Dynamical Systems and Control 动力系统与控制, 2016, 5(1), 1-10
Published Online January 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/dsc
http://dx.doi.org/10.12677/dsc.2016.51001

Multistability of a Class of Fuzzy Neural Networks

Xiaoyun Liu

College of Mathematics and Statistics, Hubei Normal University, Huangshi Hubei
Email: 18271695003@163.com

Received: Dec. 20th, 2015; accepted: Jan. 10th, 2016; published: Jan. 14th, 2016

Abstract

In this article, some sufficient conditions are obtained to guarantee that the n-dimensional fuzzy neural network can have not more than 3^n equilibrium points by using the method of the compression mapping principle and interval segmentation. Moreover, there are 2^n locally exponentially stable equilibrium points. These conditions can be developed from the improvement and extension of the existed ones. The validity of theoretical results is shown in one illustrative example.

Keywords

Fuzzy Neural Network, Multistability, Equilibrium Point, Locally Exponentially Stable

一类模糊神经网络的多稳定

刘小云

湖北师范学院，数学与统计学院，湖北 黄石
Email: 18271695003@163.com

收稿日期：2015年12月20日；录用日期：2016年1月10日；发布日期：2016年1月14日

摘　要

在这篇文章中，主要应用了压缩映射原理以及区间分割的方法，获得了一些保证n维模糊神经网络有不

文章引用：刘小云. 一类模糊神经网络的多稳定[J]. 动力系统与控制, 2016, 5(1): 1-10.
http://dx.doi.org/10.12677/dsc.2016.51001

超过3^n个平衡点的简洁条件，其中，有2^n个局部指数稳定的平衡点。这些条件改进和拓展了现有的一些结果。此外，相关数值算例说明了本文理论结果的有效性。

关键词

模糊神经网络，多稳定，平衡点，局部指数稳定

1. 引言

近年来，由于模糊神经网络在各种领域的重要应用，引来越来越多的人去关注它。1965 年，美国加利福尼亚大学 L.A.Zadeh 教授发表了著名的论文模糊集(Fuzzy Sets)，开创了模糊理论的先河，它主要解决实际生活中不确定性信息的处理问题。1966 年，P.N.Maribos 发表了模糊逻辑的研究报告，真正标志着模糊逻辑的诞生。1974 年，在加利福尼亚大学的美日研究班上，开展了有关“模糊集合及其应用”的国际学术交流。1975 年，S.C.Lee 和 E.T.Lee 在 mathematical biosciences 杂志上发表了“Fuzzy Neural Network”，对模糊神经网络进行了明确的定义。1978 年，在国际上开始发行《Fuzzy Sets and Systems》专业杂志。1984 年成立了 International Fuzzy System Association，成功召开了几届关于模糊系统的会议。

尽管一直有不少学者努力在从事这方面的研究，但模糊集理论真正被人广泛接受是在二十世纪八十年代初。1992 年，Kosko 出版的该领域的第一本专著《Neural Network and Fuzzy Systems》，Pal 等人提出的模糊感知器，Carpenter 和 Grossberg 提出的模糊 ART 网以及 1993 年 Simpson 提出的 Min-Max 神经网络都很著名，它们主要应用在模式识别领域。在 1996 年，Yang 在[1]-[3]中，展示出模糊神经网络，指出模糊神经网络是将模糊逻辑和传统神经网络相结合的产物，它充分考虑了模糊系统和神经网络的互补性，具有表达和处理确定信息以及模糊信息的能力等特点。

近二十年，是模糊神经网络发展的黄金期，大量专家和学者研究了模糊神经网络的学习算法、结构及确定，模糊规则的提取与细化以及模糊神经网络在自适应控制、预测控制中的应用等。在模糊神经网络的稳定性这一块主要集中在对细胞神经网络、Hopfield 神经网络等的单稳定的研究。比如，一些学者对于 *T-S* 模糊控制系统的稳定性问题进行了分析，并得到了大量的相关结果[4]-[8]。而对于模糊神经网络多稳定的研究是非常匮乏的，尤其在了解了多稳定性的广泛应用[9]-[11]后，更加确定了研究模糊神经网络多稳定的必要性。受曾志刚教授在文献[12]中对细胞神经网络的多稳定研究的启发，本文将推广到对模糊神经网络(1)的多稳定的分析，主要应用压缩映射原理得出了系统有 3^n 个孤立的平衡点，其中有 2^n 个平衡点是局部指数稳定的。

2. 问题描述

考虑下面的模糊神经网络模型：

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = {} & -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n}\xi_{ij} f\left(x_j(t)\right) + \bigwedge_{j=1}^{n}\gamma_{ij} f\left(x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu_j + G_i \\ & + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{ij}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{n}\delta_{ij} f\left(x_j(t-\tau_{ij}(t)\right) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{ij}\mu_j\end{aligned} \tag{1}$$

