Dynamical Systems and Control 动力系统与控制, 2015, 4(4), 85-92
Published Online October 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/dsc
http://dx.doi.org/10.12677/dsc.2015.44011

The Existence of Global Solution of Fractional Nonlinear Schrödinger Equation

Lingyu Jin, Lihong Lan

College of Mathematics and Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou Guangdong
Email: jinlingyu300@126.com

Received: Sep. 15th, 2015; accepted: Oct. 6th, 2015; published: Oct. 9th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

Abstract

In this paper, we deal with the global smooth solution for the fractional nonlinear Schrödinger equation with period boundary value. Through some preliminary lemmas of the estimates for composite functions, taking the prior estimate method, the existence of the solution is obtained.

Keywords

Fractional Nonlinear Schrödinger Equation, Global Solution, Priori Estimate

分数阶非线性Schrödinger方程解的存在性

金玲玉，蓝丽红

华南农业大学数学与信息学院，广东 广州
Email: jinlingyu300@126.com

收稿日期：2015年9月15日；录用日期：2015年10月6日；发布日期：2015年10月9日

摘　要

本文考虑具有周期边界条件的分数阶非线性Schrödinger方程的初值问题，通过引入复合函数的范数估计等引理，并采用先验估计方法得到问题解的存在性。

文章引用: 金玲玉, 蓝丽红. 分数阶非线性 Schrödinger 方程解的存在性[J]. 动力系统与控制, 4(4): 85-92.
http://dx.doi.org/10.12677/dsc.2015.44011

关键词

分数阶非线性Schrödinger方程，光滑解，先验估计

1. 引言

Schrödinger 方程是量子力学中的基本方程，经典的 Schrödinger 方程[1]是基于布朗型的积分路径得到的，将布朗型的积分路径替换为 Lévy 型的量子力学路径时，则得到分数阶的 Schrödinger 方程[2]。

本文主要考虑如下具有周期边界条件的分数阶非线性 Schrödinger 方程：

$$\begin{cases} iu_t + (-\Delta)^{\alpha} u + \beta |u|^{\rho} u = 0, & x \in R^n, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in R^n, \\ u(x + 2\pi e_i, t) = u(x,t), & x \in R^n, t > 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $e_i = (0,\cdots,0,1,0,\cdots,0), i = 1,\cdots,n$ 是 R^n 中的一组标准正交基，$i = \sqrt{-1}$ 为虚数单位，$\alpha \in (0,1)$，$\beta \in R, \beta \neq 0$ 且 $\rho > 0$ 为实数。记 $\Omega = (0,2\pi)\times\cdots\times(0,2\pi) \subset R^n$。

当 $\alpha = 1$ 时，方程(1.1)为经典的非线性 Schrödinger 方程，并在近几十年得到了大量广泛的研究[3]。文献[4]证明了其初边值问题弱解的存在唯一性，其光滑解的整体存在性则可以参考文献[5]。郭柏灵、韩永前和辛杰证明了分数阶非线性 Schrödinger 方程(1.1)的光滑解的存在唯一性[6]，而其中 $\alpha > \frac{n}{2}$ 且 β，ρ 满足如下条件“若 ρ 为偶数，当 $\beta > 0$ 时，$\rho > 0$；当 $\beta < 0$，则 $0 < \rho < \frac{4\alpha}{n}$；若 ρ 不是偶数时，当 $\beta > 0$ 时，$\rho > 2[\alpha]+1$；当 $\beta < 0$ 时，$2[\alpha]+1 < \rho < \frac{4\alpha}{n}$”。本文，在 β, ρ 满足更弱的条件下，得到了解的存在性。

2. 记号及主要结果

我们先给出一些符号和说明。由于 u 是周期函数，此时可以将 u 利用傅里叶级数展开：

$$u = \sum_{k\in Z^n} a_k e^{i\langle k,x\rangle},$$

其中，a_k 是 u 的傅里叶系数。从而

$$\partial_{x_j} u = \sum_{k\in Z^n} ik_j a_k e^{i\langle k,x\rangle}.$$

此时可以将分数阶拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\alpha} u$ 表示为

$$(-\Delta)^{\alpha} u = \sum_{k\in Z^n} |k|^{2\alpha} a_k e^{i\langle k,x\rangle}.$$

