quad (10)$$

b) 稳定控制器(stabilizing control law S_s):

$$\mathbf{u}(t) = [\mathbf{k}_a \quad \mathbf{k}_b \quad \mathbf{k}_c] \hat{\mathbf{x}}_a(t) + \mathbf{f}_{10}(\mathbf{y}(t), t) \quad (11)$$

c) 卡门滤波器(Kalman filter S_o):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) - \mathbf{f}_0(\mathbf{y}, t) + \mathbf{L}(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (12)$$

此外, 对(11)式与(12)中之不确定项做合理之假设, 如下:

i) $\mathbf{f}(\mathbf{y}(t), \gamma, t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_1(\mathbf{y}(t), \gamma, t)$;

ii) $\mathbf{f}_0(\mathbf{y}, t) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}_{10}(\mathbf{y}, t)$;

iii) 存在一个 $\mathbf{N}$ 满足 $\mathbf{B} = \mathbf{G}\mathbf{N}$ 。

现在将(11)式与(12)代入(8)式, 则系统闭回路系统可简化为 Lu're Type 形式, 如图 2 所示。至于不确定项 $\varphi(\mathbf{y}(t), \mathbf{r}, t)$, 藉由多变量圆稳定准则(multivariable circle criterion)则可以保证此闭回路在一有限的范围中, 属于绝对稳定(absolutely stable)。系统闭回路系统状态方程式表示如下:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_z \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_z \mathbf{w}(t) - \mathbf{B}_z \varphi(\mathbf{y}(t), \mathbf{r}, t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_z \mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (13)$$

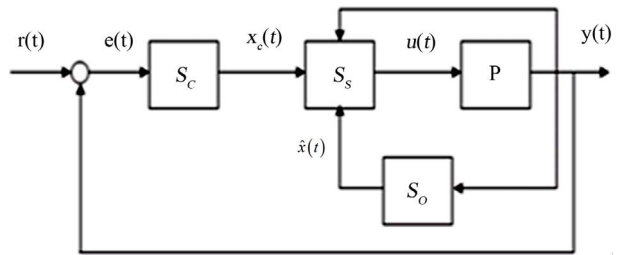


Figure 1. Control structure
图 1. 非线性控制系统架构

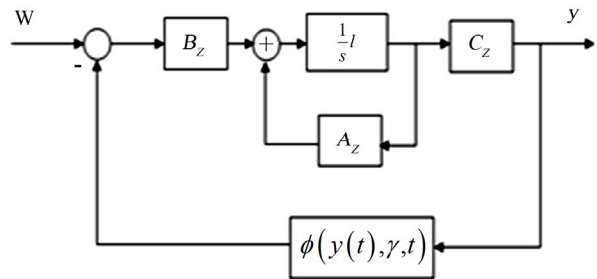


Figure 2. Lu're type problem block diagram
图 2. Lu're type problem 方块图

式中:

$$\begin{cases} A_z = \begin{bmatrix} A & Bk_c & B[k_a & k_b] \\ -B_c C & A_c & 0 \\ LC & Bk_c & A+B[k_a & k_b]-LC \end{bmatrix} \\ B_z = \begin{bmatrix} 0 & G \\ B_c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_z = [C & 0] \\ \varphi_1 f_1(y(t), r, t) = B \begin{bmatrix} f_1(y(t), r, t) - f_{10}(y(t), t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \varphi(y(t), r, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ N \end{bmatrix} (f_1(y(t), r, t) - f_{10}(y(t), t)) \end{cases} \quad (14)$$

以上述之计算扭矩法与 LQG/LTR 推导, 我们归纳出以下理论[A]。

2.2.1. 理论 A

针对(2)式之机械手臂系统, 其状态方程式可表示如下:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gd(t) - f(y(t), \gamma, t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (15)$$

式中: $A, B, C, G, f(y(t), \gamma, t)$ 详如(7)式所示, γ 为不确定项。

则辅以伺服控制器 S_c 如(11)式, 表示如下:

$$\dot{x}_c(t) = A_c x_c(t) + B_c(r(t) - y(t)) \quad (16)$$

则此系统可扩增成状态方程式, 表示如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_a x_a(t) + B_a u(t) + G_a w(t) - f_a(y(t), \gamma, t) \\ y(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \quad (17)$$

式中: $A_a, B_a, C_a, G_a, f_a(y(t), \gamma, t)$ 详如(9)式所示, γ 为不确定项。

则其 LQG/LTR 最佳非线性控制器可设计如下:

$$u(t) = [k_a \quad k_b \quad k_c] \hat{x}_a(t) + f_{10}(y(t), t) \quad (18)$$

$$\hat{\dot{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - f_0(y(t), t) + L(y - \hat{y}) \quad (19)$$