其中，$i = 1,2,\cdots,n$，x_i 表示第 i 个神经元的状态，ξ_{ij} 是第 i 个单位元上的第 j 个单元的连接权重，γ_{ij} 是模糊反馈最小模板的元素，时滞量 $\tau_{ij}(t) \le \tau$ (常数)，b_{ij} 是前馈模板的元素；第 i 个神经元的输入和偏置分别用 μ_i 和 G_i 表示，T_{ij} 是模糊前反馈最小模板的元素；δ_{ij} 是模糊反馈最大模板的元素，H_{ij} 模糊前反馈最大模板的元素；模糊和与模糊或分别用 $\wedge$ 和 $\vee$ 表示，f 是激励函数。

对 $\forall r \in R$，

$$f(r)=\frac{1}{2}\left(|r+1|-|r-1|\right) \tag{2}$$

将 $(1,+\infty),[-1,1],(-\infty,-1)$ 分别用以下方式表示出来：

$$(1,+\infty)=(-\infty,-1)^0\times[-1,1]^0\times(1,+\infty)^1;$$

$$[-1,1]=(-\infty,-1)^0\times[-1,1]^1\times(1,+\infty)^0;$$

$$(-\infty,-1)=(-\infty,-1)^1\times[-1,1]^0\times(1,+\infty)^0,$$

则全体实数 R 可以表示为 $R=(-\infty,+\infty)=(-\infty,-1)\cup[-1,1]\cup(1,+\infty)$，所以 $(-\infty,+\infty)^n$ 可以被分为 3^n 个子空间：

$$\begin{aligned}\Omega=\Bigg\{&\prod_{i=1}^{n}(-\infty,-1)^{\beta_1^{(i)}}\times[-1,1]^{\beta_2^{(i)}}\times(1,+\infty)^{\beta_3^{(i)}},\left(\beta_1^{(j)},\beta_2^{(j)},\beta_3^{(j)}\right)=(1,0,0)\\&\text{或}(0,1,0)\text{或}(0,0,1),\ j=1,2,\cdots,n\Bigg\}\end{aligned} \tag{3}$$

则 Ω 可以被分为以下三个子区域：

$$\Omega^{(1)}=\left\{[-1,1]^n\right\}$$

$$\Omega^{(2)}=\left\{\prod_{i=1}^{n}(-\infty,-1)^{\beta^{(i)}}\times(1,+\infty)^{1-\beta^{(i)}},\ \beta^{(j)}=1\text{或}0,\ j=1,2,\cdots,n\right\}$$

$$\Omega^{(3)}=\Omega-\Omega^{(1)}-\Omega^{(2)}$$

定义 1：在区域 D 中，如果存在 $\alpha>0,\beta>0$ 使得

$$\left\|x(t;t_0,\phi)-x^*\right\|\le\beta\|\phi\|_{t_0}\exp\left\{-\alpha(t-t_0)\right\}$$

则(1)式的平衡点 x^* 是局部指数稳定的，其中，在初始条件 $\phi(v)\in C\left(\left[t_0-\tau,t_0\right],D\right)$ 下，$x(t;t_0,\phi)$ 是模糊神经网络(1)的一个解，并且 D 是平衡点 x^* 的局部指数吸引域。

引理 1 [3]：假设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $\overline{x}=(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\cdots,\overline{x}_n)^{\mathrm{T}}$ 是模糊神经网络(1)的两个状态，那么有

$$\left|\mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f(x_j)-\mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\alpha_{ij}f(\overline{x}_j)\right|\le\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{ij}|\left|f(x_j)-f(\overline{x}_j)\right| \tag{4}$$

$$\left|\mathop{\vee}_{j=1}^{n}\beta_{ij}f(x_j)-\mathop{\vee}_{j=1}^{n}\beta_{ij}f(\overline{x}_j)\right|\le\sum_{j=1}^{n}|\beta_{ij}|\,f(x_j)-f(\overline{x}_j) \tag{5}$$

引理 2 [1]：D 是 R^n 中的有界闭集，H 是完备度量空间 $(D,\|\bullet,\bullet\|)$ 上的映射，其中对 $\forall x,y\in D$，$\|x,y\|=\max_{1\le i\le n}\left\{|x_i-y_i|\right\}$ 是在 D 上的范数。如果 $H(D)\subset D$ 并且存在正常数 $\alpha<1$ 使得对 $\forall x,y\in D$，$\|H(x)-H(y)\|\le\alpha\|x,y\|$，那么存在 $x_0\in D$ 使得 $H(x_0)=x_0$。

3. 主要结论

3.1. 平衡点个数分析

在文献[12]中，应用区间分割技术研究了细胞神经网络的平衡点的个数，得出细胞神经网络有 3^n 个平衡点。受其启发，可将这种方法应该到本文中，研究模糊神经网络(1)的平衡点的个数。

在本节中，假设 $N_1 \cup N_2 \cup N_3 = \{1,2,\cdots,n\}$， $N_1 \cap N_2 = \varnothing$， $N_1 \cap N_3 = \varnothing$， $N_2 \cap N_3 = \varnothing$。记

$$\Omega_{(N_1,N_2,N_3)} = \left\{x \,\Box\, x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}, x_i \in (-\infty, -1), i \in N_1; x_j \in [-1,1], j \in N_2; x_k \in (1, +\infty), k \in N_3\right\}$$

