

一类单自由度双侧含约束的碰撞振动系统动力学研究

李沛民, 李道权, 张 惠

兰州交通大学机电工程学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2024年12月6日; 录用日期: 2025年1月2日; 发布日期: 2025年1月8日

摘 要

本文研究对一种具有双侧非对称约束的单自由度非对称碰撞振动系统进行了深入探讨。首先, 对系统进行了无量纲化处理, 并详细分析了其周期运动的分岔类型。接着, 本研究推导了系统在周期运动条件下的Jacobi矩阵, 并运用参数状态空间联合仿真的方法, 系统地探究了系统在参数平面 (ω) , (ω, δ) 下的转迁规律及变化参数 ω 时的动力学行为。此外, 本文还研究还关注了系统在状态空间中吸引域的存在现象。

关键词

非对称, 吸引域, 胞映射

Dynamics Study of a Class of Single Degree of Freedom Double-Sided Constrained Collision Vibration Systems

Peimin Li, Daoquan Li, Hui Zhang

School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: Dec. 6th, 2024; accepted: Jan. 2nd, 2025; published: Jan. 8th, 2025

Abstract

This study delves into a single-degree-of-freedom asymmetric impact vibration system with bilateral asymmetric constraints. Initially, the system was subjected to a dimensionless transformation, and a detailed analysis was conducted on its bifurcation types of periodic motions. Subsequently, the Jacobi matrix of the system under periodic motion conditions was derived. Utilizing a combined

simulation approach of parameter and state space, a systematic exploration was performed on the transition laws of the system in the parameter plane $(\omega), (\omega, \delta)$ and its dynamic behaviors when varying the parameters ω . Additionally, the study also focused on the existence phenomenon of the attraction basins in the state space of the system.

Keywords

Non-Symmertric, Attraction Domain, Cell-to-Cell Mapping

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在现存的机械构建中, 装配过程的布局往往存在着制约因素, 且目前的生产技术尚存局限性, 使得零部件间的间隙无法完全消除。这些间隙对机械性能产生了不良影响, 使部件间容易出现相互的冲击和磨损, 进而严重缩短了机械的整体使用寿命。装配模式的不同以及零件材质的差异, 也会进一步导致碰撞类型有所区别, 包括弹性碰撞和刚性碰撞, 这增加了对碰撞运动分析的难度。为了解决这些问题, 科研人员对非光滑动力系统进行了深入研究。

分段光滑系统作为非光滑动力系统的典型代表, 展现出了显著的非连续性特征。此类系统能够诱导出一种被称为不连续诱导的分岔现象, 其中擦边分岔尤为突出, 乃是非光滑动力系统的独特产物。此种独特分岔现象的揭露, 为国内外研究者开辟了新的探索领域, 激发了他们深入挖掘其内在运行机制的热情, 旨在机械制造与装配环节中, 更为精准地掌控和优化间隙问题。

Ma 等[1]在擦边轨道附近识别了相关模式。田海勇等[2]则针对一类单自由度的含间隙碰撞振动系统模型, 推导出了 Poincaré 映射的解析表达式。张惠等[3]进一步推导出系统的 Poincaré 映射的 Jacobi 矩阵, 并详细探讨了其在临近擦边点时的特征值、行列式及其轨迹的变化情况。值得注意的是, 这种分岔现象最早由 Nusse 等人[4][5]在 1992 年首次发现并提出。随后, Nordmark [6]在这一基础上构建了一个关于刚性碰撞振子在擦边分岔附近的局部映射模型, 并引入了非连续映射的概念与方法。Bernardo 等[7][8]在此基础上进一步完善了这一方法, 通过研究周期轨迹上的全局 Poincaré 映射, 成功地推得了一种规范化的映射方法。

尽管非线性动力系统的所有参数均为固定值, 然而, 系统最终的运动状态依然可能因初始状态的不同而表现出显著差异。在状态空间参数的研究方面, 研究重点通常集中于吸引子和吸引域的动力学特性, 旨在揭示系统的全局动力学行为。此外, 该领域还包括对系统在大跨度时间范围内的动力学行为的深入探索, 以及对全局分岔和不稳定性的细致研究。在探究多组系统的不稳定性数据基础上, 进一步明确了吸引域的稳定性特征, 并在此基础上求解了吸引域的具体大小与形状。

在理论研究层面, 主要采用微分同胚理论进行分析, 而数值方法则主要包括逐点初始值直接积分法[9][10]和点映射算法[11]。然而, 这些传统方法在实际应用中往往表现出计算量大、耗时长的问题。为了解决初始条件敏感性及精细局部陷阱等难题, Hsu 等人[12]-[15]于 20 世纪 80 年代初系统地提出了胞映射的数学算法。胞映射算法是一种基于状态空间离散化的数值技术, 其通过不同尺度的子集合(即“胞”)来覆盖或逼近状态空间中非线性系统响应的拓扑结构(不变集)。同时, 该算法能够计算得到相应胞集合上的