其中, $\hat{x}_a(t)$ 代表卡门滤波器之状态变量; $f_{10}(y(t), t)$ 为将 $\gamma = \gamma_0$ 代入 $f_1(y(t), \gamma, t)$ 之一非线性函数; $f_0(y, t) = B \cdot f_{10}(y, t)$, 存在一个 N 满足 $B = GN$ 。

则 $[k_a \quad k_b]$ 代表控制器增益:

$$[k_a \quad k_b \quad k_c] = R^{-1} B_a^T P_1 \quad (20)$$

式中: R 与 P_1 皆为对称矩阵, 在此, R 设为单位矩阵且 P_1 为下式代数黎卡提方程式(algebraic riccati equation)之正定解:

$$A_a^T P_1 + P_1 A_a - P_1 B_a Q^{-1} B_a^T P_1 + Q = 0 \quad (21)$$

式中, $Q = Q^T > 0$

则 L 代表观测器增益, 表示如下:

$$L = P_2 C_a^T (\Theta)^{-1} \quad (22)$$

式中: Θ 代表噪声频谱密度; P_2 为对称矩阵, 且为下式代数黎卡提方程式(algebraic Riccati Equation)之正定解:

$$A_a P_2 + P_2 A_a^T + GmG^T - P_2 C_a^T (\Theta)^{-1} C_a P_2 = 0 \quad (23)$$

式中: $G = I$; m 代表噪声频谱密度。

最后, 闭回路系统状态方程式可表示为(13)式所示, 其稳定性可由多变量圆稳定准则(multivariable circle criterion)来获得确保。因此, 此闭回路系统在白噪声和不确定项干扰下可确保为稳定; 而且可达目标回授函数(target loop)之默认性能。此外, 原机械手臂模型(2)式之最佳控制扭矩可设计如(4)式所示。

2.2.2. 证明

由(13)式之系统闭回路状态方程式, 假设 $A_z \in Hurwitz, (A_z, B_z)$ 为可控制、 (A_z, C_z) 为可观测、 $\alpha = 0, \varphi(t, y) \in \text{sector}[0, E]$, 则可定义系统之非线性区间如下:

$$\varphi(t, y)^T [\varphi(t, y) - Ey] \leq 0, \forall t \geq 0 \quad (24)$$

式中: E 为正定对角矩阵(positive definite symmetric matrix)。

接着令一里亚普诺夫函数如下^[13]:

$$V(x) = x^T P x, P = P^T \geq 0 \quad (25)$$

将 $V(x)$ 微分、代入(14)式, 并整理如下:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= [A_z x - B_z \varphi(t, y)]^T P x + x^T P [A_z x - B_z \varphi(t, y)] \\ &= x^T (A_z^T P + P A_z) x - 2x^T P B_z \varphi(t, y) \end{aligned} \quad (26)$$

接着合并(24)式与(26)式, 即加入上界(upper bound), 改写如下:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &\leq x^T (A_z^T P + P A_z) x - 2x^T P B_z \varphi(t, y) - 2\varphi(t, y)^T [\varphi(t, y) - S y] \\
 &= x^T (A_z^T P + P A_z) x - 2x^T P B_z \varphi(t, y) - 2\varphi(t, y)^T [\varphi(t, y) - S C_z x] \\
 &= x^T (A_z^T P + P A_z) x + 2x^T [C_z^T x - P B_z] \varphi(t, y) - 2\varphi(t, y)^T \varphi(t, y)
 \end{aligned} \quad (27)$$

当 $Z(s) = E C_z (sI - A_z)^{-1} B_z + I$ ，根据 Meyer-Kalman-Yakubovich Lemma，则可定义如下^[13]：

$$\begin{cases} A_z^T Q + Q A_z = -N^T N - \epsilon Q \\ Q B_z = C_z^T E - N^T M \\ M^T M = I + I^T = 2I \end{cases} \quad (28)$$

由(19)式可得， $M = M^T = \sqrt{2}I$ ， $M = M^T = \sqrt{2}I$ ， $C_z^T E - Q B_z = \sqrt{2}N^T$ ，代入(18)式可得：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x) &\leq x^T (-N^T N - \epsilon Q) x + 2\sqrt{2}x^T N^T \varphi(t, y) \\
 &\quad - 2\varphi(t, y)^T \varphi(t, y) = -\epsilon x^T P x - x^T N^T N x \\
 &\quad + 2\sqrt{2}x^T N^T \varphi(t, y) - 2\varphi(t, y)^T \varphi(t, y) \\
 &= -\epsilon x^T P x - [N x - \sqrt{2}\varphi(t, y)]^T [N x - \sqrt{2}\varphi(t, y)]
 \end{aligned}$$