Ω 是(3)中所定义的形式并且 $\Omega_{(N_1,N_2,N_3)} \in \Omega$。

定理 1：如果对 $\forall i = 1,2,\cdots,n$，满足

$$\xi_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |\xi_{ij}| - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_{ij}| - \sum_{j=1}^{n} |\delta_{ij}| - \sum_{j=1}^{n} \left(|b_{ij}| + |T_{ij}| + |H_{ij}|\right)|\mu_j| - |G_i| > 1$$

则模糊神经网络(1)有且仅有 3^n 个孤立的平衡点。

证明：如果 $x(t), x(t-\tau) \in \Omega_{(N_1,N_2,N_3)}$，那么从(2)和(1)，模糊神经网络(1)等价于以下形式：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} = & -x_i(t) - \sum_{j\in N_1} \xi_{ij} + \sum_{j\in N_2} \xi_{ij} x_j(t) + \sum_{j\in N_3} \xi_{ij} + \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{ij} f\left(x_j\left(t - \tau_{ij}(t)\right)\right) \\ & + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu_j + G_i + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{ij}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{n} \delta_{ij} f\left(x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right)\right) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{ij}\mu_j\end{aligned} \tag{6}$$

因此，模糊神经网络(1)存在平衡点 $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*\right)^{\mathrm{T}}$ 使得当且仅当 $i = 1,2,\cdots,n$ 时有：

$$-x_i^* - \sum_{j\in N_1} \xi_{ij} + \sum_{j\in N_2} \xi_{ij} x_j^* + \sum_{j\in N_3} \xi_{ij} + \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{ij} f\left(x_j^*\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu_j + G_i + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{ij}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{n} \delta_{ij} f\left(x_j^*\right) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{ij}\mu_j = 0 \tag{7}$$

显然，(7)式只有一个解并且(7)的解是一个孤立的点。令

$$H(x) = \left(H_1(x), H_2(x), \cdots, H_n(x)\right)^{\mathrm{T}}$$

$$H_i(x) = x_i, i \in N_1 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}H_j(x) = \frac{1}{\xi_{ii} - 1}\Bigg\{ & \sum_{j\in N_1} \xi_{ij} - \sum_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}} \xi_{ij} x_j - \sum_{j\in N_3} \xi_{ij} - \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{ij} f(x_j) - \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu_j \\ & - G_i - \bigwedge_{j=1}^{n} T_{ij}\mu_j - \bigvee_{j=1}^{n} \delta_{ij} f(x_j) - \bigvee_{j=1}^{n} H_{ij}\mu_j \Bigg\}, j \in N_2\end{aligned} \tag{9}$$

$$H_k(x) = x_k, k \in N_3 \tag{10}$$

由(5)式和(9)式，当 $x \in [-1,1]^n$ 时，

$$\begin{aligned} H_j(x) &\le \frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{j\in N_1}|\xi_{ij}| + \sum_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|\xi_{ij}x_j| + \sum_{j\in N_3}|\xi_{ij}| + \left|\bigwedge_{j=1}^{n}\gamma_{ij} f(x_j)\right| + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}\mu_j| + |G_i| + \left|\bigwedge_{j=1}^{n} T_{ij}\mu_j\right| + \left|\bigvee_{j=1}^{n}\delta_{ij} f(x_j)\right| + \left|\bigvee_{j=1}^{n} H_{ij}\mu_j\right|\right\} \\ &\le \frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{j\in N_1}|\xi_{ij}| + \sum_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|\xi_{ij}||x_j| + \sum_{j\in N_3}|\xi_{ij}| + \sum_{j=1}^{n}|\gamma_{ij} f(x_j)| + \sum_{j=1}^{n}|b_{ij}\mu_j| + |G_i| + \sum_{j=1}^{n}|T_{ij}\mu_j| + \sum_{j=1}^{n}|\delta_{ij} f(x_j)| + \sum_{j=1}^{n}|H_{ij}\mu_j|\right\} \\ &\le \frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|\xi_{ij}| + \sum_{j=1}^{n}|\gamma_{ij}| + \sum_{j=1}^{n}|\delta_{ij}| + \sum_{j=1}^{n}\left(|b_{ij}| + |T_{ij}| + |H_{ij}|\right)|\mu_j| + |G_i|\right\} < 1\end{aligned}$$

同理可证，当 $x \in [-1,1]^n$ 时，

$$H_j(x) \ge -\frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|\xi_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|\delta_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}\left(|b_{ij}|+|T_{ij}|+|H_{ij}|\right)|\mu_j|+|G_i|\right\} > -1$$