测度(如不变测度、概率密度或隶属函数),进而给出系统响应的量化度量。基于状态空间离散的胞映射方法为确定性和不确定性非线性动力学的全局响应分析提供了高效数值途径。

迄今为止,不同领域的研究者仍在不断改进这一算法。例如,Spek 等人[16]应用四种方法研究了不连续系统的吸引子及吸引域。Virgin 等人[17]应用胞映射法研究了含刚度和阻尼非线性系统的吸引域,更深入地揭示了系统的擦边特性。Levitas 等人[18]提出了庞加莱型胞映射法,该方法基于使用庞加莱映射进行降维的思想,有效地减少了胞映射的计算复杂度。刘恒等人[19]用 Poincaré 型胞映射方法对平衡及不平衡轴承转子非线性动力系统的全局特性进行了分析,研究了系统存在的周期解及其在各不同 Poincaré 截面上的吸引域。李得洋等人[20]-[22]对几种典型的碰撞振动系统进行了全局动力学分析。

胞映射方法因其适合于并行计算的特性,在一定程度上大幅提升了计算效率。然而,即便如此,在高维系统的应用中,数以亿计的元胞处理仍然是一个巨大的挑战。为应对这一难题, Li 等人[23]基于并行计算提出了子域合成分析方法,充分利用 GPU 集群硬件的计算能力,显著提高了胞映射在高维系统中的执行效力。

本文深入探讨了一种具有双侧非对称约束的单自由度非对称碰撞振动系统。在对该系统进行无量纲化建模处理的基础上,分析了其周期运动的分岔类型。本文进一步推导了系统在周期运动状态下的 Jacobi 矩阵,并运用参数状态空间联合仿真的方法,系统地探究了系统在参数平面 (ω, δ) 上的转迁规律以及变化参数 ω 时的动力学行为。此外,本文还分析了系统在状态空间中吸引域的存在现象。

2. 单自由度的简化力学模型及运动微分方程

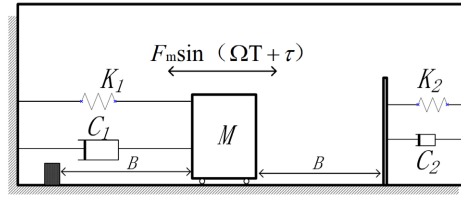


Figure 1. depicts a single-degree-of-freedom mechanical model
图 1. 单自由度力学模型

如图 1 中给出了单自由度含有非对称约束的简化模型。在光滑面上有一振子 M 与满足胡克定律刚度系数为 K_1 的弹簧和阻尼系数为 C_1 的阻尼相连接。取位移的左方向为正方向,当振子处于静平衡状态时,与右侧弹性约束面以及左侧刚性约束面的距离均为 B ,当振子位移为 B 且速度为正时,振子与左侧刚性约束面发生刚性碰撞。当振子位移为 $-B$,且速度为负时,系统与右侧弹性约束面发生弹性碰撞且与右侧约束面共同运动直至振子的位移小于 $-B$ 。振子的位移为 X 速度为 $\dot{X}$,左侧刚体恢复系数为 r ,则描述系统的方程为:

$$\begin{cases} M\ddot{X} + C_1\dot{X} + K_1X = F_m \sin(\Omega T + \tau) & (-B < X \leq B) \\ M\ddot{X} + (C_1 + C_2)\dot{X} + K_1X + K_2(X - B) = F_m \sin(\Omega T + \tau) & (X < -B) \\ \dot{X}_+ = -r\dot{X}_- & (X = B) \end{cases} \quad (1)$$

为了使分析具有普适性,引入以下无量纲量:

$$x = \frac{XK_1}{F}, t = T\sqrt{\frac{K_1}{M}}, \zeta = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1M}}, \mu_c = \frac{C_2}{C_1}, \omega = \Omega\sqrt{\frac{M}{K_1}}, \mu_k = \frac{K_2}{K_1}, \delta = \frac{K_1B}{F}.$$

可得无量纲方程为:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + x = \sin(\omega t + \tau) (-b < x \leq b) \\ \ddot{x} + 2\zeta(1 + \mu_c)\dot{x} + (1 + \mu_k)x = \sin(\omega t + \tau) - \mu_k\delta(x < -b) \\ \dot{x}_+ = -r\dot{x}_- (x = b) \end{cases} \quad (1)$$

当振子未与左右约束碰撞时 ($-b < x \leq b$), 给定初始条件 $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \tau(t_0) = \tau_0$ 。当系统参数满足 $\sqrt{\zeta^2 - 1} < 0$ 时, 振动微分方程的解析解为:

$$\begin{aligned} f_1(x; x_0, \dot{x}_0, \tau_0, t) = & e^{-\eta_1(t-t_0)} (a_1 \cos(\omega_{d1}(t-t_0)) + b_1 \sin(\omega_{d1}(t-t_0))) \\ & + A_1 \sin(\omega t + \tau_0) + B_1 \cos(\omega t + \tau_0) \end{aligned} \quad (2)$$