整理上述不等式，可得以下结果：

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon x^T P x < 0 \quad (29)$$

最后根据里亚普诺夫第一定理(Laypunov First Method)，且假设输入 $r(t) = 0$ 。由(13)式之闭回路系统，如下所示：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_z x(t) - B_z \varphi(t, y) y(t) \\ y(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (30)$$

设 $x = 0$ 为 $\dot{x}(t) = A_z x(t) - B_z \varphi(t, y) y(t)$ 之平衡点，且满足以下条件：

- $V(0) = 0$ ；
- $V(x) > 0$ ， $\forall x \neq 0$ (positive define)；
- $\dot{V}(x) < 0$ ， $\forall x \neq 0$ (negative define)；
- $V(x) \rightarrow 0$ ，当 $\|x\| \rightarrow \infty$ (radially unbound)。

则可得此闭回路系统在一有限的范围中，属于绝对稳定(absolutely stable)。

于在上述理论中， $\varphi(t, y) \in \text{sector}[0, E]$ 与定理的非线性区间 $\varphi(t, y) \in \text{sector}[\alpha, \beta]$ 不同，故使用回路转换(loop transformation)，且依然为 Lu're type 架构，如图 3 所示。但为了使原闭回路系统之输出不改变，因此补上负回授 αy ，可得转换后的转移函数 $G_T(s)$ 如下：

$$G_T(s) = G(s) [I + \alpha G(s)]^{-1} \quad (31)$$

且转换后的状态空间表示如下：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_z - B_z \alpha C_z) x + B_z u \\ y(t) = C_z x(t) \end{cases} \quad (32)$$

非线性部分表示如下：

$$\varphi_T(t, y) = \varphi(t, y) - \alpha y \quad (33)$$

如果 $\varphi_T(t, y)$ 满足 sector condition，其中 $E = \beta - \alpha$ ，且 $(A - B\alpha C) \in \text{Hurwitz}$ ，则可由双线性转换(bilinear transformation)，如图 4 所示，得到转移函数 $Z_T(s)$ 如下：

$$\begin{aligned}
 Z_T(s) &= I + E G_T(s) = I + (\beta - \alpha) G(s) [I + \alpha G(s)]^{-1} \\
 &= [I + \alpha G(s) + (\beta - \alpha) G(s)] [I + \alpha G(s)]^{-1} \\
 &= [I + \beta G(s)] [I + \alpha G(s)]^{-1}
 \end{aligned} \quad (34)$$

则满足以下条件：

$$\begin{cases} G_T(s) = G(s) [I + \alpha G(s)]^{-1} \in \text{Hurwitz} \\ Z_T(s) = [I + \beta G(s)] [I + \alpha G(s)]^{-1} \in \text{SPR} \end{cases}$$

可保证闭回路系统在一有限的范围中属于绝对稳定(absolutely stable)。

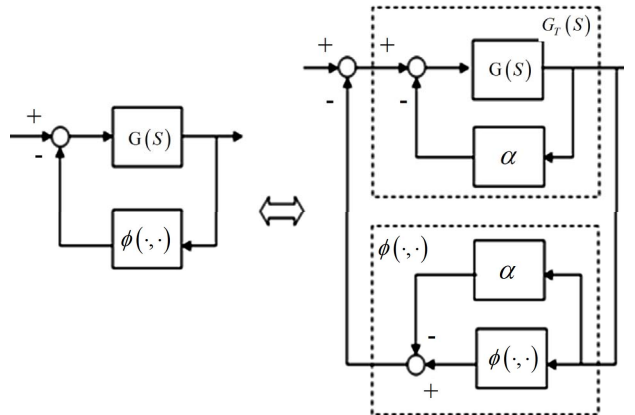


Figure 3. Loop transformation block diagram
图 3. 回路转换架构图

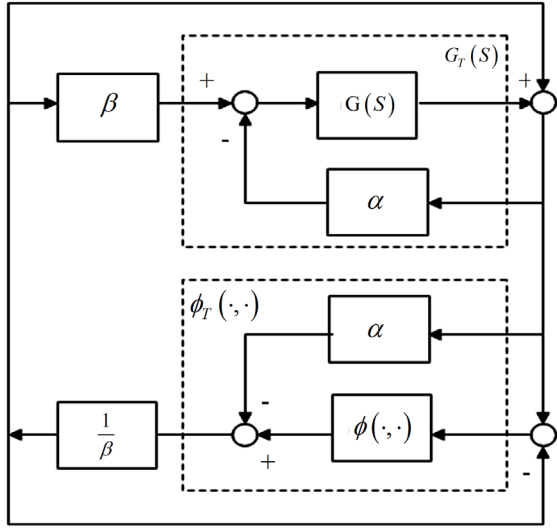


Figure 4. Bilinear transformation block diagram
图 4. 双线性转换架构图

备注: 则对于上述控制器之回路回复(loop transfer recovery)步骤如下:

Step1: 使用 LQR 设计, 依指定之性能规格来设计状态回授增益 k , k 值能够经由性能指针中之 Q 与 R 来调整: $k = R^{-1} B_a^T P_1$ 。

Step2: 选取 $G = I$, 噪声频谱密度 m 与 Θ , 代入 Kalman 滤波器的代数黎卡提方程式(algebraic riccati equation)来求解 Kalman 增益 $L = P_2 C^T (\Theta)^{-1}$ 。

Step3: 选取一适当的 q , 使得 $m' = qm$ 。

Step4: 利用计算机仿真 Step3 中 q 值所对应之调节器回路增益 $L_r(s)$ 的奇异值图, 可判断是否满足强健性且是否与 $L(s)$ 之奇异值图相当接近, 如未达到令人满意之程度, 则再调整 q 值并重复 Step3。

3. 计算机仿真

现在我们考虑一个 2 自由度的非线性机械手臂系统如图 5 所示。其中, S 代表负载 M 到 0 点的距离; $(x_1(t), x_2(t))$ 代表极坐标中臂杆质量中心 C 的位置;

$$\begin{aligned} [Y_{01}(t), Y_{02}(t)] &= [0, 2.5], t \leq 0 \text{ sec} \\ [Y_{01}(t), Y_{02}(t)] &= [(x_1(t) + a) \cos x_2, (x_1(t) + a) \sin x_2], 0 \leq t \leq \pi \text{ sec} \\ [Y_{01}(t), Y_{02}(t)] &= [0, -2.5], t \geq \pi \text{ sec} \end{aligned}$$

3.2. 设计执行

3.2.1. 步骤 1. 计算扭矩法进行回授

对(27)式使用计算扭矩法进行回授, 令等效控制

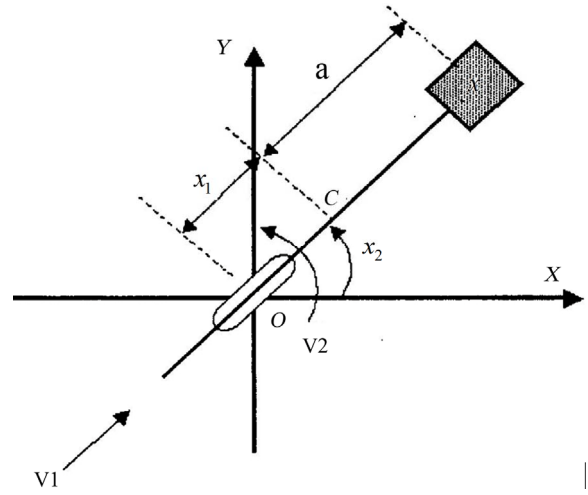


Figure 5. Robot manipulator
图 5. 机械手臂系统图

V_1 与 V_2 代表控制力与控制力矩; (X, Y) 代表卡式坐标; (m, M) 代表机械臂杆与负载之质量; (J_1, J_2) 代表质量惯性矩; a 代表质心 C 到质量负载 M 的距离。

根据 Lagrange-Equation 推导出系统的动力方程式如下:

$$\begin{cases} (m + M) \ddot{x}_1 - Q(x_1, R) \ddot{x}_2 = V \\ I(x_1, M) \ddot{x}_2 + 2Q(x_1, R) \dot{x}_1 \dot{x}_2 = V_2 \end{cases} \quad (27)$$

式中:

$$Q(x_1, R) = mx_1 + M(x_1 + a) \quad (28)$$

$$I(x_1, M) = J_1 + J_2 + mx_1^2 + M(x_1 + a)^2 \quad (29)$$

在此定义参数 $\bar{M} = 40 \text{ kg}$, $\bar{M} = 60 \text{ kg}$, $a = 1 \text{ m}$ 。

3.1. 控制目标

现在我们希望机械手臂操控, 藉由控制力 V_1 与控制力 V_2 的输入可使机械手臂伸长或缩回, 而且让此机械手臂的摆动在平面坐标 (X, Y) 上追踪半径为 2.5 m 的半圆形轨迹, 其目标轨迹方程式表示如下:

$$\begin{aligned} \text{扭矩 } u_{2 \times 1}(t) &= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \text{ 状态变量 } x(t)_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} q - q_r \\ \dot{q} - \dot{q}_r \end{bmatrix}, \text{ 外部} \\ \text{输入 } y(t)_{2 \times 1} &= \begin{bmatrix} q_1 - q_{r1} \\ q_2 - q_{r2} \end{bmatrix}. \text{ 回授后得到受控系统如下:} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gd(t) - f(y(t), \gamma, t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (30)$$

