

# 二维耦合映射系统中的吸引域和冒泡吸引盆

陈 璟, 韩向军

<sup>1</sup>中国能源建设集团西北电力建设工程有限公司, 陕西 西安

<sup>2</sup>民勤县第一中学, 甘肃 武威

收稿日期: 2024年6月25日; 录用日期: 2024年7月15日; 发布日期: 2024年7月29日

## 摘 要

混沌同步问题在多个领域都有重要的应用。比如: 卫星运动中的混沌同步和反同步问题, 分数阶金融系统中的混沌同步问题, 不确定混沌系统的自适应同步问题。本文以二维耦合映射系统为例, 讨论了混沌同步状态的弱稳定性, 冒泡吸引盆的形成。同时利用临界曲线构造吸引域, 分析吸引域在局部和全局冒泡出现中的作用。

## 关键词

混沌同步, 冒泡分叉, 吸引盆, 临界曲线, 吸引域

# Attraction Domain and Riddled Basins in Two-Dimensional Coupled Mapping Systems

Jing Chen, Xiangjun Han

<sup>1</sup>China Energy Engineering Group Northwest Power Construction Engineering Co., Ltd., Xi'an Shaanxi

<sup>2</sup>Minqin No. 1 Middle School, Wuwei Gansu

Received: Jun. 25<sup>th</sup>, 2024; accepted: Jul. 15<sup>th</sup>, 2024; published: Jul. 29<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Chaotic Synchronization has significant applications in many fields. Examples include chaotic synchronization and desynchronization in the motion of satellites, chaotic synchronization in fractional order financial systems, and adaptive synchronization in uncertain chaotic systems. The purpose of this paper is to discuss the weak stability of chaotic synchronization and the formation of riddled basins using the two-dimensional coupled mapping system. The critical curve is simultaneously used to construct the attraction domain, and the role of the attraction domain in the emergence of local and global riddling is analysed.

\*通讯作者。

文章引用: 陈璟, 韩向军. 二维耦合映射系统中的吸引域和冒泡吸引盆[J]. 动力系统与控制, 2024, 13(3): 113-121.

DOI: 10.12677/dsc.2024.133011

## Keywords

Chaotic Synchronization, Riddling Bifurcation, Basin of Attraction, Critical Curves, Attraction Domain

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

随着非线性科学的发展, 混沌同步问题引起了越来越多研究者的关注。对于混沌同步, 文献[1]用多个例子说明了混沌同步的研究现状, 特别是对于非周期震荡引起的混沌同步。文献[2]给出了耦合系统中同步运动的一般稳定性理论并且计算了同步运动的稳定性参数公式, 此外还具体研究了耦合洛伦兹系统。

接下来一个很自然的问题是系统同步状态的稳定性问题。一般来说, 当横向李雅普诺夫指数  $\lambda_{\perp}$  为负时, 同步状态是稳定的。但是在一些特定的耦合参数区间, 此时即使横向李雅普诺夫指数为负, 可同步状态中一些特定的轨迹会失去其横向稳定性, 也就是变得横向不稳定了。而同步状态中轨迹第一个失去其稳定性的情况则被称作冒泡分叉[3]。对于冒泡分叉的发生, 文献[4]认为或者是不变子空间两侧的排斥子与嵌入其中的鞍点发生碰撞, 或者是同步状态中的点环失稳。必须指出, 上面所提到的文献只是用简单系统的不稳定不动点横向失稳进行说明, 而对于更复杂的系统, 则并没有探究是哪些轨道首先失去其横向稳定性。

那么, 当同步状态中的轨迹失去稳定性的时候就会发生冒泡分叉文献[5]对一个系统进行模拟时发现, 冒泡发生的时候, 在一个吸引子附近的属于另一个吸引子的吸引盆中的轨迹可能会花费大量的时间徘徊在这个吸引子附近。因此可以认为轨迹离开不变流形的局部排斥区域后, 也即横向失稳后, 有可能再次返回到不变流形附近, 也可能回到排斥舌。前者是一个超长瞬态; 后者是一个短暂的爆发, 也就是吸引子冒泡。