对位移函数式求导即可获得速度函数:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1(x; x_0, \dot{x}_0, \tau_0, t) = & e^{-\eta_1(t-t_0)} [(b_1\omega_{d1} - \eta_1a_1) \cos \omega_{d1}(t-t_0) - (\eta_1b_1 + a_1\omega_{d1}) \sin \omega_{d1}(t-t_0)] \\ & + A_1\omega \cos(\omega t + \tau_0) - B_1\omega \sin(\omega t + \tau_0) \end{aligned} \quad (3)$$

而外激励相位函数记为:

$$\theta_1 = \omega t + \tau_0 \quad (4)$$

当系统与右侧弹性约束面发生碰撞后, 若振子与弹性碰撞面共同运动 ($x < -b$) 时, 我们给定初始条件 $x(t_1) = x_1, \dot{x}(t_1) = \dot{x}_1, \tau(t_1) = \tau_1$ 。在特定参数 $\sqrt{(\zeta_1 + \zeta_2)^2 - (1 + \mu_k)} < 0$ 时, 借助微分方程的基本理论, 可以推导出振动微分方程的运动解析解如下:

$$\begin{aligned} f_2(x; x_0, \dot{x}_0, \tau_0, t) = & e^{-\eta_2(t-t_1)} (a_2 \cos \omega_{d2}(t-t_1) + b_2 \sin \omega_{d2}(t-t_1)) + A_2 \sin(\omega t + \tau_1) \\ & + B_2 \cos(\omega t + \tau_1) - \mu_k\delta / (1 + \mu_k) \end{aligned} \quad (5)$$

对位移函数式求导即可获得速度函数:

$$\begin{aligned} \dot{f}_2(x; x_0, \dot{x}_0, \tau_0, t) = & e^{-\eta_2(t-t_1)} ((b_2\omega_{d2} - \eta_2a_2) \cos \omega_{d2}(t-t_1) - (\eta_2b_2 - a_2\omega_{d2}) \sin \omega_{d2}(t-t_1)) \\ & + A_2\omega \cos(\omega t + \tau_1) - B_2\omega \sin(\omega t + \tau_1) \end{aligned} \quad (6)$$

式中:

$$\begin{aligned} \eta_1 = \zeta, \eta_2 = \zeta, \omega_{d1} = \sqrt{1 - \eta_1^2}, \omega_{d2} = \sqrt{1 + \mu_k - \eta_2^2}, \\ A_1 = \frac{1 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}, B_1 = \frac{-2\zeta\omega}{(1 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2}, A_2 = \frac{1 + \mu_k - \omega^2}{(1 + \mu_k - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2(1 + \mu_c)^2}, \\ B_2 = \frac{-2\zeta(1 + \mu_c)\omega}{(1 + \mu_k - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega)^2(1 + \mu_c)^2} a_1, a_2, b_1, b_2 \end{aligned}$$

3. 系统的 Poincaré 映射建立及 Jacobi 矩阵的求解

在分析非光滑动力系统时, 通常会选择使用 Poincaré 映射来深入研究系统运动的稳定性、周期轨迹的存在区域以及局部分岔问题。针对本文所述的系统, 可以采用以下三种建立方案来进行详细分析:

$$\begin{aligned} \Sigma_n = & \{(x_1, \dot{x}_1, \theta) \in R^2 \times S^1, \theta = \text{mod}(\omega t, 2\pi / \omega)\} \\ \Sigma_p = & \{(x_1, \dot{x}_1, \theta) \in R^2 \times S^1, x_1 = -b, \dot{x}_1 < 0\} \\ \Sigma_q = & \{(x_1, \dot{x}_1, \theta) \in R^2 \times S^1, x_1 = b, \dot{x}_1 > 0\} \end{aligned}$$

首先, 选择定相位面的方案被证明能够精密地解析出系统周期运动的完整周期数。然而, 这种方法

的局限在于它未能充分揭示系统的内在非线性特质。与之相对的,定碰撞面的选择则显得更为独特和有效。这种方法不仅能分别统计振子对左右约束面的累计碰撞次数,而且还能借助更为简化的方式推导出系统 Jacobi 矩阵。

更为先进的是,通过综合运用定碰撞面建立的 Poincaré 截面与定相位面建立的 Poincaré 截面,我们能够更为全面且深入地描绘系统轨线的全景,特别是其与碰撞面的性质。对于定相位面 Σ_ϕ , 因其本就具备分段光滑的属性,它精密地捕捉系统在外施激励的作用下相位的微妙变化。鉴于外激励的恒定角速度,我们只需固定时间节点来记录振子的位移 x 与速度 $\dot{x}$ 数据。如果转向定碰撞面 Σ_ϵ , 我们必须认识到系统分段光滑特性的复杂性。

在假设系统满足 $n-1-1$ 周期运动存在的条件下,依据向量场的动态演化,我们可以将 Poincaré 映射细致地划分为四个明确阶段:

- 1) p_1 振子未与两侧碰撞面接触的自由振动期;
- 2) p_2 振子受左侧刚性墙冲击的瞬间;
- 3) p_3 振子脱离左侧刚性约束后,再度进入自由振动阶段;
- 4) p_4 振子与右侧弹性约束面共同运动阶段。