服补偿器为:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c e \\ y_c = C_c x_c \end{cases} \quad (31)$$

式中:

$$A_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} & I_2 \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{bmatrix}, B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix},$$

$$C_{2 \times 4} = [I_2 \quad 0_{2 \times 2}], G_{4 \times 4} = 0.1 \times \begin{bmatrix} 0_{2 \times 2} \\ I_2 \end{bmatrix}$$

式中:

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.2. 步骤 2. 进行加权扩增

为了达到良好的控制讯号与追踪性能, 选取一伺

合并(30)式与(31)式, 得到扩增系统表示如下:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_{ls}(t) + \begin{bmatrix} 0 & G \\ B_c & 0 \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_c(t) \end{bmatrix} \equiv \begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a u_{ls}(t) + G_a w(t) \\ y(t) = C_a x_a(t) \end{cases} \end{cases} \quad (32)$$

式中:

$$A_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.2.3. 步骤 3. 状态回授设计

设计 $Q = \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$, $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 经由程序计算(10)式与(11)式, 可得状态回授增益 k 如下:

$$k = \begin{bmatrix} 2.4142 & 0 & 2.4142 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4.2361 & 0 & 3.0777 & 0 & -1 & -3.0777 \end{bmatrix}$$

且得到一状态回授 $L(s) = k(sI - A_a)^{-1} B_a$ 之系统输出响应图, 如图 6。机械手臂运行之目标轨迹图, 如图 7。

3.2.4. 步骤 4. 输出回授设计

使用 Kalman 滤波器, 其动态方程式如下:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y - C\hat{x}) \quad (33)$$

选取 $\Theta = \mathcal{V}^2 n = 10^{-6}$ 与 $m = \mathcal{V}^2 m_0 + BB^T = 10^{-7}$, 经由程序运算可得观测增益 L 如下:

$$L = \begin{bmatrix} 1.41 & 0 \\ 0 & 1.41 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

3.2.5. 步骤 5. 调整参数 q

此步骤藉由调整 q , 在此选择 $q = 10^{10}$ 使得输出回授回路可回复近似目标回授回路, 如图 8 与图 9; 则在此 q 值下之控制力 V_1 与控制力 V_2 讯号图如图 10 与图 11、系统误差讯号如图 12。

3.2.6. 步骤 6. 判断非线性项之上界与下界

在仿真的过程中, 系统的不确定质量介于一不确定区间 $[40 \text{ kg}, 60 \text{ kg}]$, 公称质量取为 50 kg , 选择平均值的目的是为了让系统在质量有大程度变化时有较好的不确定抵御效果。