我们用  $A$  来表示同步状态,  $U_{\delta}(A)$  来表示  $A$  的邻域,  $\mathcal{B}(A)$  表示  $A$  的吸引盆,  $\mathcal{A}(A)$  表示  $A$  的吸引域。然后有下列两种冒泡:

i)  $\mathcal{B}(A)$  是全局冒泡的: 如果  $A$  从  $U_{\delta}(A)$  中吸引一个正的勒贝格测度的点集, 但不是全部的测度点集。剩下的点, 也就是  $U_{\delta}(A)$  中不属于  $\mathcal{B}(A)$  的点, 逃到了其他区域(可能是吸引的点环, 可能是混沌点集的吸引环, 也可能是无穷远处)。此时,  $A$  被称为弱米尔诺意义下的吸引子[6]。

ii)  $\mathcal{B}(A)$  是局部冒泡的: 如果  $A$  吸引  $U_{\delta}(A)$  中全部的点, 此时  $A$  被称作米尔诺意义下的吸引子, 并且  $\mathcal{B}(A)$  中不会有明显属于其他吸引子吸引盆的洞。更加严格的定义和论述可以在文献[4]中找到。这篇文章通过考虑正则李雅普诺夫指数谱, 刻画了不变子空间中吸引子的动力学行为, 同时给出了该理论应用的数值例子。用这种方法可以很清楚地了解到不稳定性区域或冒泡吸引盆发生的区域。

对于一个系统, 如果存在一个吸引域, 那么从吸引域中开始的轨迹就很难逃离其中, 即从吸引域中开始的轨迹无法与吸引盆的边界相接触; 而随着参数的变化, 吸引域扩张或者吸引盆收缩, 就会导致两者的边界开始接触。在这之后, 全局冒泡的吸引盆出现了。本文的主要工作是用临界线构造吸引域, 然后探讨吸引盆中的吸引域对于冒泡吸引盆的作用, 以及吸引域对于当  $\lambda_{\perp}$  变为正数时的井喷分岔[7]的作用。

## 2. 同步状态的弱稳定性分析

考虑二维耦合逻辑映射系统  $F$ :

$$F_{a,\varepsilon,\sigma} : \begin{cases} x \\ y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_a(x) + 2\varepsilon(y-x) \\ f_a(y) + 2\sigma(x-y) \end{cases} \quad (2.1)$$

其中  $f_a = ax(1-x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ ,  $a \in [0,4]$ 。  $\varepsilon, \sigma \in [-1,1]$ , 是耦合参数, 当耦合不对称时, 则  $\varepsilon, \sigma$  不同, 甚至其中一个耦合消失, 也就是单向耦合。为了便于研究, 令  $d = \varepsilon + \sigma$ , 接下来我们将看到, 系统的动力学基本上取决于耦合系数和  $d$ 。

logistic 映射  $f_a$  有一个相当简单的形式, 但是会显示相当复杂的动力学行为。图 1 是 logistic 映射的分叉图和它的倍周期级联的吸引环  $\gamma_{2^n}$ 。它有两个固定点  $x_1 = 0$  和  $x_2 = 1 - 1/a$ , 当  $a \in (1,3)$  时, 固定点  $x_2$  是稳定的, 由此  $f_a$  在  $a = 1$  发生跨临界分岔, 而当  $a$  增大到 3 时发生倍周期分叉, 出现了一个稳定的周期 2 环。在这之后, 出现一系列的倍周期分岔, 最终演化为混沌。图 2 是图 1 在  $3.54 \leq a \leq 3.69$  的部分放大, 当参数  $a$  增加到超过点  $a_* \cong 3.569$ , 吸引环  $\gamma_{2^n}$  在点  $a_n$  发生同宿分岔的反向级联。