基于此,我们成功构建了详尽的 Poincaré 映射如下。

$$\begin{aligned} P_1: (x_+(t_0), \dot{x}_+(t_0)) &\rightarrow (x_-(t_1), \dot{x}_-(t_1)), & P_2: (x_-(t_1), \dot{x}_-(t_1)) &\rightarrow (x_-(t_2), \dot{x}_-(t_2)), \\ P_3: (x_-(t_2), \dot{x}_-(t_2)) &\rightarrow (x_-(t_3), \dot{x}_-(t_3)), & P_4: (x_-(t_3), \dot{x}_-(t_3)) &\rightarrow (x_+(t_3), \dot{x}_+(t_3)). \end{aligned}$$

令 DP_1, DP_2, DP_3, DP_4 分别代表 P_1, P_2, P_3, P_4 的映射矩阵并建立 Jacobi 矩阵:

$$DP_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, DP_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}, DP_3 = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}, DP_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -r \end{bmatrix}.$$

对于每个矩阵中的元素,具体计算方法为:

$$\left[\frac{\partial (F_i)_k}{\partial X_j} \right]_{(\dot{x}_0, \tau_0)}; i, j, k = 1, 2$$

其中: $F_1 = \dot{f}, F_2 = \theta, X_1 = \dot{x}_0, X_2 = \tau_0$.

对于系统的积分参数有:

$$\begin{aligned} a_1 &= x_0 - A_1 \sin \tau_0 - B_1 \cos \tau_0, b_1 = \frac{v_0 - A_1 \omega \cos \tau_0 + B_1 \omega \sin \tau_0}{\omega d_1} + \frac{\eta_1 (x_0 - A_1 \sin \tau_0 - B_1 \cos \tau_0)}{\omega d_1} \\ a_2 &= \frac{\mu_k b + x_1 (1 + \mu_k) - A_2 \sin(\tau_1) - \mu_k A_2 \sin(\tau_1) - B_2 \cos(\tau_1) - \mu_k B_2 \cos(\tau_1)}{1 + \mu_k} \\ b_2 &= \frac{\eta_2 \left[x_1 - A_2 \sin(\tau_1) - B_2 \cos(\tau_1) + \frac{\mu_k b}{1 + \mu_k} \right]}{\omega_{d_2}} + \frac{v_1 - A_2 \omega \cos(\tau_1) + B_2 \omega \sin(\tau_1)}{\omega_{d_2}} \end{aligned}$$

由于每个阶段的运动时间 t_i 亦是会因为系统的初始速度和初始位移而变化,所以 t_i 是关于 v_0, τ_0 的函数。以 DP_3 为例,当振子从左侧碰撞面出发,经过时间 t 到达右侧碰撞面,建立起 t 与 v_0, τ_0 之间的关系:令 $x(t) = -\delta$, 得到方程:

$$\Psi(t, v_0, \tau_0) = f_1(x; \dot{x}_0, \tau_0, t) + \delta = 0$$

$$\rightarrow e^{-\eta_1(t-t_0)}(a_1 \cos \omega_{d1}(t-t_0) + b_1 \sin \omega_{d1}(t-t_0)) + A_1 \sin(\omega t + \tau_0) + B_1 \cos(\omega t + \tau_0) + \delta = 0$$

$$\text{其中, } a_1 = \delta - A_1 \sin \tau_0 - B_1 \cos \tau_0, b_1 = \frac{\eta_1(\delta - A_1 \sin \tau_0 - B_1 \cos \tau_0)}{\omega_{d1}} + \frac{v_0 - A_1 \omega \cos \tau_0 + B_1 \omega \sin \tau_0}{\omega_{d1}}$$

利用隐函数定理, Jacobi 矩阵系数的计算方法为:

$$a_{ij} = \frac{(\partial f_i)_1}{\partial X_{0j}} + \frac{(\partial f_i)_1}{\partial t} \cdot \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial X_{0j}} / \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right);$$

对于 $n-1-1$ 周期运动, 系统的 Poincaré 映射为:

$$DP = DP_4 DP_3 DP_2 DP_1 = (x_+(t_0), \dot{x}_+(t_0)) \rightarrow (x_+(t_3), \dot{x}_+(t_3)).$$

4. 不同参数域内运动转迁规律分析

建立庞加莱映射, 通过定相位面作出全域分岔图, 现取局部 $\omega = [1.1-1.3]$ 分岔图来分析从周期运动到混沌的道路: 在参数域内, 固定其中一部分系统参数的值: $\zeta = 0.5, r = 1, \mu_k = 250, \mu_c = 150$ 以及初始的运动状态参数, 研究系统的运动状态下关于 ω 的单参数分岔图:

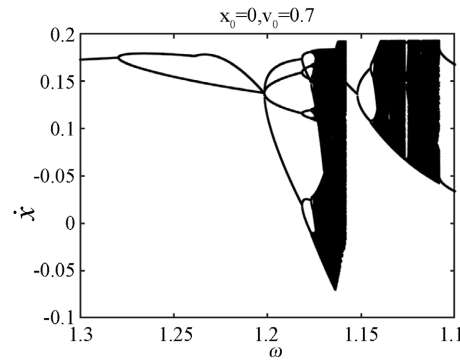


Figure 2. illustrates the bifurcation diagram of a degree of freedom
图 2. 单自由度分岔图