首先判断非线性项之上界与下界, 再利用多变量

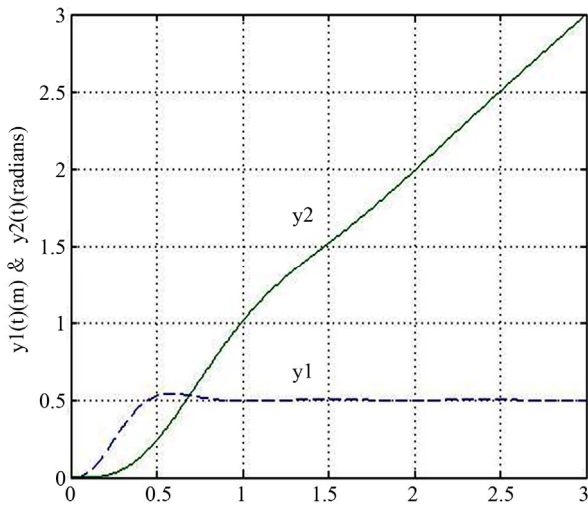


Figure 6. The plant output $y(t)$ vs time t
图 6. 系统输出响应图

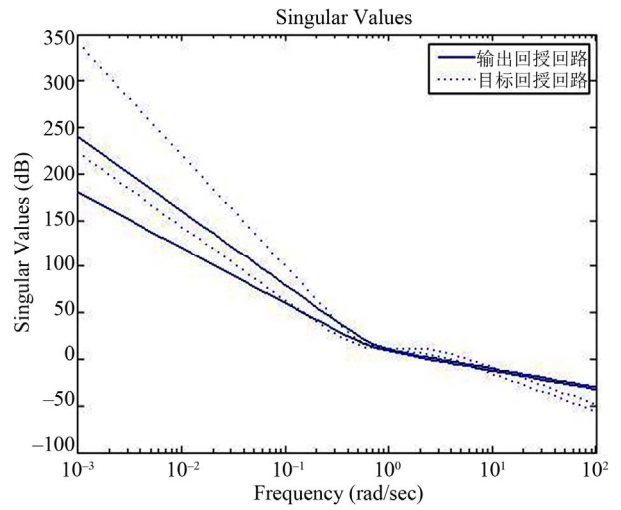


Figure 9. Output recovery with $q = 10^{10}$
图 9. $q = 10^{10}$ 之输出回授回复情形

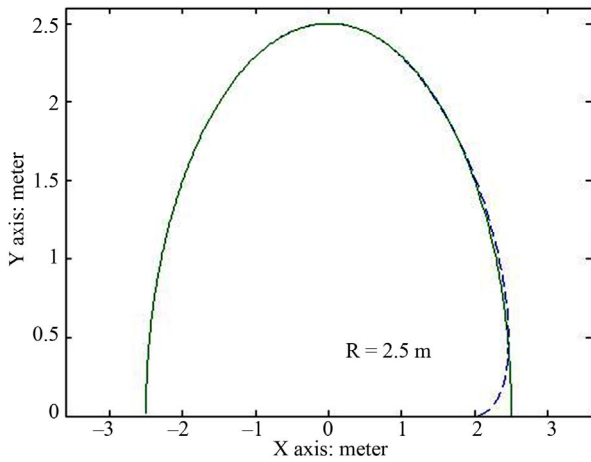


Figure 7. Target trajectory of manipulator
图 7. 机械手臂运动之目标轨迹图

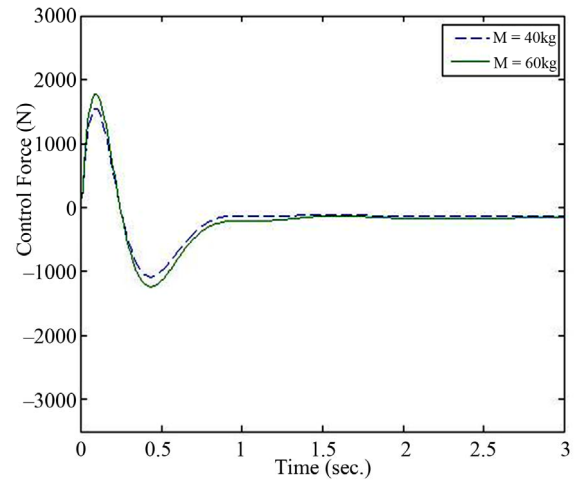


Figure 10. Histories of control force V_2
图 10. 控制力 V_2 讯号图

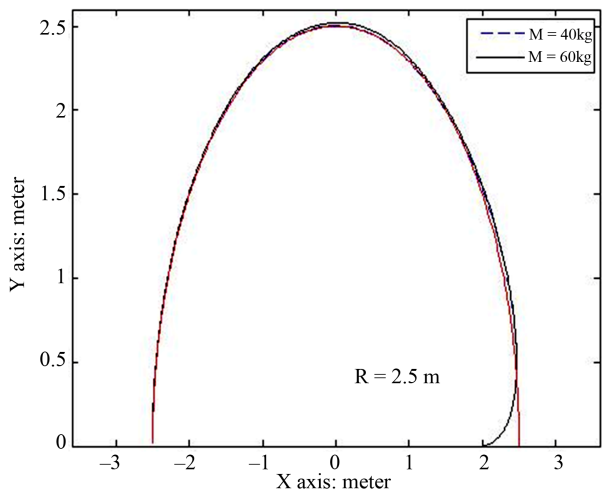


Figure 8. Output $y(t)$ in cartesian coordinates
图 8. LTR 之机械手臂系统运动轨迹

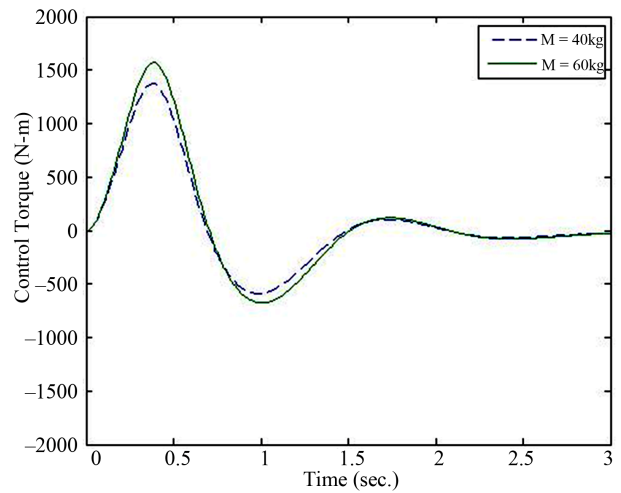