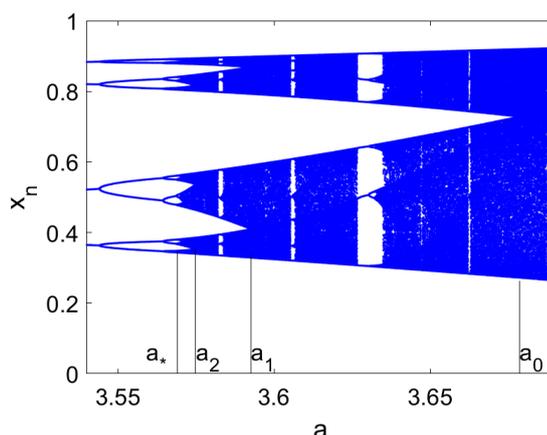


Figure 1. Bifurcation diagram of logistic mapping image  
图 1. logistic 映射的分叉图

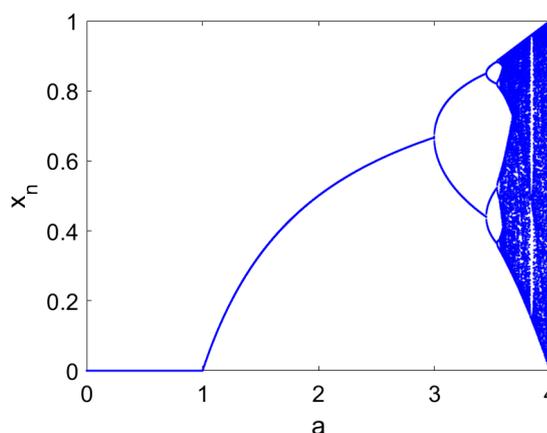


Figure 2. Part of Figure 1 is enlarged  
图 2. 图 1 的部分放大

例如: 当  $a = a_0 = 3.678573510428\dots$ , 固定点  $x_0 = 1 - \frac{1}{a}$  经历它的第一次同宿分叉, 此时  $f_a(x)$  显示为一个单带的混沌吸引子  $\Gamma = \Gamma_0$ , 它由两个子带组成, 两者在  $x_0$  相接。当  $a = a_1 = 3.592572184106$ , 周期 2 环  $\gamma_2 = \{x_1, x_2\}$  经历第一次同宿分叉, 此时  $f_a(x)$  显示为一个双带的混沌吸引子  $\Gamma = \Gamma_1$ , 它由四个子带组成,

它们在周期二环的点  $x_1$  和  $x_2$  成对相接。类似的, 在点  $a_n$ ,  $f_a(x)$  显示为一个  $2^n$  带的混沌吸引子, 它由  $2^{n+1}$  个子带组成, 这些子带在  $f_a^{2^n}$  的作用下成对排列。分岔点  $a_n$  可以很容易地确定数值, 前五个分别是:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3.678573510428\dots, \\ a_1 &= 3.592572184106\dots, \\ a_2 &= 3.574804938759\dots, \\ a_3 &= 3.570985940341\dots, \\ a_4 &= 3.570168472496\dots, \end{aligned}$$

对于二维映射  $F$ , 显然主对角线  $\{y = x\}$  是它的一维不变流形。这意味着主对角线上的任意一点都会被映射到主对角线上的其他点, 而无法逃离这条线。对于主对角线上的任意一点,  $F_{a,\varepsilon,\sigma}$  有一个沿着主对角线方向的特征方向  $\bar{u}_1 = (1, 1)$ , 同时有另一个特征方向  $\bar{u}_2 = \left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}, 1\right)$ , 对应的特征值分别为:

$$v_1 = f'(x) = a - 2ax \tag{2.2}$$

$$v_2 = f'(x) - 2(\varepsilon + \sigma) = f'(x) - 2d \tag{2.3}$$

为了确定同步状态的渐进稳定性区域, 我们首先确定低周期环的横向稳定性区域。对于  $N$  周期的同步状态  $\gamma_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , 横向稳定性判据[8]由以下公式给出:

$$\prod_{n=1}^N |f'(x_n) - 2d| < 1 \tag{2.4}$$

对于固定点  $P(x_0, x_0)$ ,  $x_0 = 1 - \frac{1}{a}$ , 根据判据(2.4)可以得到稳定性区域:  $\frac{-(a-1)}{2} < d < \frac{-(a-3)}{2}$ 。对于周期 2 环, 它可以由方程  $f^2(x) = x$  得到:  $P_1(x_1, x_1), x_1 = \left[a + 1 + \sqrt{(a+1)(a-3)}\right]/2a$  和  $P_2(x_2, x_2), x_2 = \left[a + 1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}\right]/2a$ 。根据判据(2.4)可以得到稳定性区域:  $-\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{(a+1)(a-3)} + 1\right] < d < -\frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{(a+1)(a-3)} - 1\right]$ 。对于更高周期的周期  $N$ -环的稳定性区域, 我们首先用牛顿法解方程(2.5)以确定周期  $N$ -环, 然后用判据(2.4)得到同步混沌吸引子中低周期环的横向失稳分叉曲线, 如图 3。