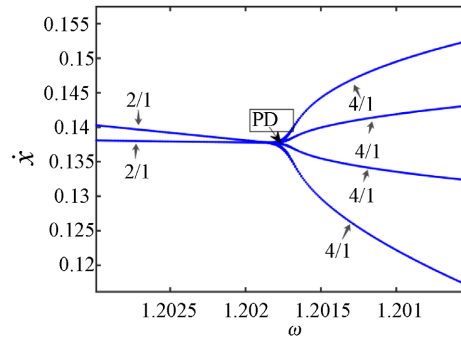
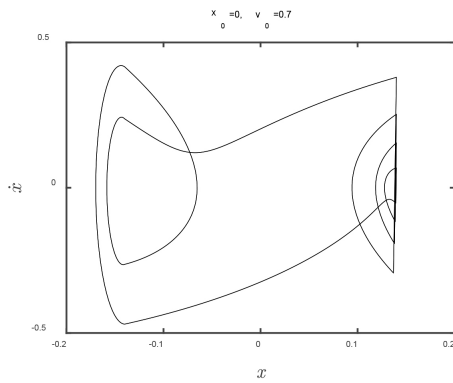


Figure 3. presents a partial enlarged single view of the single-parameter bifurcation
图 3. 单参分岔局部放大图

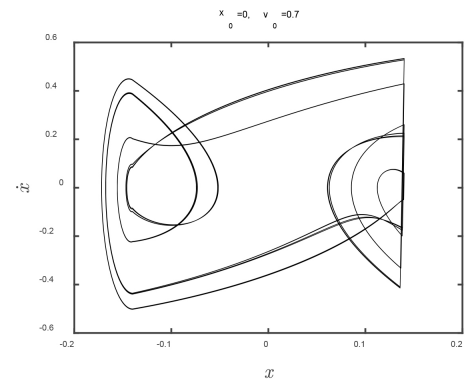
以 PD, GR, SN 分别表示倍化分岔、擦边分岔和鞍结分岔由图 2 可知, 随着 ω 的减小, 系统在 $\omega = 1.2794$ 时为 PD, 从周期一进入周期二运动, 在 $\omega = 1.2017$ 和 $\omega = 1.1816$ 时为 PD 进入周期四和周期八如图 3 所示, 又在 $\omega = 1.1757$ 时进入混沌, 随后在 $\omega = 1.1584$ 再次进入单周期运动。

在 $x_0 = 0, v_0 = 0.7$ 时刻不同 ω 时的相图和 Poincaré 图(图 4):