Figure 11. Histories of control force V_2
图 11. 控制力 V_2 讯号图

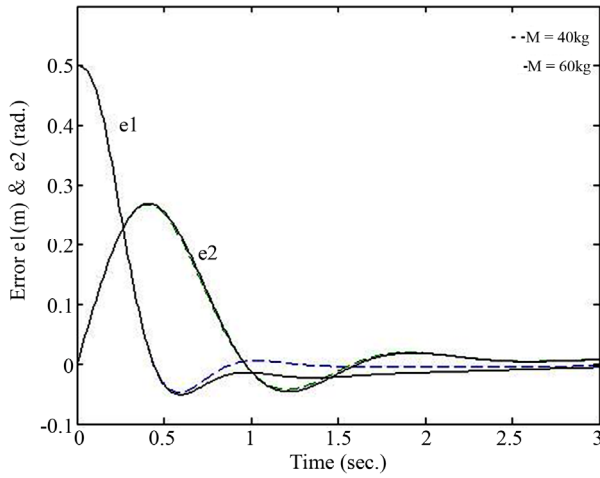


Figure 12. Tracking error vs time t
图 12. 系统误差讯号图

稳定准则探索此非线性项之允许范围。如图 13 负载 40 kg 之非线性位于 $\text{sector}[\alpha_1, \beta_1]$ 、图 14 负载 60 kg 之非线性位于 $\text{sector}[\alpha_2, \beta_2]$ ，其中 $\alpha_1 = 0.35$, $\beta_1 = 1.3$, $\alpha_2 = 0.31$, $\beta_2 = 1.12$ 。

最后根据上述的区间，使用多变量圆稳定准则画出所对应的 GMB 与临界圆。图 15 为负载 40 kg 之 GMB 与临界圆、图 16 为负载 60 kg 之 GMB 与临界圆。

4. 结论

本研究针对非线性机械手臂系统，提出一个结合计算扭矩法与 LQG/LTR 的综合控制设计。此设计方法使用计算扭矩法将非线性机械手臂系统经由回授化简为线性非耦合的受控系统，并且使用变易渐进法对受控系统适当的加权扩增。最后使用 LQG/LTR