令 A 表示如下集合：

$$A = \left\{ u \,\middle|\, u = \sum_{k\in Z^n} a_k e^{i\langle k,x\rangle}, \sum_{k\in Z^n} |k|^{2\alpha} a_k^2, \sum_{k\in Z^n} a_k^2 < \infty \right\}.$$

令 H^{α} 表示集合 A 在如下范数下的完备化，

$$\|u\|_{H^{\alpha}} = \left(\sum_{k\in Z^n} \left(|k|^{\alpha} a_k \right)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k\in Z^n} a_k^2 \right)^{1/2}.$$

显然，H^α 为 Banach 空间。

下面，函数空间 $L^2(\Omega)$ 的范数常记为 $\|\cdot\|$，其内积用 $(\cdot,\cdot)$ 表示；$L^p(\Omega)$ 的范数记为 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$。显然 $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}=\|\cdot\|$。令 $H^{-\alpha}$ 表示 H^α 的对偶空间。为了研究问题(1.1)，引入如下 Banach 空间 $V=H^\alpha(\Omega)\bigcap L^{\rho+2}(\Omega)$，其范数为

$$\|v\|_V=\|v\|_{H^\alpha(\Omega)}+\|v\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}.$$

令 X 为具有范数 $\|\cdot\|_X$ 的 Banach 空间。

定义： 记 $L^p(0,T;X)$ 为所有可测函数 $f:[0,T]\to X$ 的集合，其范数表示为

$$\|f\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T\|f\|_X^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}},\quad 1\le p<\infty,$$

且当 $p=\infty$ 时，

$$\|f\|_{L^\infty(0,T;X)}=\limsup_{0\le t\le T}\|f\|_X.$$

记 $C([0,T];X)$ 为所有连续函数 $f:[0,T]\to X$ 的集合，其范数表示为

$$\|f\|_{C([0,T];X)}=\max_{0\le t\le T}\|f\|_X.$$

令 $T>0$ 是一个正常数，$C(A)$ 为依赖 A 的任意正常数，C 表示任意的正常数，在不同的地方具体的值不一样。

本文的主要结果是：

定理 2.1. 令 $\alpha>\frac{n}{2}$ 且当 $\beta>0$ 时，$\rho>0$；当 $\beta<0$ 时，$0<\rho<\frac{4\alpha}{n}$，则对任意的 $u_0\in H^{4\alpha}(\Omega)$，则方程(1.1)存在唯一的整体解 $u=u(t,x)$ 使得

$$u\in L^\infty\left(0,T;H^{4\alpha}(\Omega)\right),\quad u_t\in L^\infty\left(0,T;H^{2\alpha}(\Omega)\right).$$

3. 主要工作

下面将用到如下的引理：

引理 3.1. [3] 如果 $|\beta_1|+\cdots+|\beta_k|=k$，则

$$\left\|D^{\beta_1}f_1\cdots D^{\beta_\mu}f_\mu\right\|_{L^2}\le C\sum_\nu\left(\|f_1\|_{L^\infty}\cdots\|\widehat{f}_\nu\|_{L^\infty}\cdots\|f_\mu\|_{L^\infty}\right)\|f\|_{H^k}.$$

其中，$f=(f_1,\cdots,f_\mu)$，且 $\widehat{\ }$ 表示在表达式中去掉这一项。

引理 3.2. [7] 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x)$ 都具有 n 阶导数，那么，$f_1f_2\cdots f_m$ 也具有 n 阶导数且有公式如下：

$$(f_1f_2\cdots f_m)^{(n)}=n!\sum\frac{f_1^{(p_1)}}{p_1!}\cdot\frac{f_2^{(p_2)}}{p_2!}\cdots\frac{f_m^{(p_m)}}{p_m!}.$$

其中，$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 是 m 个非负整数，求和 Σ 是对所有适合 $p_1+p_2+\cdots+p_m=n$ 的 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 进行的。

引理 3.3. [6] 设 $\alpha>0$，$\rho>0$，如果 $u=u(t,x)$ 为方程(1.1)的解，则

$$\|u(t)\|=\|u_0\|.\tag{3.1}$$

引理 3.4. [6] 令 $\alpha>0$。当 $\beta>0$ 时，设 $\rho>0$；当 $\beta<0$ 时，设 $0<\rho<\frac{4\alpha}{n}$，则方程的解 $u=u(t,x)$ 满