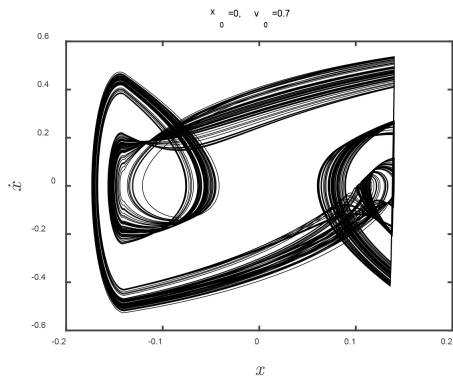
$\omega = 1.28$ 时刻相图

$\omega = 1.28$ Instances of Phase portraits



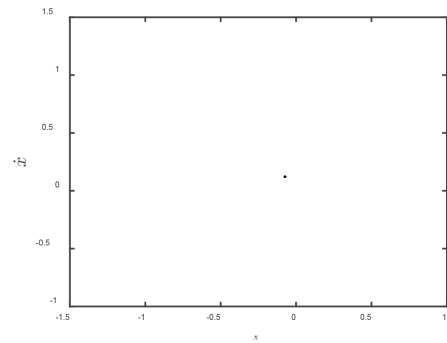
$\omega = 1.1815$ 时刻相图

$\omega = 1.1815$ Instances of Phase portraits



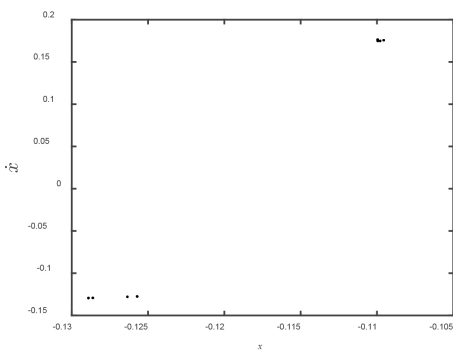
$\omega = 1.1669$ 时刻相图

$\omega = 1.1669$ Instances of Phase portraits



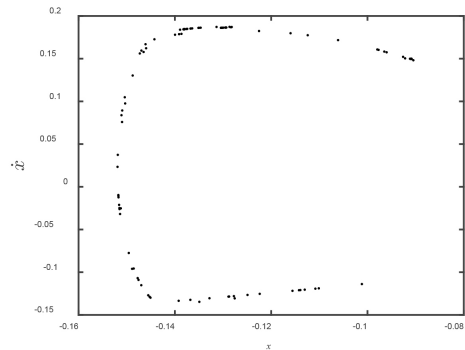
$\omega = 1.28$ 时刻 Poincaré 图

$\omega = 1.28$ Instances of Poincaré map



$\omega = 1.1815$ 时刻 Poincaré 图

$\omega = 1.1815$ Instances of Poincaré map



$\omega = 1.1669$ 时刻 Poincaré 图

$\omega = 1.1669$ Instances of Poincaré map

Figure 4. The phase portraits and Poincaré maps at different ω instances

图 4. 不同 ω 时的相图和 Poincaré 图

为进一步分析研究在周期夹杂区内系统各周期运动时吸引域在状态空间中的分布,选取初态域 $\{(x, \dot{x}), -\delta < x_0 < \delta, -1 < v_0 < 1\}$ 。为进一步得到系统的运动状态空间在参数变化下的转迁规律,固定参数 $\delta = 0.14$, 将初态域划分为 1000×1000 个状态胞。分别选择以下 4 组系统参数绘制系统的吸引域分布图。

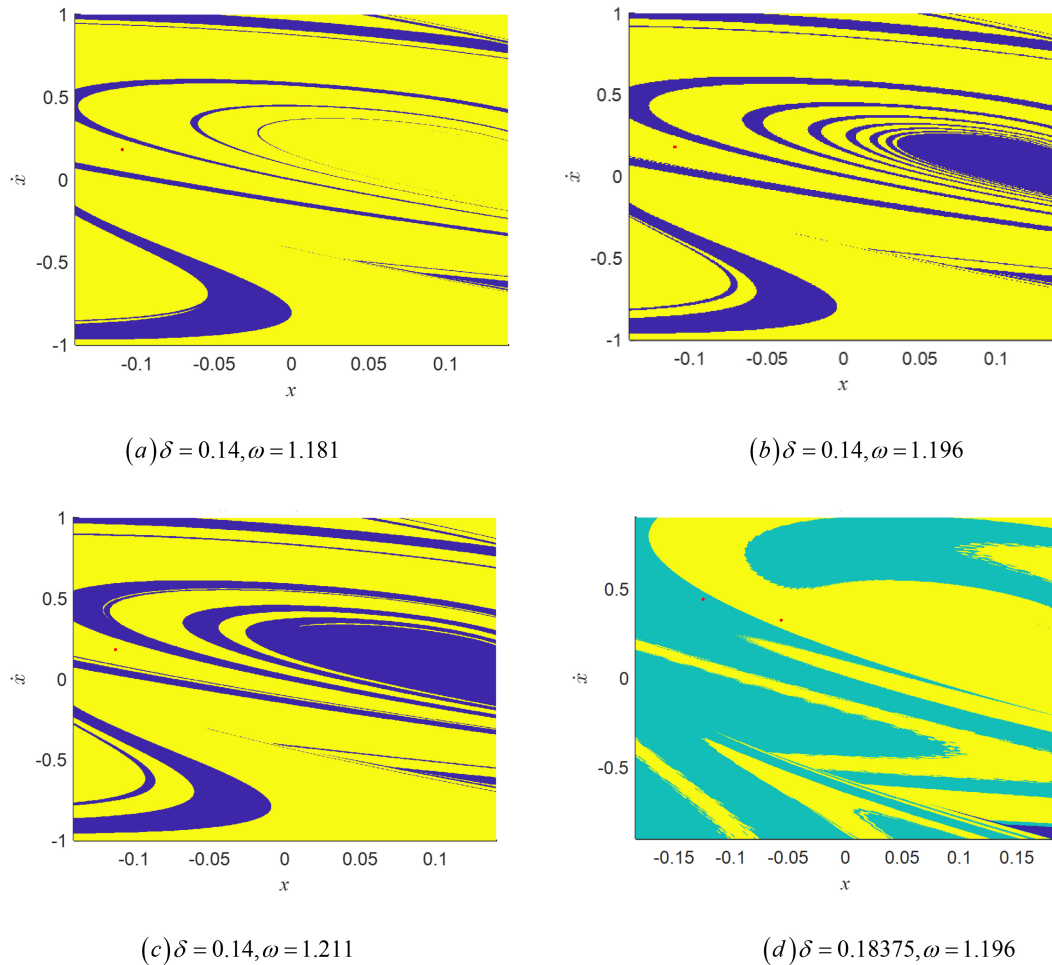


Figure 5. Attractor basin diagrams under different initial value conditions

图 5. 不同初值下吸引域图

在图 5(a)、图 5(b)和图 5(c)中,黄色区域代表周期一阶段,而深蓝色部分则标识为陷胞区域。观察发现,黄色区域与深蓝色区域呈现出交错分布的状态,这一现象表明系统当前处于不稳定性状态,进一步揭示了系统对初始条件的敏感性显著增强。随着外部激励参数的持续增长,深蓝色的陷胞区域也同步扩展,这一趋势明确指出,外部激励参数的增大导致系统的稳定性逐渐减弱。