因此，$H([-1,1]) \subset [-1,1]^n$。同时，对 $\forall x,y \in [-1,1]^n$，有

$$\|H(x)-H(y)\| = \max_{j\in N_2}\left\{\frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{\substack{j\in N_2\\j\ne i}}\xi_{ij}(y_j-x_j)+\bigwedge_{j=1}^{n}\gamma_{ij}f(y_j)-\bigwedge_{j=1}^{n}\gamma_{ij}f(x_j)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\bigvee_{j=1}^{n}\delta_{ij}f(y_j)-\bigvee_{j=1}^{n}\delta_{ij}f(x_j)\right\}\right\}$$

$$\le \max_{j\in N_2}\left\{\frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|\xi_{ij}||x_j-y_j|+\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{ij}||f(x_j)-f(y_j)|+\sum_{j=1}^{n}|\delta_{ij}||f(x_j)-f(y_j)|\right\}\right\}$$

$$\le \max_{j\in N_2}\left\{\frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{\substack{j\in N_2\\j\ne i}}|\xi_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|\gamma_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|\delta_{ij}|\right\}\right\}|x_j-y_j|$$

$$\le \max_{j\in N_2}\left\{\frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{\substack{j\in N_2\\j\ne i}}|\xi_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|\gamma_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|\delta_{ij}|\right\}\right\}\|x,y\|$$

由(5)式可知，

$$\max_{j\in N_2}\left\{\frac{1}{\xi_{ii}-1}\left\{\sum_{\substack{j\in N_2\\j\ne i}}|\xi_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|\gamma_{ij}|+\sum_{j\in N_2}|\delta_{ij}|\right\}\right\}<1$$

根据引理 2，存在 $\tilde{x}_j^* \in [-1,1]\,(j\in N_2)$ 使得对 $j\in N_2$，有

$$\tilde{x}_j^*+\sum_{r\in N_1}\xi_{jr}-\sum_{r\in N_2}\xi_{jr}\tilde{x}_r^*-\sum_{r\in N_3}\xi_{jr}-\bigwedge_{r=1}^{n}\gamma_{jr}f(\tilde{x}_r^*)-\sum_{r=1}^{n}b_{jr}\mu_r-G_j-\bigwedge_{r=1}^{n}T_{jr}\mu_r-\bigvee_{r=1}^{n}\delta_{jr}f(\tilde{x}_r^*)-\bigvee_{r=1}^{n}H_{jr}\mu_r=0 \tag{11}$$

当 $i\in N_1$ 时，令

$$x_i^*=-\sum_{j\in N_1}\xi_{ij}+\sum_{j\in N_2}\xi_{ij}\tilde{x}_j^*+\sum_{j\in N_3}\xi_{ij}+\bigwedge_{j=1}^{n}\gamma_{ij}f(\tilde{x}_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mu_j+G_i+\bigwedge_{j=1}^{n}T_{ij}\mu_j+\bigvee_{j=1}^{n}\delta_{ij}f(\tilde{x}_j^*)+\bigvee_{j=1}^{n}H_{ij}\mu_j$$

那么由(5)式，

$$x_i^*=-\xi_{ii}-\sum_{\substack{j\in N_1\\j\ne i}}\xi_{ij}+\sum_{j\in N_2}\xi_{ij}\tilde{x}_j^*+\sum_{j\in N_3}\xi_{ij}+\bigwedge_{j=1}^{n}\gamma_{ij}f(\tilde{x}_j^*)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}\mu_j+G_i+\bigwedge_{j=1}^{n}T_{ij}\mu_j+\bigvee_{j=1}^{n}\delta_{ij}f(\tilde{x}_j^*)+\bigvee_{j=1}^{n}H_{ij}\mu_j$$

$$\le -\xi_{ii}+\sum_{\substack{j\in N_1\\j\ne i}}|\xi_{ij}||+\sum_{j\in N_2}|\xi_{ij}\tilde{x}_j^*|+\sum_{j\in N_3}|\xi_{ij}|+\left|\bigwedge_{j=1}^{n}\gamma_{ij}f(\tilde{x}_j^*)\right|+\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}\mu_j|+|G_i|+\left|\bigwedge_{j=1}^{n}T_{ij}\mu_j\right|+\left|\bigvee_{j=1}^{n}\delta_{ij}f(\tilde{x}_j^*)\right|+\left|\bigvee_{j=1}^{n}H_{ij}\mu_j\right|$$

$$\le -\xi_{ii}+\sum_{\substack{j=1\\j\ne i}}^{n}|\xi_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|\gamma_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|\delta_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}\left(|b_{ij}|+|T_{ij}|+|H_{ij}|\right)|\mu_j|+|G_i|$$

$$<-1$$

当 $k\in N_3$ 时，令

$$
\begin{aligned}
x_k^* &= -\sum_{j\in N_1}\xi_{kj} + \sum_{j\in N_2}\xi_{kj}\tilde{x}_j^* + \sum_{j\in N_3}\xi_{kj} + \mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\gamma_{kj} f\left(\tilde{x}_j^*\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\mu_j + G_i + \mathop{\wedge}_{j=1}^{n} T_{kj}\mu_j + \mathop{\vee}_{j=1}^{n}\delta_{kj} f\left(\tilde{x}_j^*\right) + \mathop{\vee}_{j=1}^{n} H_{kj}\mu_j \\
&\ge \xi_{ii} - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|\xi_{ij}\right| - \sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_{ij}\right| - \sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{ij}\right| - \sum_{j=1}^{n}\left(\left|b_{ij}\right| + \left|T_{ij}\right| + \left|H_{ij}\right|\right)\left|\mu_j\right| - \left|G_i\right|
\end{aligned}
$$