足如下的先验估计：

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u\right\|+\|u\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}\right)\le C\left(\|u_0\|_{H^{\alpha}(\Omega)},\|u_0\|_{L^{\rho+2}(\Omega)}\right).$$

引理 3.5. [6] 令 $\alpha>\frac{n}{2}$，当 $\beta>0$ 时，设 $\rho>0$；当 $\beta<0$ 时，设 $0<\rho<\frac{4\alpha}{n}$，则 u 满足

$$\sup_{0\le t\le T}\left(\|u_t\|+\left\|(-\Delta)^{\alpha}u\right\|\right)\le C\left(\|u_0\|_{H^{2\alpha}(\Omega)}\right). \tag{3.2}$$

下面证明我们在 β,ρ 满足比文献[6]中更弱条件下对应的先验估计。

引理 3.6. 设 $\alpha>\frac{n}{2}$， $\rho>0$，则方程的解 $u=u(t,x)$ 满足先验估计：

$$\sup_{0\le t\le T}\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|\le C\left(\|u_0\|_{H^{3\alpha}(\Omega)}\right).$$

证明： 将方程(1.1)关于时间 t 微分，乘以 $\bar{u}_{tt}$，关于空间变量 x 在 Ω 积分并取其实部可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^2+2Re\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\beta|u|^{\rho}u\right),u_{tt}\right)=0.$$

由于

$$2Re\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\beta|u|^{\rho}u\right),u_{tt}\right)=\beta\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\int_{\Omega}|u|^{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\rho\beta}{4}\int_{\Omega}|u|^{\rho-2}\left(u^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{u}_t^2+\bar{u}^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_t^2\right)\mathrm{d}x.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^2+\beta\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\int_{\Omega}|u|^{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_t|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\rho\beta}{4}\int_{\Omega}|u|^{\rho-2}\left(u^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{u}_t^2+\bar{u}^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_t^2\right)\mathrm{d}x=0.$$

由此可知

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^2+\int_{\Omega}\beta\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^{\rho}|u_t|^2\right)\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\frac{\rho\beta}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^{\rho-2}\left(u^2\bar{u}_t^2+\bar{u}^2u_t^2\right)\right)\mathrm{d}x\\&=+\beta\left(\frac{\rho}{2}+1\right)\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^{\rho}\right)|u_t|^2\,\mathrm{d}x+\frac{\rho\beta}{4}\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^{\rho-2}u^2\right)\bar{u}_t^2\mathrm{d}x+\frac{\rho\beta}{4}\int_{\Omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^{\rho-2}\bar{u}^2\right)u_t^2\mathrm{d}x\\&\le C\int_{\Omega}|u|^{\rho-1}|u_t|^3\,\mathrm{d}x\le C|u|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\rho-1}|u_t|_{L^3(\Omega)}^3\le C|u_t|_{L^3(\Omega)}^3.\end{aligned} \tag{3.3}$$

令 $\theta=\frac{n}{6\alpha}<\frac{1}{3}$，则 $\frac{1}{3}=\theta\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{n}\right)+(1-\theta)\frac{1}{2}$。由 Gagliardo-Nirenberg 不等式以及不等式(3.2)可知

$$\|u_t\|_{L^3(\Omega)}^3\le C\|u_t\|^{3(1-\theta)}\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^{3\theta}\le C\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^{3\theta}\le C\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^2+C. \tag{3.4}$$

利用不等式(3.3)和(3.4)得

$$\begin{aligned}&\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^2+\int_{\Omega}\beta\left(\frac{\rho}{2}+1\right)|u|^{\rho}|u_t|^2\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega}\frac{\rho\beta}{4}|u|^{\rho-2}\left(u^2\bar{u}_t^2+\bar{u}^2u_t^2\right)\mathrm{d}x\\&\le\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t(x,0)\right\|^2+\int_{\Omega}C|u_0|^{\rho}|u_t(x,0)|^2\,\mathrm{d}x+C\int_0^t\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^2\mathrm{d}s+Ct.\end{aligned} \tag{3.5}$$

由引理 3.5 可得，

$$C\int_{\Omega}|u_0|^{\rho}|u_t(x,0)|^2\,\mathrm{d}x\le C\|u_0\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\rho}\|u_t(x,0)\|^2\le C\|u_0\|_{H^{2\alpha}(\Omega)}, \tag{3.6}$$