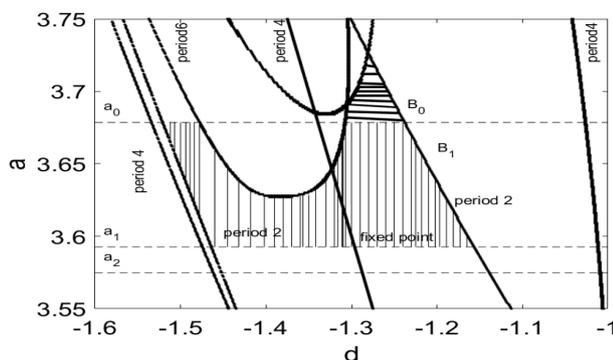
$$\begin{cases} x_2 = ax_1(1-x_1) \\ x_3 = ax_2(1-x_2) \\ x_4 = ax_3(1-x_3) \\ \vdots \\ x_n = ax_{n-1}(1-x_{n-1}) \\ x_1 = ax_n(1-x_n) \end{cases} \tag{2.5}$$

从图 3 中可以确定同步混沌吸引子在区间  $a_1 \leq a < a_0$  和  $a_0 \leq a$  中的绝对稳定性区域。很明显这些区域都被周期 2 环的横向稳定性区域所限制, 当  $a \geq a_0$ , 同步混沌状态只有在 fixedpoint 曲线的右侧才是渐近稳定的。同时, 只有在不破坏周期 4 环和周期 6 环的稳定性, 才能得到  $a \geq a_0$  时的绝对稳定区域, 即图 3 中的  $B_0$ 。而当  $a_1 \leq a < a_0$  时, 由于双带混沌吸引子存在于这个范围内所以不用考虑不动点的失稳, 从而得到图 3 中的  $B_1$ 。

当  $a = a_0$ , 用横向李雅普诺夫指数关于耦合系数和  $d$  的函数(2.6):

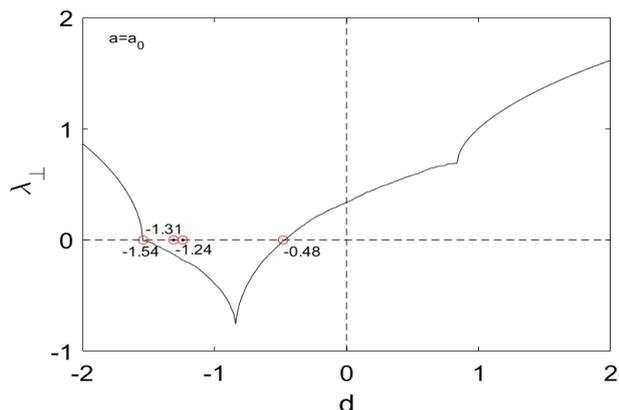
$$\lambda_{\perp} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln |f'(x_n) - 2d| \tag{2.6}$$

得到图 4, 可以看出横向李雅普诺夫指数在  $d \cong -1.54$  到  $d \cong -0.48$  为负, 在这个区间上, 同步状态至少是米尔诺意义上的弱吸引子,  $\lambda_1$  符号变化的点被称为井喷分岔点。强稳定区域可以在图 3 的  $B_0$  中确定, 位于  $d \cong -1.31$  到  $d \cong -1.24$  之间。