从图 5(b)、图 5(d)中,可以明显观察到随着参数的改变,图中呈现出黄色周期一吸引子与青蓝色周期二吸引子共存的现象。深蓝色陷胞区域仍然存在,并定位在右下角,坐落于周期一与周期二相邻的区域中。值得注意的是,周期一与周期二的占比相对均衡,而深蓝色陷胞区占比则极为有限,这一分布特征表明在此特定参数条件下,系统表现出较高稳定性,其对初始条件的敏感性显著减弱。

在参数域内,固定部分系统参数的特定值 $\zeta = 0.5, r = 1, \mu_k = 250, \mu_c = 150$ 以及初始的运动状态参数,旨在研究系统运动状态在系统参数平面 (ω, δ) 上的变化情况。如图 5 所示,我们选择了

$\omega = [1.1-1.3], \delta = [0.12-0.15]$, 分别绘制了 $n-p-q$ 参数平面分岔图, 这一图示不仅包含了运动状态参数的变化, 还特别展示 n 的关于周期数的参数平面分岔图。在此图示中, 我们运用了不同颜色以区分各不同类型的周期运动。鉴于运动状态图的复杂性, 我们决定采用更为直观的周期数余维二分岔图, 结合关于特定参数的分岔图进行深入解析。此方法不仅简化了复杂信息的呈现, 还能更清晰地揭示系统的动力学行为。

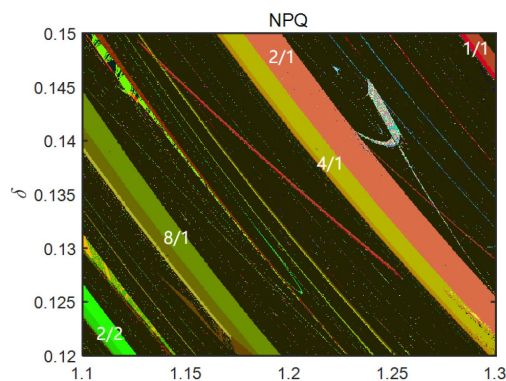


Figure 6. A bifurcation diagram with two parameters
图 6. 双参分岔图

如图 6 所示, 红色区域与绿色区域分别代表周期一运动与周期二运动系统的参数区域。值得注意的是, 这两种周期运动仅占据了选定区域的少数部分。

通过细致观察图中黑色区域, 我们发现其中夹杂着多条红色和绿色带, 以及少量的蓝色带, 这一现象表明存在从混沌周期退化出的周期窗口。未标注的黑色区域则被识别为混沌或长周期状态, 其中 PD、GR 和 SN 分别表示倍化分岔、擦边分岔和鞍结分岔。随着参数的减小, 系统从 1/1 周期逐渐进入混沌状态, 随后混沌状态退化为 2/1 周期运动, 经过 PD 点后进入 4/1 周期运动, 再进入长周期状态后通过 PD 点进入 8/1 周期运动, 继而再次进入混沌状态, 最终退化出 2/2 周期运动。这一系列动态变化清晰地展示了系统在不同分岔类型影响下的复杂行为演化。通过对系统动力学行为的深入解析, 我们为相关领域的研究提供有力的理论支持。这一发现拓宽了我们对非线性系统复杂性的认识, 并为探索其在工程和自然科学中的应用提供了新的视角。通过对这些复杂行为的透彻理解, 我们能够更精确地预测和控制系统的动态响应, 从而推动相关技术的发展。这一研究成果无疑为非线性动力学分析和应用探索奠定了坚实的基础。

5. 结论

本文深入探讨了一种具有双侧非对称约束的单自由度非对称碰撞振动系统。在进行系统的无量纲化建模处理后, 我们对系统的周期运动分岔类型进行了详细分析。通过固定部分系统参数的特定值以及初始的运动状态参数, 我们进一步研究了系统在单参数平面上的运动状态及其分岔图。结果表明, 随着相关参数数值的不断减小, 系统经历了倍化分岔、叉式分岔以及混沌等复杂的动力学转变。

此外, 通过对吸引域的深入分析, 我们揭示了周期一的演化规律, 并观察到周期一与周期二吸引子共存的显著现象。在固定系统参数值及初始运动状态参数的基础上, 我们对系统的参数平面进行了详尽的研究, 从而确定了周期一和周期二的存在占比, 并解析了系统在周期内的演化规律。

综上所述, 上述研究不仅丰富了我们对于非对称碰撞振动系统的理解, 也为相关领域的进一步探索提供了坚实的理论基础。通过深入解析系统的复杂动力学行为及参数依赖性, 我们能够更精确地预测系统