与

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \beta\left(\frac{\rho}{2}+1\right)|u|^\rho |u_t|^2 \mathrm{d}x+\int_\Omega \frac{\rho\beta}{4}|u|^{\rho-2}\left(u^2\bar{u}_t^2+\bar{u}^2u_t^2\right)\mathrm{d}x \\ &\le C\int_\Omega |u|^\rho |u_t|^2 \mathrm{d}x \le C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^\rho \|u_t\|^2 \le C\|u_t\|^2,\end{aligned} \tag{3.7}$$

而对于(3.5)式右边第一项，先由方程(1.1)得

$$\left\|(-\Delta)^{\alpha/2} u_t(x,0)\right\| \le \left\|(-\Delta)^{3\alpha/2} u(x,0)\right\| + \left\|(-\Delta)^{\alpha/2}\left(\beta|u_0|^\rho\right)u_0\right\|,$$

从而可知

$$\left\|(-\Delta)^{\alpha/2} u_t(x,0)\right\|^2 \le C\|u_0\|_{H^{3\alpha}(\Omega)} + C\left\||u_0|^\rho u_0\right\|_{H^{[\alpha]+1}(\Omega)}.$$

由引理 3.1 和引理 3.2 可得到

$$\begin{aligned}C\left\||u_0|^\rho u_0\right\|_{H^{[\alpha]+1}(\Omega)} &\le C\left\|D^{[\alpha]+1}|u_0|^{\rho+1}\right\|_{L^2(\Omega)}+C \\ &\le C\left\|\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_{\rho+1}} D^{(r_1)}u_0\cdot D^{(r_2)}u_0\cdots D^{(r_{\rho+1})}u_0\right\|_{L^2(\Omega)}+C \\ &\le C\|u_0\|_{H^{[\alpha]+1}(\Omega)}\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^\rho + C.\end{aligned}$$

又因为当 $n\ge 1$ 时，$\alpha>\frac{n}{2}\ge\frac{1}{2}$，有 $3\alpha\ge[\alpha]+1$，所以有 $\|u_0\|_{H^{[\alpha]+1}(\Omega)}\le C\|u_0\|_{H^{3\alpha}(\Omega)}$。进而可知

$$\left\|(-\Delta)^{\alpha/2} u_t(x,0)\right\|^2 \le C\left(\|u_0\|_{H^{3\alpha}(\Omega)}\right). \tag{3.8}$$

综合(3.5)~(3.8)式，并利用 Gronwall 不等式可得

$$\left\|(-\Delta)^{\alpha/2} u_t\right\|^2 \le C\left(\|u_0\|_{H^{3\alpha}(\Omega)}\right)+C\int_0^t\left\|(-\Delta)^{\alpha/2} u_t\right\|^2 \mathrm{d}s \le C\left(\|u_0\|_{H^{3\alpha}(\Omega)}\right).$$

故引理 3.6 得证。

引理 3.7. 设 $\alpha>\frac{n}{2}$，$\rho>0$。则方程(1.1)的解 $u=u(t,x)$ 满足估计：

$$\sup_{0\le t<T}\left(\|u_{tt}\|+\left\|(-\Delta)^\alpha u_t\right\|\right)\le C\left(\|u_0\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right).$$

证明： 将方程(1.1)关于时间 t 二次微分，乘以 $\bar{u}_{tt}$，并关于空间变量 x 在 Ω 积分取其虚部可知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_{tt}\|^2 + Im\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\beta|u|^\rho u\right),u_{tt}\right)=0. \tag{3.9}$$

由于

$$\begin{aligned}Im\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\beta|u|^\rho u\right),u_{tt}\right) &= Im\left(\frac{\rho^2}{2}+\rho\right)\beta\left(|u|^{\rho-2}|u_t|^2 u,u_{tt}\right)+Im\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\rho}{2}\right)\beta\left(|u|^{\rho-2}u_t^2\bar{u},u_{tt}\right) \\ &+Im\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho}{2}\right)\beta\left(|u|^{\rho-4}u_t^2u^3,u_{tt}\right)+Im\frac{\beta\rho}{2}\left(|u|^{\rho-2}u^2\bar{u}_{tt},u_{tt}\right).\end{aligned} \tag{3.10}$$