**Figure 3.** Lateral instability bifurcation line of low period ring in synchronous chaotic attractor

**图 3.** 同步混沌吸引子中低周期环的横向失稳分岔曲线



**Figure 4.** Lateral Lyapunov index with respect to the coupling coefficient and  $d$

**图 4.** 横向李雅普诺夫指数关于耦合系数和  $d$  的变化曲线

### 3. 吸引域和冒泡吸引盆的形成

研究不可逆映射  $F$  的全局动力学行为的一个重要且有用的工具是临界曲线[9]。类似于二维映射中的临界点的迭代可以限制相空间中的轨迹, 临界曲线的迭代像可以构造出二维映射  $F_{a,\varepsilon,\sigma}$  的吸引域, 吸引域是这样的特定区域:

- 1) 它将自己映射到其自身。
- 2) 一旦某个轨迹进入了这个区域, 它就再也不能离开了。
- 3) 吸引域领域内的所有点将在有限次的迭代中被映射到吸引域。
- 4) 它的边界是由临界线(或者临界线的部分)和临界线的有限次迭代像(或者像的部分)构成的。

将二维不可逆映射的临界曲线记为  $L_0$ , 则临界曲线的原像  $L_{-1}$  是满足  $F_{a,\varepsilon,\sigma}$  的雅可比矩阵的行列式为 0 的点的轨迹, 且有  $L_0 = F(L_{-1})$ 。对于我们的二维耦合逻辑映射, 有:

$$L_{-1} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{2\varepsilon - a + 2\sigma + 2ax - 4\sigma x}{4\varepsilon - 2a + 4ax} \right\}. \quad (3.1)$$

文献[10]提供了构建吸引域的边界  $\partial A$  的算法: 截取  $L_1$  的一部分, 这种截取一定要取在吸引盆边界内, 而不能选到无穷远处, 然后通过有限次的迭代以获得封闭区域, 当这种区域满足上述四个条件时, 就得到了需要的吸引域。这种算法的关键在于选取合适的  $L_1$  的一部分, 目前并没有一般的方法可以帮助我们直接选到合适  $L_1$ , 只能通过试错的方法。

对于参数值在强稳定区域左侧的吸引盆的研究表明, 有一个全局冒泡的区间, 在这个区间上吸引盆拥有稠密的排斥舌, 这些排斥舌导致了轨迹的发散, 如下图 5; 另一方面在强稳定区域的右侧, 周期 2 环变得横向不稳定, 此时吸引盆呈现分形边界, 同步混沌吸引子所排斥的轨迹永远不会到达吸引盆边界, 迟早会返回到吸引子附近。在这种情况下, 同步状态可以被称为米尔诺意义下的吸引子, 吸引盆是局部冒泡的吸引盆, 如图 6。

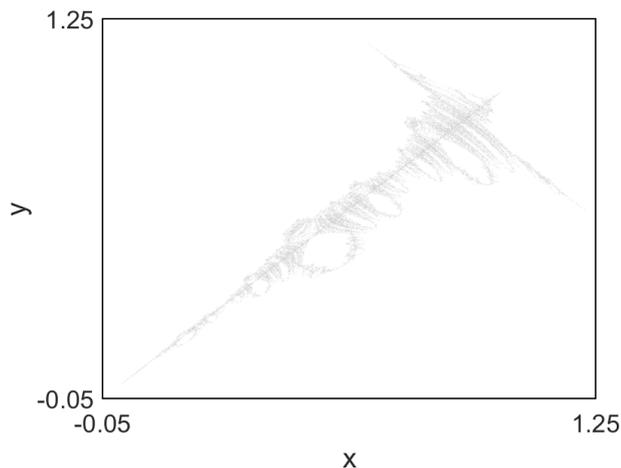


Figure 5. Suction basin under different coupling constants: the global bubbling suction basin:  $d = -1.5, \varepsilon = -0.8, \sigma = -0.7$