则由(5)式得，$x_k^* > 1$。

当 $j\in N_2$ 时，令 $x_j^* = \tilde{x}_j^*$，则 x^* 是模糊神经网络(1)在 $\Omega_{(N_1,N_2,N_3)}$ 中的一个孤立的平衡点。由于 R^n 中有 3^n 个 $\Omega_{(N_1,N_2,N_3)}$，所以模糊神经网络(1)有 3^n 个孤立的平衡点。

证毕。

3.2. 局部指数稳定性分析

本小节将在前面讨论的平衡点存在的基础上，研究平衡点的局部指数稳定性。

定理 2：如果对 $i\in\{1,\cdots,n\}$，且(5)式满足，那么模糊神经网络(1)有且仅有 2^n 个局部指数稳定的孤立平衡点。

证明：分别考虑模糊神经网络在 $\Omega^{(1)},\Omega^{(2)}$ 和 $\Omega^{(3)}$ 三种情况下的解。

第一种情况，如果 $x^*\in[-1,1]^n$ 是一个孤立的平衡点，那么存在 $r\in 1,2,\cdots,n$，$\bar{t} > t_0$ 使得 $\left|x_r(\bar{t})\right| > 1$，换句话说就是，$x(t)$ 进入到 $\Omega^{(2)}$ 或者 $\Omega^{(3)}$，否则，对 $\forall t_0-\tau, \left|x(t)\right|\le 1$，所以对 $\forall t\ge t_0-\tau, i=1,2,\cdots,n$，有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\left(x_i(t)-x_i^*\right)}{\mathrm{d}t} &= -\left(x_i(t)-x_i^*\right) + \xi_{ii}\left(x_i(t)-x_i^*\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\xi_{ij}\left(x_j(t)-x_j^*\right) \\
&\quad + \mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right) - \mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j^* + \mathop{\vee}_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right) - \mathop{\vee}_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_j^*
\end{aligned}
\tag{12}
$$

令 $\varepsilon(t) = \max_{1\le i\le n}\left\{\max_{t_0-\tau\le s\le t_0}\left|x_i(s)-x_i^*\right|\right\}$。$\varepsilon(t) > 0$，$\varepsilon(t)\le 2$，$x_j(\tilde{t}) - x_j^* = \varepsilon(t)$，由(5)式和(12)式得，

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\left(x_i(t)-x_i^*\right)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tilde{t}} &= \left(\xi_{ii}-1\right)\left(x_i(t)-x_i^*\right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\xi_{ij}\left(x_j(t)-x_j^*\right) + \mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right) - \mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j^* + \mathop{\vee}_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right) - \mathop{\vee}_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_j^* \\
&\ge \left(\xi_{ii}-1\right)\left(x_i(t)-x_i^*\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|\xi_{ij}\right|\left|x_j(t)-x_j^*\right| - \left|\mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right) - \mathop{\wedge}_{j=1}^{n}\gamma_{ij}x_j^*\right| - \left|\mathop{\vee}_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right) - \mathop{\vee}_{j=1}^{n}\delta_{ij}x_j^*\right| \\
&\ge \left(\xi_{ii}-1\right)\left(x_i(t)-x_i^*\right) - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|\xi_{ij}\right|\left|x_j(t)-x_j^*\right| - \sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_{ij}\right|\left|x_j\left(t-\tau_{ij}\right)-x_j^*\right| - \sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{ij}\right|\left|x_j\left(t-\tau_{ij}\right)-x_j^*\right| \\
&\ge \left(\xi_{ii} - 1 - \sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n}\left|\xi_{ij}\right| - \sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_{ij}\right| - \sum_{j=1}^{n}\left|\delta_{ij}\right|\right)\varepsilon(\tilde{t}) > 0
\end{aligned}
$$

所以 $\varepsilon(t)$ 是无界的增函数，这与 $\varepsilon(t)\le 2$ 矛盾，所以(1)的解进入到 $\Omega^{(2)}$ 或者 $\Omega^{(3)}$。所以在 $[-1,1]^n$ 中，平衡点不稳定。

第二种情况，令

$$\bar{D} = \left\{ x \mid x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^{\mathrm{T}}, \left|x_i\right| > 1, i \in \overline{N_1}; \left|x_j\right| \le -1, j \in \overline{N_2} \right\} \in \Omega^{(3)},$$

并且 $\overline{N_1} \cup \overline{N_2} = \{1, 2, \cdots, n\}$， $\overline{N_1} \cap \overline{N_2} = \varnothing$，则在 $D \in \Omega^{(3)}$ 中，平衡点是不稳定的。