(3.10)式右端第一项可以估计为

$$Im\left(\frac{\rho^2}{2}+\rho\right)\beta\left(|u|^{\rho-2}|u_t|^2 u,u_{tt}\right)$$
$$\le C\int_\Omega |u|^{\rho-1}|u_t|^2|u_{tt}|\mathrm{d}x \le C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}^{\rho-1}\|u_t\|_{L^4(\Omega)}^2\|u_{tt}\| \le C\|u_t\|_{L^4(\Omega)}^4+C\|u_{tt}\|^2,$$

同理，(3.10)式右端第二项和第三项可以估计为

$$Im\left(\frac{\rho^2}{4}+\frac{\rho}{2}\right)\beta\left(|u|^{\rho-2}u_t^2\overline{u},u_{tt}\right)+Im\left(\frac{\rho^2}{4}-\frac{\rho}{2}\right)\beta\left(|u|^{\rho-4}u_t^2u^3,u_{tt}\right)\le C\|u_t\|_{L^4(\Omega)}^4+C\|u_{tt}\|^2,$$

(3.10)式最后一项可以估计为

$$Im\frac{\beta\rho}{2}\left(|u|^{\rho-2}u^2\overline{u}_{tt},u_{tt}\right)\le C\|u_{tt}\|^2,$$

因此

$$Im\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\beta|u|^\rho u\right),u_{tt}\right)\le C\|u_t\|_{L^4(\Omega)}^4+C\|u_{tt}\|^2. \tag{3.11}$$

由(3.9)~(3.11)式可得

$$\|u_{tt}\|^2\le C\int_0^t\|u_t\|_{L^4(\Omega)}^4\mathrm{d}s+C\int_0^t\|u_{tt}\|^2\mathrm{d}s+\|u_{tt}(x,0)\|^2. \tag{3.12}$$

令 $\theta=\frac{n}{8\alpha}<\frac{1}{4}$，则 $\frac{1}{4}=\theta\left(\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{n}\right)+(1-\theta)\frac{1}{2}$，由此利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式以及引理 3.5 和引理 3.6 可得

$$\|u_t\|_{L^4(\Omega)}\le C\|u_t\|^{1-\theta}\left\|(-\Delta)^{\alpha/2}u_t\right\|^\theta\le C\left(\|u_0\|_{H^{3\alpha}(\Omega)}\right).$$

利用方程(1.1)以及引理 3.5 可知

$$\begin{aligned}
\|u_{tt}(x,0)\| &\le \left\|(-\Delta)^\alpha u_t(x,0)\right\|+\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\beta|u_0|^\rho u_0\right)\right\| \\
&=\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\beta|u_0|^\rho u_0\right)\right\|+\left\|(-\Delta)^\alpha\left((-\Delta)^\alpha u_0+\beta|u_0|^\rho u_0\right)\right\| \\
&\le C\left\|(-\Delta)^{2\alpha}u_0\right\|+C\left\|(-\Delta)^\alpha\left(\beta|u_0|^\rho u_0\right)\right\|+C\left\||u_0|^\rho|u_t(x,0)|\right\| \\
&\le C\left(\|u_0\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right)+C\left\|(-\Delta)^\alpha\left(|u_0|^\rho u_0\right)\right\|+C\|u_t(x,0)\| \\
&\le C\left(\|u_0\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right)+C\left\|(-\Delta)^\alpha\left(|u_0|^\rho u_0\right)\right\|.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

而由引理 3.1 和引理 3.2，

$$\begin{aligned}
\left\|(-\Delta)^\alpha\left(|u_0|^\rho u_0\right)\right\| &\le C\left\|(-\Delta)^{[\alpha]+1}\left(|u_0|^\rho u_0\right)\right\|\le C\left\|D^{2[\alpha]+2}|u_0|^{\rho+1}\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le C\left\|\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_{\rho+1}}D^{(r_1)}u_0\cdot D^{(r_2)}u_0\cdots D^{(r_{\rho+1})}u_0\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\le C\|u_0\|_{H^{2[\alpha]+2}}\|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}^\rho.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

又因为当 $n\ge1$ 时，$\alpha>\frac{n}{2}\ge\frac{1}{2}$，有 $4\alpha\ge2[\alpha]+2$，所以有 $\|u_0\|_{H^{2[\alpha]+2}(\Omega)}\le C\|u_0\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}$。则由(3.14)式可知

$$\left\|(-\Delta)^{\alpha}\left(\left|u_{0}\right|^{\rho} u_{0}\right)\right\| \leq C\left\|u_{0}\right\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}.$$