图 5. 不同耦合常数下的吸引盆: 全局冒泡的吸引盆,  $d = -1.5, \varepsilon = -0.8, \sigma = -0.7$

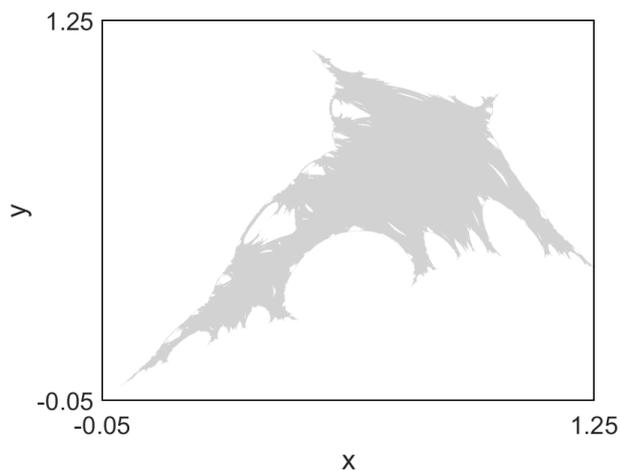
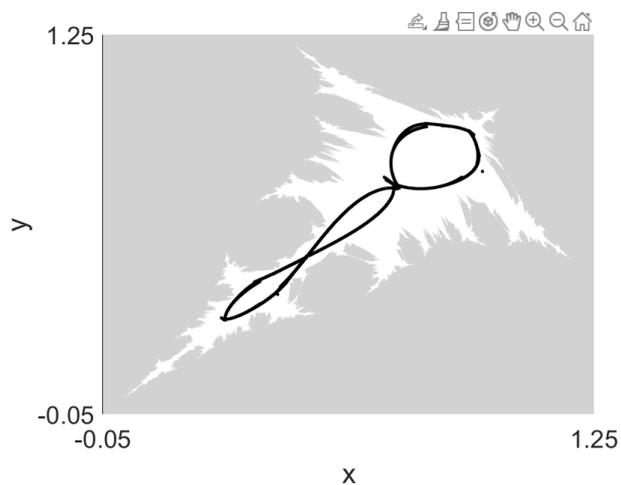


Figure 6. Suction basin under different coupling constants: locally bubbling suction basin:  $d = -1.2, \varepsilon = -0.7, \sigma = -0.5$

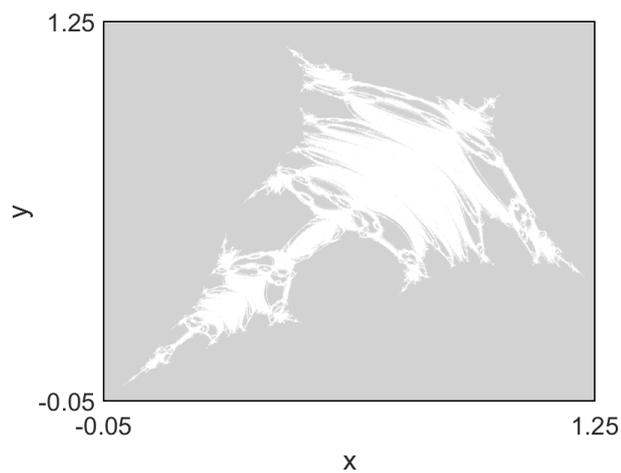
图 6. 不同耦合常数下的吸引盆: 局部冒泡的吸引盆,  $d = -1.2, \varepsilon = -0.7, \sigma = -0.5$

图 7 显示了当  $a = a_0, \varepsilon = -1.23, \varepsilon = -0.6, \sigma = -0.63$  时的构造结果。由曲线  $L_m, m = 0, 1, \dots, 8$ , 构成了



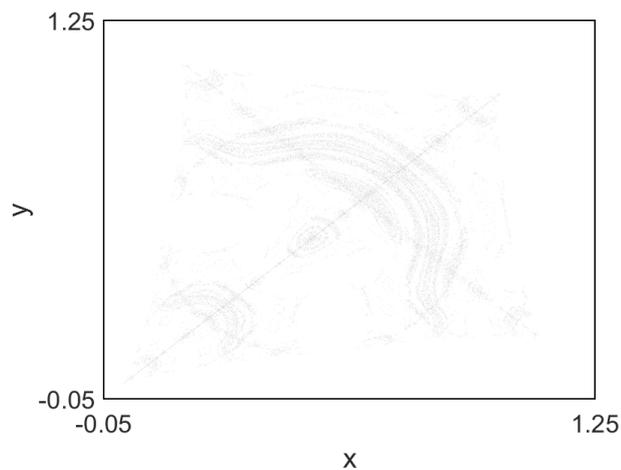
**Figure 7.** Local bubbling suction basin:  $d = -1.23, \varepsilon = -0.6, \sigma = -0.63$