第三种情况，令

$$\tilde{D} = \left\{ x \mid x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^{\mathrm{T}}, x_i > 1, i \in \tilde{N}_1; x_j < -1, j \in \tilde{N}_2 \right\} \in \Omega^{(2)}$$

并且 $\tilde{N}_1 \cup \tilde{N}_2 = \{1, 2, \cdots, n\}$， $\tilde{N}_1 \cap \tilde{N}_2 = \varnothing$，如果对 $\forall s, x(s) \in \tilde{D}$， $\forall \ell = 1, 2, \cdots, n$，结合(1)式和(2)式得：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_\ell(t)}{\mathrm{d}t} &= -x_\ell(t) + \sum_{j \in \tilde{N}_1} \xi_{\ell j} - \sum_{j \in \tilde{N}_2} \xi_{\ell j} + \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{\ell j} f\left(x_j\left(t - \tau_{\ell j}(t)\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{\ell j}\mu_j \\ &\quad + G_\ell + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{\ell j}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{n} \delta_{\ell j} f\left(x_j\left(t - \tau_{\ell j}(t)\right)\right) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{\ell j}\mu_j \\ &= -x_\ell(t) + \xi_{\ell\ell} + \sum_{\substack{j \in \tilde{N}_1 \\ j \ne \ell}} \xi_{\ell j} - \sum_{j \in \tilde{N}_2} \xi_{\ell j} + \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{\ell j} f\left(x_j\left(t - \tau_{\ell j}(t)\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{\ell j}\mu_j \\ &\quad + G_\ell + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{\ell j}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{n} \delta_{\ell j} f\left(x_j\left(t - \tau_{\ell j}(t)\right)\right) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{\ell j}\mu_j \end{aligned} \tag{13}$$

当 $i \in \tilde{N}_1$，且 $x_i(t) = 1$ 时，由(5)式和(12)式，得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} &= -1 + \xi_{ii} + \sum_{\substack{j \in \tilde{N}_1 \\ j \ne i}} \xi_{ij} - \sum_{j \in \tilde{N}_2} \xi_{ij} + \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{ij} f\left(x_j\left(t - \tau_{ij}(t)\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu_j \\ &\quad + G_i + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{ij}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{n} \delta_{ij} f\left(x_j\left(t - \tau_{ij}(t)\right)\right) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{ij}\mu_j \\ &\ge -1 + \xi_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \left|\xi_{ij}\right| - \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma_{ij}\right| - \sum_{j=1}^{n} \left|\delta_{ij}\right| - \sum_{j=1}^{n} \left(\left|b_{ij}\right| + \left|T_{ij}\right| + \left|H_{ij}\right|\right)\left|\mu_j\right| - \left|G_i\right| \\ &> 0 \end{aligned}$$

同理，当 $i \in \tilde{N}_2$，且 $x_k(t) = -1$，由(5)式和(13)式，得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_k(t)}{\mathrm{d}t} &= 1 + \xi_{kk} + \sum_{\substack{j \in \tilde{N}_1 \\ j \ne k}} \xi_{kj} - \sum_{j \in \tilde{N}_2} \xi_{kj} + \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{kj} f\left(x_j\left(t - \tau_{kj}(t)\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}\mu_j \\ &\quad + G_k + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{kj}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{n} \delta_{kj} f\left(x_j\left(t - \tau_{kj}(t)\right)\right) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{kj}\mu_j \\ &\le 1 - \xi_{kk} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \left|\xi_{kj}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\gamma_{kj}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\delta_{kj}\right| + \sum_{j=1}^{n} \left(\left|b_{kj}\right| + \left|T_{kj}\right| + \left|H_{kj}\right|\right)\left|\mu_j\right| + \left|G_k\right| \\ &< 0 \end{aligned}$$

显然， $\tilde{D}$ 是一个不变集并且孤立的平衡点 x^* 是指数稳定的。根据定理 1，得知在 $\Omega^{(2)}$ 中有 2^n 个局部指数稳定的孤立的平衡点。

证毕。

4. 数值算例

在这一节，通过一个具体实例来说明导出的理论结果的有效性。

考虑如下模型：

$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} f\left(x_j(t)\right) + \bigwedge_{j=1}^{n} \gamma_{ij} f\left(x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\mu_j + G_i + \bigwedge_{j=1}^{n} T_{ij}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{n} \delta_{ij} f\left(x_j\left(t-\tau_{ij}(t)\right)\right) + \bigvee_{j=1}^{n} H_{ij}\mu_j$$