在不同条件下的响应,从而为工程设计和理论研究提供有力的支持。这一研究成果无疑将进一步推动非线性振动系统的动力学分析和应用探索。

参考文献

- [1] Ma, Y., Ing, J., Banerjee, S., Wiercigroch, M. and Pavlovskaja, E. (2008) The Nature of the Normal Form Map for Soft Impacting Systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **43**, 504-513. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2008.04.001>
- [2] 田海勇, 刘卫华, 赵日旭. 随机干扰下碰撞振动系统的动力学分析[J]. 振动与冲击, 2009, 28(9): 163-167.
- [3] 张惠. 碰撞振动系统参数-状态空间全局动力学研究[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州交通大学, 2021.
- [4] Nusse, H.E. and Yorke, J.A. (1995) Border-Collision Bifurcations for Piecewise Smooth One-Dimensional Maps. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **5**, 189-207. <https://doi.org/10.1142/s0218127495000156>
- [5] Nusse, H.E., Ott, E. and Yorke, J.A. (1994) Border-Collision Bifurcations: An Explanation for Observed Bifurcation Phenomena. *Physical Review E*, **49**, 1073-1076. <https://doi.org/10.1103/physreve.49.1073>
- [6] Nordmark, A.B. (1991) Non-Periodic Motion Caused by Grazing Incidence in an Impact Oscillator. *Journal of Sound and Vibration*, **145**, 279-297. [https://doi.org/10.1016/0022-460x\(91\)90592-8](https://doi.org/10.1016/0022-460x(91)90592-8)
- [7] di Bernardo, M., Budd, C.J. and Champneys, A.R. (2001) Normal Form Maps for Grazing Bifurcations in n -Dimensional Piecewise-Smooth Dynamical Systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **160**, 222-254. [https://doi.org/10.1016/s0167-2789\(01\)00349-9](https://doi.org/10.1016/s0167-2789(01)00349-9)
- [8] Di Bernardo, M., Budd, C.J. and Champneys, A.R. (2001) Grazing and Border-Collision in Piecewise-Smooth Systems: A Unified Analytical Framework. *Physical Review Letters*, **86**, 2553-2556. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.86.2553>
- [9] Parker, T.S. and Chua, L.O. (2012) Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems. Springer Science & Business Media.
- [10] 李银山. 振动力学: 线性振动[M]. 北京: 人民交通出版社, 2022.
- [11] 文成秀, 姚玉玺, 闻邦椿, 等. 动力系统的点映射-胞映射综合法[J]. 振动工程学报, 1997, 10(4): 21-27.
- [12] Hsu, C.S. (1980) A Theory of Cell-to-Cell Mapping Dynamical Systems. *Journal of Applied Mechanics*, **47**, 931-939. <https://doi.org/10.1115/1.3153816>
- [13] Hsu, C.S. (1981) A Generalized Theory of Cell-to-Cell Mapping for Nonlinear Dynamical Systems. *Journal of Applied Mechanics*, **48**, 634-642. <https://doi.org/10.1115/1.3157686>
- [14] Hsu, C.S. and Tongue, B.H. (1988) Cell-to-Cell Mapping, a Method of Global Analysis for Nonlinear Systems. *Journal of Applied Mechanics*, **55**, 749-750. <https://doi.org/10.1115/1.3125869>
- [15] Hsu, C.S. (1995) Global Analysis of Dynamical Systems Using Posets and Digraphs. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **5**, 1085-1118. <https://doi.org/10.1142/s021812749500079x>
- [16] Van Der Spek, J.A.W., De Hoon, C.A.L., De Kraker, A. and Van Campen, D.H. (1994) Application of Cell Mapping Methods to a Discontinuous Dynamic System. *Nonlinear Dynamics*, **6**, 87-99. <https://doi.org/10.1007/bf00045434>
- [17] Virgin, L.N. and Begley, C.J. (1999) Grazing Bifurcations and Basins of Attraction in an Impact-Friction Oscillator. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **130**, 43-57. [https://doi.org/10.1016/s0167-2789\(99\)00016-0](https://doi.org/10.1016/s0167-2789(99)00016-0)
- [18] Levitas, J., Weller, T. and Singer, J. (1994) Poincaré-Like Simple Cell Mapping for Non-Linear Dynamical Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **176**, 641-662. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1404>
- [19] 刘恒, 虞烈, 谢友柏, 等. Poincare 型胞映射分析方法及其应用[J]. 力学学报, 1999, 31(1): 91-99.
- [20] 李得洋, 丁旺才, 丁杰, 等. 单自由度含对称约束碰撞系统周期运动的转迁规律分析[J]. 振动与冲击, 2019, 38(22): 52-59.
- [21] 张惠, 丁旺才, 李险峰. 分段光滑碰撞振动系统吸引域结构变化机理研究[J]. 振动与冲击, 2019, 38(18): 141-147.
- [22] Zhang, H., Li, X. and Leung, A.Y.T. (2020) A Calculation Method on Bifurcation and State Parameter Sensitivity Analysis of Piecewise Mechanical Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **30**, Article 2030033. <https://doi.org/10.1142/s0218127420300335>
- [23] Li, Z., Kang, J., Jiang, J. and Hong, L. (2022) Parallel Subdomain Synthesis of Cell Mapping for Capturing Global Invariant Sets in Higher-Dimensional Dynamical Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **32**, Article 2250231. <https://doi.org/10.1142/s0218127422502315>