从而(3.13)式变为

$$\left\|u_{tt}(x,0)\right\| \leq C\left(\left\|u_{0}\right\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right).$$

利用(3.12)式及 Gronwall 不等式进而推知

$$\left\|u_{tt}\right\|^{2} \leq C\int_{0}^{t}\left\|u_{tt}\right\|^{2} \mathrm{d}s+C\left(\left\|u_{0}\right\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right) \leq C\left(\left\|u_{0}\right\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right).$$

又由于

$$\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^{\rho} u\right)\right\|=\left\|\frac{\rho}{2}|u|^{\rho-2}\left(u \bar{u}_{t}+\bar{u} u_{t}\right) u+|u|^{\rho} u_{t}\right\| \leq C\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\rho}\left\|u_{t}\right\| \leq C\left(\left\|u_{0}\right\|_{H^{2\alpha}(\Omega)}\right).$$

利用方程(1.1)，进一步可得估计

$$\left\|(-\Delta)^{\alpha} u_{t}\right\|=\left\|-iu_{tt}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\beta|u|^{\rho} u\right)\right\| \leq C\left\|u_{tt}\right\|+C\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^{\rho} u\right)\right\| \leq C\left(\left\|u_{0}\right\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right).$$

故而

$$\sup_{0 \leq t \leq T}\left(\left\|u_{tt}\right\|+\left\|(-\Delta)^{\alpha} u_{t}\right\|\right) \leq C\left(\left\|u_{0}\right\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right).$$

证毕。

引理 3.8. 设 $\alpha>\frac{n}{2}$， $\rho>0$。则方程(1.1)的解 $u=u(t,x)$ 满足先验估计：

$$\left\|(-\Delta)^{2\alpha} u\right\| \leq C\left(\left\|u_{0}\right\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right).$$

证明：利用方程(1.1)以及引理 3.7 可知

$$\begin{aligned}\left\|(-\Delta)^{2\alpha} u\right\| &=\left\|(-\Delta)^{\alpha}\left(-iu_{t}-\beta|u|^{\rho} u\right)\right\| \leq C\left\|(-\Delta)^{\alpha} u_{t}\right\|+C\left\|(-\Delta)^{\alpha}\left(|u|^{\rho} u\right)\right\| \\ &\leq C\left(\left\|u_{0}\right\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right)+C\left\|(-\Delta)^{\alpha}\left(|u|^{\rho} u\right)\right\|.\end{aligned} \tag{3.15}$$

现在分两种情况来考虑(3.15)式右端第二项的估计。

先考虑 $\alpha \neq 1$ 的情形。由引理 3.1 和引理 3.2 可推知

$$\begin{aligned} C\left\|(-\Delta)^{\alpha}\left(|u|^{\rho} u\right)\right\| &\leq C\left\|(-\Delta)^{[\alpha]+1}\left(|u|^{\rho} u\right)\right\| \leq C\left\|D^{[2\alpha]+2}|u|^{\rho+1}\right\|_{L^{2}(\Omega)} \\ &\leq C\left\|\sum_{r_{1}+r_{2}+\cdots+r_{\rho+1}} D^{(r_{1})} u \cdot D^{(r_{2})} u \cdots D^{(r_{\rho+1})} u\right\|_{L^{2}(\Omega)} \\ &\leq C\|u\|_{H^{2[\alpha]+2}(\Omega)}\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\rho} \leq C\|u\|_{H^{2[\alpha]+2}(\Omega)}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

因为当 $n \geq 1$ 时， $\alpha>\frac{n}{2} \geq \frac{1}{2}(\alpha \neq 1)$，有 $4\alpha \geq 2[\alpha]+2$，所以由 Gagliardo-Nirenberg 不等式和引理 3.3 得

$$C\|u\|_{H^{2[\alpha]+2}(\Omega)} \leq C\left\|(-\Delta)^{2\alpha} u\right\|^{\theta}\|u\|^{1-\theta} \leq \frac{1}{2}\left\|(-\Delta)^{2\alpha} u\right\|+C,$$