则有

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + \xi_{11} f\left(x_1(t)\right) + \xi_{12} f\left(x_2(t)\right) + b_{11}\mu_1 + b_{12}\mu_2 + G_1 \\ &\quad + \bigwedge_{j=1}^{2} \gamma_{1j} f\left(x_j\left(t-\tau_{1j}(t)\right)\right) + \bigwedge_{j=1}^{2} T_{1j}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{2} \delta_{1j} f\left(x_j\left(t-\tau_{1j}(t)\right)\right) + \bigvee_{j=1}^{2} H_{1j}\mu_j \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + \xi_{21} f\left(x_1(t)\right) + \xi_{22} f\left(x_2(t)\right) + b_{21}\mu_1 + b_{22}\mu_2 + G_2 \\ &\quad + \bigwedge_{j=1}^{2} \gamma_{2j} f\left(x_j\left(t-\tau_{2j}(t)\right)\right) + \bigwedge_{j=1}^{2} T_{2j}\mu_j + \bigvee_{j=1}^{2} \delta_{2j} f\left(x_j\left(t-\tau_{2j}(t)\right)\right) + \bigvee_{j=1}^{2} H_{2j}\mu_j\end{aligned}$$

其中，$\mu_1 = 0.2$，$\mu_2 = 0.3$，$G_1 = 3$，$G_2 = 4$，

$$\xi = \begin{pmatrix} 8 & 0.7 \\ 0.2 & 9 \end{pmatrix},\quad \gamma = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix},\quad \delta = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\quad H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

因为

$$\xi_{11} - |\xi_{12}| - \left(|\gamma_{11}| + |\gamma_{12}|\right) - \left(|\delta_{11}| + |\delta_{12}|\right) - \left(|b_{11}| + |T_{11}| + |H_{11}|\right)|\mu_1| - \left(|b_{12}| + |T_{12}| + |H_{12}|\right)|\mu_2| - |G_1| = 2 > 1$$

$$\xi_{22} - |\xi_{21}| - \left(|\gamma_{21}| + |\gamma_{22}|\right) - \left(|\delta_{21}| + |\delta_{22}|\right) - \left(|b_{21}| + |T_{21}| + |H_{21}|\right)|\mu_1| - \left(|b_{22}| + |T_{22}| + |H_{22}|\right)|\mu_2| - |G_2| = 2 > 1$$

所以，根据定理 1 知，模糊神经网络(1)有且仅有 3^n 个孤立的平衡点；由定理 2 知，模糊递归神经网络(1)有且仅有 2^n 个局部指数稳定的孤立平衡点。下图显示了系统的平衡点是指数稳定的，从而说明了定理 2 中条件的有效性。仿真结果如图 1~3，其中图 1 表示 $x_1(t)$ 的瞬时行为，图 2 表示 $x_2(t)$ 的瞬时行为，图 3 表示在相平面上 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的瞬时行为。

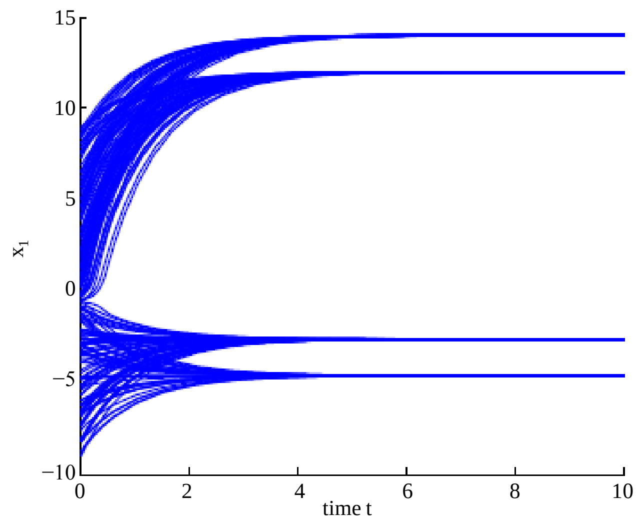

Figure 1. Transient behaviors of the state $x_1(t)$ in the example

图 1. $x_1(t)$ 的瞬时行为

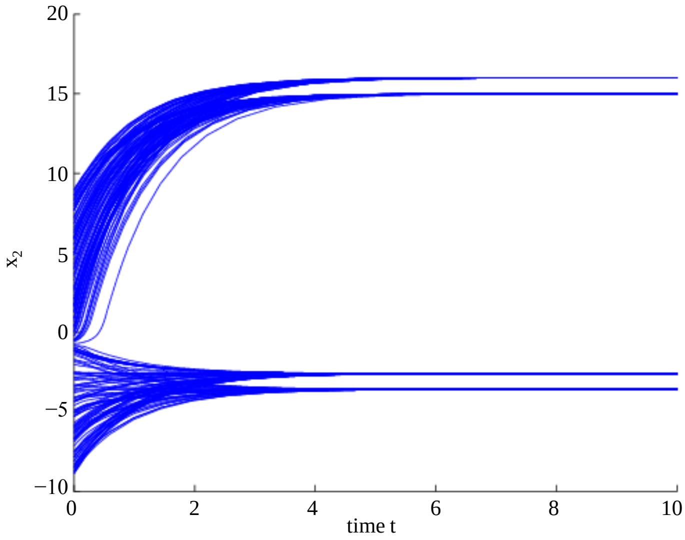

Figure 2. Transient behaviors of the state $x_2(t)$ in the example
图 2. $x_2(t)$ 的瞬时行为