**图 7.** 局部冒泡吸引盆:  $d = -1.23, \varepsilon = -0.6, \sigma = -0.63$



**Figure 8.** Global bubbling suction basin:  $d = -1.1, \varepsilon = -0.6, \sigma = -0.5$

**图 8.** 全局冒泡吸引盆:  $d = -1.1, \varepsilon = -0.6, \sigma = -0.5$



**Figure 9.** The blowout bifurcated:  $d = -0.48, \varepsilon = -0.24, \sigma = -0.24$

**图 9.** 井喷分岔,  $d = -0.48, \varepsilon = -0.24, \sigma = -0.24$

吸引域的边界并且吸引域很明显地位于吸引盆边界  $\partial B$  内, 此时的吸引盆是局部冒泡的吸引盆。随着  $d$  的进一步增加, 吸引域的边界与吸引盆的边界发生接触(大约在  $d = 1.2$ )。此后, 全局冒泡的吸引盆出现了, 如图 8。到  $\varepsilon \cong -0.48$  时井喷分叉以突然爆炸的形式发生, 如图 9。

对于  $a = a_1$ , 可以用(2.6)式得到横向李雅普诺夫指数的变化曲线, 如图 10。结合图 3 可以看出横向李雅普诺夫指数在  $d \cong -1.47$  到  $d \cong -1.04$  为负, 在这个区间上, 同步状态至少是米尔诺意义上的弱吸引子。强稳定区域可以在图 3 的  $B_1$  中确定, 位于  $d \cong -1.46$  到  $d \cong -1.16$  之间。

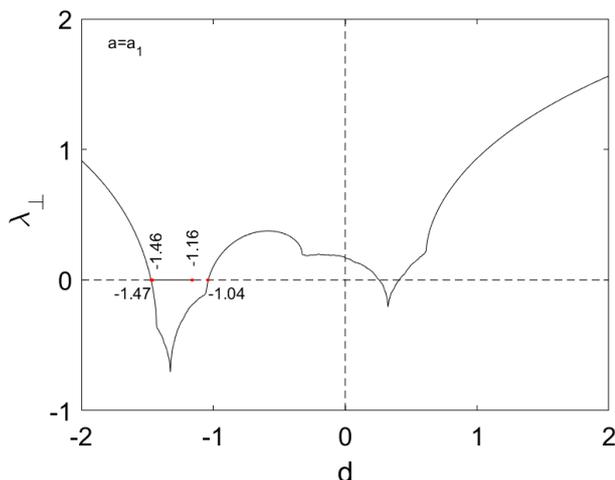


Figure 10. The change curve of the transverse Lyapunov index when  $a = a_1$

图 10.  $a = a_1$  时横向李雅普诺夫指数的变化曲线

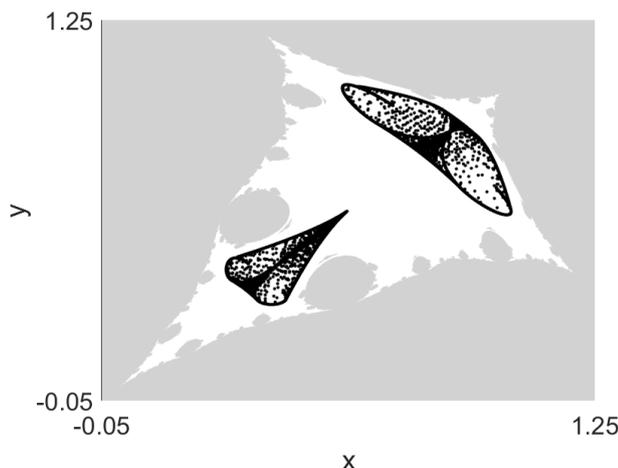


Figure 11. The attractor basin, attractor domain, and attractor morphology at blowout bifurcation:  $a = a_1, d = -1.04, \varepsilon = -0.52, \sigma = -0.52$

图 11. 发生井喷分叉时的吸引盆, 吸引域以及吸引子的形态:  $a = a_1, d = -1.04, \varepsilon = -0.52, \sigma = -0.52$