其中 θ 满足

$$\frac{1}{2}=\frac{2[\alpha]+2}{n}+\theta\left(\frac{1}{2}-\frac{4\alpha}{n}\right)+(1-\theta)\frac{1}{2},\ \left(\theta=\frac{2[\alpha]+2}{4\alpha}<1\right).$$

联合(3.15)~(3.16)式及上式得

$$\left\|(-\Delta)^{2\alpha}u\right\|\le C\left(\|u_0\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right). \tag{3.17}$$

当$\alpha=1$的情形，

$$C\left\|(-\Delta)^{\alpha}\left(|u|^{\rho}u\right)\right\|=C\left\|(-\Delta)\left(|u|^{\rho}u\right)\right\|\le C\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\rho}\|\Delta u\|+C\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}^{\rho-1}\left\||Du|^2\right\|\le C\|\Delta u\|+C\|Du\|_{L^4(\Omega)}^2. \tag{3.18}$$

令$\sigma=\frac{2}{4\alpha}<1$，则$\frac{1}{2}=\frac{2}{n}+\sigma\left(\frac{1}{2}-\frac{4\alpha}{n}\right)+(1-\sigma)\frac{1}{2}$，由此利用 Gagliardo-Nirenberg 不等式及引理 3.3 可得

$$C\|\Delta u\|\le C\left\|(-\Delta)^{2\alpha}u\right\|^{\sigma}\|u\|^{1-\sigma}\le\frac{1}{4}\left\|(-\Delta)^{2\alpha}u\right\|+C. \tag{3.19}$$

令$\delta=\frac{n}{16\alpha-4}<\frac{1}{4}$，则$\frac{1}{4}=\delta\left(\frac{1}{2}-\frac{4\alpha-1}{n}\right)+(1-\delta)\frac{1}{2}$。再由 Gagliardo-Nirenberg 不等式和引理 3.5 推得

$$\begin{aligned}C\|Du\|_{L^4(\Omega)}^2&\le C\left\|(-\Delta)^{2\alpha}u\right\|^{2\delta}\|Du\|^{2(1-\delta)}\\&\le C\left\|(-\Delta)^{2\alpha}u\right\|^{2\delta}\left\|(-\Delta)^{\alpha}u\right\|^{2(1-\delta)}\le\frac{1}{4}\left\|(-\Delta)^{2\alpha}u\right\|+C.\end{aligned} \tag{3.20}$$

综合(3.18)~(3.20)及(3.15)式知

$$\left\|(-\Delta)^{2\alpha}u\right\|\le C\left(\|u_0\|_{H^{4\alpha}(\Omega)}\right). \tag{3.21}$$

从而由(3.17)式和(3.21)式可知引理成立。

定理 2.1 的证明：

根据引理 3.1~3.8，采用 Galerkin 近似逼近方法(参见文献[6])可完成定理 2.1 的证明。

4. 结论

在本文中，我们主要讨论了分数阶薛定谔方程，在参数满足比前人更弱的条件假设下，我们得到了解的存在性。文章主要采用能量方法，利用插值不等式得到解的先验估计，采用 Galerkin 方法得到解的存在性。下一步我们将对带耗散性方程的分数阶薛定谔方程解的渐近行为进行研究。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(No. 11101160, No. 11271141)。

参考文献 (References)

[1] Feynman, R.P. and Hibbs, A.R. (1965) Quantum mechanics and path integrals. McGraw-Hill, New York.

[2] Laskin, N. (2002) Fractional Schrödinger equation. *Physical Review E*, **66**, Article ID: 056108. http://dx.doi.org/10.1103/physreve.66.056108

[3] 郭柏灵，蒲学科，黄凤辉 (2011) 分数阶偏微分方程及其数值解. 科技出版社，北京, 99-120.

[4] 郭柏灵 (1989) 非线性边值问题的一些解法. 汪礼礽，译，中山大学出版社，广州, 335-340.

[5] 郭柏灵 (1995) 非线性演化方程. 上海科学技术出版社，上海, 30-96.

[6] Guo, B.L., Han, Y.Q. and Xin, J. (2008) Existence of the global smooth solution to the period boundary value problem of fractional nonlinear Schrödinger equation. *Applied Mathematics and Computation*, **204**, 468-477. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2008.07.003

[7] 宋道金，赵文玲 (1995) 多个函数乘积的高阶导数通式. *淄博师专学报*, **4**, 10-11.