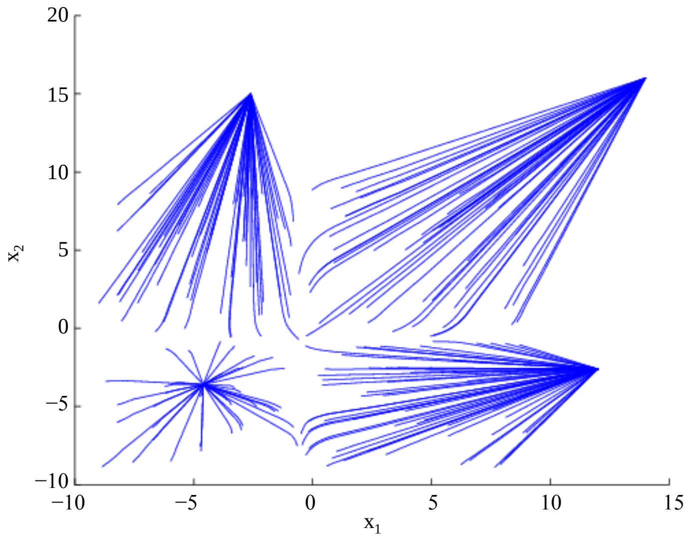

Figure 3. Transient behaviors of the state $x_1(t)$ and $x_2(t)$ on phase plane in the example
图 3. 相平面上 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的瞬时行为

5. 结语

本文讨论了一类 n 维模糊神经网络的多稳定性问题。定理 1 中，应用压缩映射原理研究出了这类模糊神经网络有 3^n 个孤立的平衡点的有效条件。并且经过定理 2 的进一步探讨，得出在这 3^n 个孤立的平衡点中有 2^n 个平衡点局部指数稳定的结论。最后给出的仿真算例说明了结论的有效性。

参考文献 (References)

[1] Yang, T., Yang, L., Wu, C. and Chua, L. (1996) Fuzzy Cellular Neural Networks: Theory. *Proceeding of* 1996 *Fourth IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications*, 24-26 June 1996, 181-186.

[2] Yang, T., Yang, L., Wu, C. and Chua, L. (1996) Fuzzy Cellular Neural Networks: Applications. *Proceeding of* 1996 *Fourth IEEE International Workshop on Cellular Neural Networks and Their Applications*, 24-26 June 1996, 225-230. http://dx.doi.org/10.1109/cnna.1996.566560

[3] Yang, T. and Yang, L. (1996) The Global Stability of Fuzzy Cellular Neural Network. I*EEE Transactions on Circuits and Systems I*: *Fundamental Theory and Applications*, **43**, 880-883. http://dx.doi.org/10.1109/81.538999

[4] Johansson, M., Rantzer, A. and Arzen, K. (1999) Piecewise Quadratic Stability of Fuzzy Systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **7**, 713-722. http://dx.doi.org/10.1109/91.811241

[5] Feng, G. (2004) Stability of Discrete-Time Fuzzy Dynamic Systems Based on Piecewise Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **12**, 22-28. http://dx.doi.org/10.1109/TFUZZ.2003.819833

[6] Zhang, H.B. and Feng, G. (2008) Stability Analysis and H_∞ Controller Design of Discrete-Time Fuzzy Large-Scale Systems Based on Piecewise Lyapunov Functions. *IEEE Transactions on Systems*, *Man*, *and Cybernetics-Part B*: *Cybernetics*, **38**, 1390-1401. http://dx.doi.org/10.1109/TSMCB.2008.927267

[7] Kim, E. and Kim, D. (2006) Stability Analysis and Synthesis for an Affine Fuzzy System via LMI and ILMI: Discrete Case. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*: *Cybernetics*, **31**, 132-140.

[8] 郭岗. 模糊系统的稳定性分析与控制器设计[D]: [博士学位论文]. 西安: 西安电子科技大学, 2010.

[9] Cao, J., Feng, G. and Wang, Y. (2008) Multistability and Multiperiodicity of Delayed Cohen-Grossberg Neural Networks with a General Class of Activation Functions. *Physica D*, **237**, 1734-1749. http://dx.doi.org/10.1016/j.physd.2008.01.012

[10] Zeng, Z., Huang, T. and Zheng, W.X. (2010) Multistability of Recurrent Neural Networks with Time-Varying Delays and the Piecewise Linear Activation Function. *IEEE Transactions on Neural Networks*, **21**, 1371-1377. http://dx.doi.org/10.1109/TNN.2010.2054106

[11] Cheng, C., Lin, K. and Shih, C. (2006) Multistability in Recurrent Neural Networks. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **66**, 1301-1320. http://dx.doi.org/10.1137/050632440

[12] Zeng, Z., Huang, D. and Wang, Z. (2005) Memory Pattern Analysis of Cellular Neural Networks. *Physics Letters A*, **342**, 114-128. http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2005.05.017