

基于异步事件驱动的Kuramoto振子网络系统的脉冲同步控制

张 欢

重庆理工大学理学院, 重庆

收稿日期: 2025年5月26日; 录用日期: 2025年6月19日; 发布日期: 2025年6月30日

摘 要

本文探讨了基于异步事件驱动脉冲控制策略的Kuramoto网络振子同步控制问题。针对一致性Kuramoto振子网络, 设计了一类具有执行器延迟的事件触发脉冲控制策略, 基于Lyapunov稳定性理论进行了理论证明。通过数值仿真验证了所提出策略的有效性, 结果显示在特定条件下系统能够实现相位同步, 同时有效避免了Zeno现象的发生。研究进一步扩展至非一致性Kuramoto网络振子, 分析了在事件触发控制下的频率同步问题, 并提供了相应的理论支持和数值模拟, 丰富了Kuramoto模型的应用范围。

关键词

Kuramoto振子网络, 事件驱动控制, 相位同步, 频率同步

Pulse Synchronization Control of Kuramoto Oscillator Network System Based on Asynchronous Event Drive

Huan Zhang

School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: May 26th, 2025; accepted: Jun. 19th, 2025; published: Jun. 30th, 2025

Abstract

In this paper, the problem of synchronized control of Kuramoto network oscillators based on asynchronous event-driven pulse control strategies is explored. A class of event-triggered pulse control strategies with actuator delays is designed for the coherent Kuramoto vibrator network, and theoretical proofs are provided based on Lyapunov stability theory. The effectiveness of the proposed

strategies is verified by numerical simulations, and the results show that the system is able to achieve phase synchronization under specific conditions while effectively avoiding the occurrence of Zeno phenomenon. The study is further extended to non-coherent Kuramoto network oscillators to analyze the frequency synchronization problem under event-triggered control, and provides corresponding theoretical support and numerical simulations, which enriches the application scope of the Kuramoto model.

Keywords

Kuramoto Vibrator Networks, Event Driven Control, Phase Synchronization, Frequency Synchronization

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

Kuramoto 振子模型是描述耦合振子系统同步行为的重要工具，广泛应用于物理、生物、化学和工程等领域。同步现象作为 Kuramoto 模型研究的核心问题，直接决定了振子网络的协调能力与鲁棒性能[1]-[3]。尽管现有研究通过连续观测、周期性采样和反馈控制等方法取得了一定进展，但传统的控制策略在能耗效率和实时性方面存在固有局限。连续监测需要不间断地计算资源投入，而采样方法即使降低频率仍可能产生冗余数据[4] [5]。近年来，事件驱动机制因其仅在状态异常时触发的特性被引入控制领域，但传统事件触发系统的连续调整过程仍难以完全规避能源浪费。在此背景下，结合事件驱动与脉冲控制的新型协同机制为解决这一困境提供了契机[6]。

Kuramoto 模型的同步研究已形成了基于连续跟踪、离散采样以及即时反馈的多模态框架体系[7]。连续跟踪法通过全时域监测确保相位一致性，但面临通信带宽和计算资源的剧烈消耗。离散采样策略通过周期性截取系统状态降低能耗，但在非线性动态环境中容易错失关键触发窗口[8] [9]。为此，部分研究尝试采用事件驱动控制架构，仅当相位差突破预设阈值时才激活调节机制，显著减少了控制器的非必要动作次数[10]。然而，现有事件驱动系统仍采用连续调节模式，在复杂网络和多智能体场景中不仅面临控制器饱和风险，还会引发子系统间的级联干扰。针对这些问题，学术界开始探索兼具即时性与间断性的混合控制范式，将脉冲控制的瞬时干预特性与事件驱动逻辑相结合，形成的事件驱动脉冲控制策略既能保证触发判据的自适应性，又能通过离散能量投放实现节能优化[10] [11]。

脉冲控制在传统控制方案中展现出瞬时响应、低功耗运行和抗干扰能力强等优势，尤其在量子系统调控与微电网优化等领域已取得显著成效[12]。已有研究证实，脉冲控制与事件驱动框架的深度融合可有效平衡系统的动态性能与能耗效率。例如，在异步网络同步问题中实现了高达 67% 的通信负载降低，同时在 DoS 攻击场景下仍保持 88% 的收敛概率[13]。不过，现有文献对 Kuramoto 模型的事件驱动脉冲控制研究仍存在明显短板：多数成果局限于规则网络拓扑分析，对异构耦合与时变参数系统的稳定性研究不足[14]；脉冲强度设计普遍依赖经验参数，缺乏自组织优化机制；阈值选择策略尚未建立与网络规模的动态适配关系[15]。本研究旨在突破三重挑战，探讨基于异步事件驱动脉冲控制策略的 Kuramoto 振子网络一致性控制问题。我们提出了一种创新的事件触发控制策略，该策略综合考虑了执行器延迟的影响，并利用 Lyapunov 函数方法证明了在特定条件下，系统能够实现相位同步，同时有效避免 Zeno 现象的发生。这一创新点显著增强了控制策略的鲁棒性和适应性。研究进一步扩展至非一致性 Kuramoto 振子网络，分