当  $a = a_1, d = -1.04$  时, 井喷分岔发生, 此时吸引盆内仍存在一个吸引域, 如图 11。与此同时, 井喷分叉采取了一种不同于突然爆炸的形式, 这种形式表现为从同步的混沌吸引子  $A_1 = \{x = y = \Gamma_1\}$  到一个近似二维吸引子  $A'_1$  的渐进转变, 其中  $A'_1$  是被吸引域所界定的。从图 11 可以看出, 在井喷分叉之后, 系统很

可能在同步状态附近运动。有时, 可以观察到吸引子的突然爆炸, 但并不会与吸引盆边界相接触。本文以二维耦合映射系统为例, 通过横向李雅普诺夫指数讨论了混沌同步状态的弱稳定性, 确定了当  $a = a_0, a = a_1$  时混沌同步状态的弱稳定区域和强稳定区域, 以及在这些区域内部和区域之间的冒泡吸引盆的形成。同时利用临界曲线的方法构造出了吸引域, 研究了在特定区域出现的吸引域在局部和全局冒泡出现中的作用。

可以得出结论, 吸引域边界接触吸引盆边界的接触分岔( $d^c$ )和冒泡分岔( $d^a$ )以及井喷分岔( $d^b$ )之间的关系对于局部和全局冒泡的出现有着很大的作用。如果( $d^c$ )在( $d^b$ )之前发生, 那么系统将会出现在( $d^a$ )和( $d^c$ )之间出现局部冒泡的现象, 并且会在( $d^c$ )和( $d^b$ )之间出现全局冒泡的现象, 如图 7~9 所揭露的那样。此时, 井喷分岔以突然爆炸的形式出现。反之, 如果( $d^c$ )发生在( $d^b$ )之后, 则不会出现全局冒泡的现象。此时井喷分岔是渐进的。

## 参考文献

- [1] Rulkov, N.F. (1996) Images of Synchronized Chaos: Experiments with Circuits. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **6**, 262-279. <https://doi.org/10.1063/1.166174>
- [2] Fujisaka, H. and Yamada, T. (1983) Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems. *Progress of Theoretical Physics*, **69**, 32-47. <https://doi.org/10.1143/PTP.69.32>
- [3] Zhou, L., You, Z. and Tang, Y. (2021) A New Chaotic System with Nested Coexisting Multiple Attractors and Riddled Basins. *Chaos, Solitons & Fractals*, **148**, Article 111057. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111057>
- [4] Ashwin, P., Buescu, J. and Stewart, I. (1996) From Attractor to Chaotic Saddle: A Tale of Transverse Instability. *Nonlinearity*, **9**, Article 703. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/9/3/006>
- [5] Lai, Y.C., Grebogi, C., Yorke, J.A., et al. (1996) Riddling Bifurcation in Chaotic Dynamical Systems. *Physical Review Letters*, **77**, Article 55. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.77.55>
- [6] Cao, Y. (2004) A Note about Milnor Attractor and Riddled Basin. *Chaos, Solitons & Fractals*, **19**, 759-764. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(03\)00205-4](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00205-4)
- [7] Rabiee, M., Ghane, F.H., Zaj, M., et al. (2022) The Occurrence of Riddled Basins and Blowout Bifurcations in a Parametric Nonlinear System. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **435**, Article 133291. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2022.133291>
- [8] Maistrenko, Y.L., Maistrenko, V.L., Popovich, A., et al. (1998) Transverse Instability and Riddled Basins in a System of Two Coupled Logistic Maps. *Physical Review E*, **57**, Article 2713. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.2713>
- [9] Bischi, G.I., Mammana, C. and Gardini, L. (2000) Multistability and Cyclic Attractors in Duopoly Games. *Chaos, Solitons & Fractals*, **11**, 543-564. [https://doi.org/10.1016/S0960-0779\(98\)00130-1](https://doi.org/10.1016/S0960-0779(98)00130-1)
- [10] Abraham, R., Mira, C. and Gardini, L. (1997) Chaos in Discrete Dynamical Systems. Telos. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1936-1>