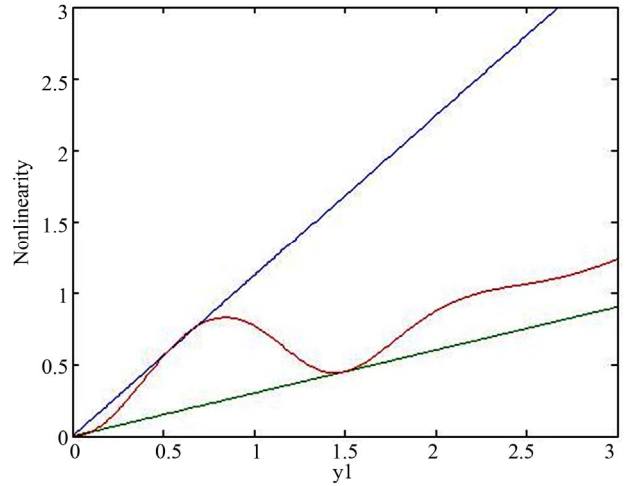


Figure 14. Nonlinear sector with 60 kg
图 14. 负载 60 kg 之非线性 sector

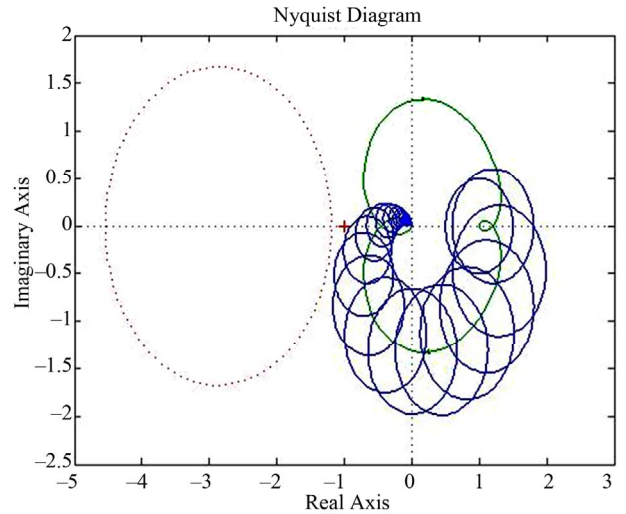


Figure 15. Satisfaction of circle criteria with 40 kg
图 15. 负载 40 kg 之 GMB 与临界圆

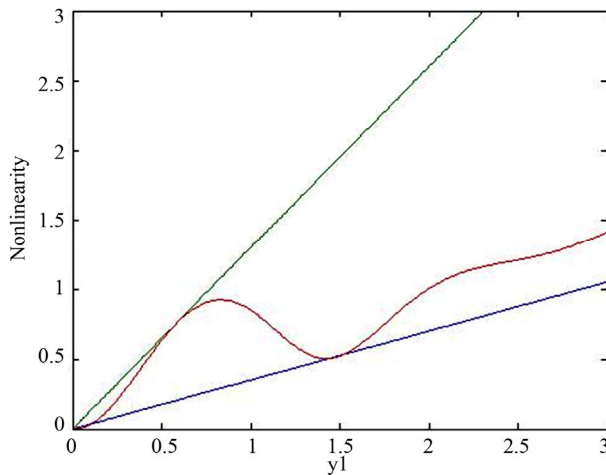


Figure 13. Nonlinear sector with 40 kg
图 13. 负载 40 kg 之非线性 sector

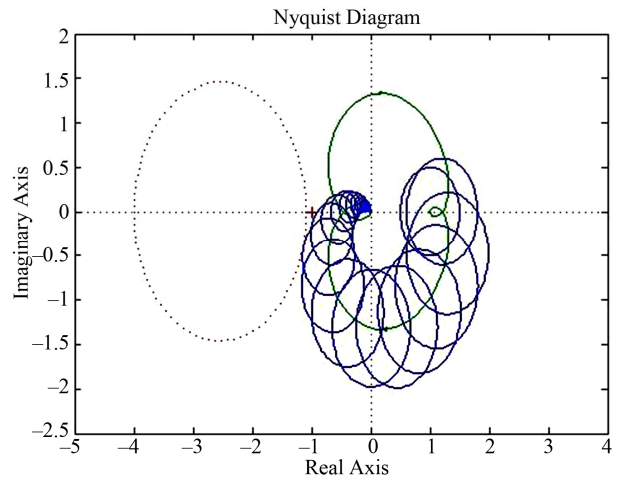


Figure 16. Satisfaction of circle criteria with 60 kg
图 16. 负载 60 kg 之 GMB 与临界圆

进行补偿,藉由设计一个满足性能指针与强健性的目标回授回路(target feedback loop),然后透过补偿器使受控系统的开路函数(GK)回复到目标回路,则此受控系统在具有外在参数或不确定因素的扰动下仍能维持强健性。

至于系统的不确定项使用扩增转换将所仿真之非线性系统化为标准 Lu're type 型式,并界定非线性不确定项之边界所形成的临界圆(critical circle),最后使用多变量圆稳定准则(multivariable circle criterion)之限制条件,以奈氏图(Nyquist plot)之轨迹来判断系统之不确定非线性项可允许的范围。

最后,本研究以计算机仿真非线性机械手臂系统,来验证此综合控制设计法在抵抗各种不确定因素下的强健性与满足性能规范。

参考文献 (References)

- [1] H. Nyquist. Regeneration theory. Bell System Technical Journal, 1932, 11: 126-147.
- [2] J. G. Ziegler, N. B. Nichols. Process lags in automatic control circuits. ASME Transactions, 1943, 65: 433-444.
- [3] W. R. Evans. Graphical analysis of control systems. AIEE Transactions on Military Electronics, 1948, 8: 81-93.
- [4] T. W. Anderson. The statistical analysis of time series. New York: John Wiley and Sons, 1971.
- [5] R. E. Kalman. Contributions to the theory of optimal control. Boletín de la Sociedad Matemática, 1960, 5: 112-119.
- [6] M. G. Safonov and M. Athans. Gain and phase margin for multi-loop. LQG regulators. IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, AC-22(2): 173-178.
- [7] H. H. Rosenbrock, A. G. J. MacFarlane. State-space and multivariable theory. IEEE, Journals & Magazines, 1972: 583-584.
- [8] J. B. Cruz, W. R. Perkins. A new approach to the sensitivity problem in: Multivariable feedback system design. IEEE TAC, 1964, 9: 216-223.
- [9] J.C. Doyle, G. Stein. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. IEEE TAC, 1981, 26: 4-16.
- [10] G. Zames. On H_∞ optimal sensitivity theory for SISO feedback systems. IEEE Transactions on Automatic Control, 1984, 29(1): 9-16.
- [11] S. Li. Applied nonlinear control. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2005.
- [12] C. N. Hwang. Formulation of H_2 and H_∞ optimal control problems: A variational approach. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 1993, 16(6): 853-866.
- [13] H. K. Khalil. Nonlinear systems. 2nd Edition, Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1996.