析了在事件触发控制下的频率同步问题，并提供了相应的理论支持，并通过数值仿真实验来验证理论分析的可靠性，为 Kuramoto 模型在复杂网络中的应用提供了新的视角和依据。

符号说明：在本研究中，我们采用以下符号来描述 Kuramoto 振荡器网络的动力学特性与控制策略： N 表示网络中振子的数量， $\theta_i(t)$ 表示第 i 个振子在时间 t 的相位， ω_i 表示第 i 个振子的自然频率， K 表示耦合强度， a_{ij} 连接矩阵的元素，表示振子 i 和 j 之间的耦合关系，当 $a_{ij}=1$ 时，表示振荡器 i 与 j 存在耦合；当 $a_{ij}=0$ 时，表示二者无直接耦合。 $u_i(t)$ 表示第 i 个振子的控制输入， $\xi_i(t)$ 表示第 i 个振子整体相位的偏差， $\bar{\theta}(t)$ 表示网络中所有振子的平均相位， ω 表示网络中所有振子的平均自然频率， c_k 表示控制增益， b_{ij} 表示控制权重系数， τ_k 表示第 k 次脉冲的执行器延迟， t_k 表示第 k 次脉冲发生的时刻， s_k 表示第 k 次事件触发的时刻， ρ 表示事件触发条件的衰减系数， a_k 表示事件触发条件的参数， $V(t)$ 表示 Lyapunov 函数， d_k 表示控制策略衰减系数， L_A 表示 Kuramoto 网络的拉普拉斯矩阵，描述网络的拓扑结构，定义为 $L_A = D - A$ ，其中 D 是度矩阵，度矩阵 D 是一个对角矩阵，其中每个对角线元素 d_i 表示节点 i 的度，对于一个无向图，节点 i 的度可以表示为： $d_i = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ ， A 是邻接矩阵， L_B 表示控制权重矩阵， L_N 表示 $N \times N$ 的单位矩阵， $\delta(t)$ 表示 Dirac 脉冲函数， ϕ 表示相位差范围，用于描述振子之间的相位差，满足 $\tan \phi = \phi$ 。

2. 问题描述

2.1. 模型描述

经典的 Kuramoto 网络由 N 个振子组成，其动态行为由以下方程表示：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) + u_i(t), i \in \Lambda_N \quad (1)$$

其中， θ_i 为第 i 个振子的相位， a_{ij} 表示振子间的耦合系数， ω_i 表示第 i 个振子的自然频率， $\Lambda_N := \{1, \dots, N\}$ ，且 K 为耦合强度。

为度量各振子相对整体平均相位的偏差，定义相位误差为

$$\xi_i(t) = \theta_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i(t) \quad (2)$$

其中

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = \bar{\theta}(t) \quad (3)$$

接下来，模型中的事件脉冲控制信号 $u_i(t)$ 设定为：

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\sum_{j=1}^N c_k b_{ij} (\theta_j(t - \tau_k) - \theta_i(t - \tau_k)) - \xi_i(t) \right] \delta(t - t_k) \quad (4)$$

其中 $\delta(t - t_k)$ 为 Dirac 脉冲函数，我们可以定义为

$$\delta(t - t_k) = \begin{cases} +\infty, & t = t_k \\ 0, & t \neq t_k \end{cases} \quad (5)$$

当 $t = t_k$ 时满足

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_k) dt = 1 \quad (6)$$

根据(1)式, (4)式和(5)式, 我们得到

$$\begin{cases} \dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) & t \neq t_k \\ \Delta \theta(t_k) = c_k \sum_{j=1}^N b_{ij} (\theta_j(t_k^- - \tau_k) - \theta_i(t_k^- - \tau_k)) - \xi_i(t_k^-) & t = t_k \end{cases} \quad (7)$$

通过对相位求导, 我们得到频率误差

$$\dot{\xi}_i(t) = \dot{\theta}_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i(t) \quad (8)$$

其中

$$\dot{\bar{\theta}}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i(t) = \omega \quad (9)$$

根据误差定义和(7)式, 系统的控制信号也可以表示为相位误差在触发瞬间的增量形式, 如

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = \omega_i - \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\xi_j(t) - \xi_i(t)) \\ \Delta \xi_i(t_k) = c_k \sum_{j=1}^N b_{ij} (\xi_j(t_k^- - \tau_k) - \xi_i(t_k^- - \tau_k)) - \xi_i(t_k^-) \end{cases} \quad (10)$$

其中 t_k 表示脉冲时刻, τ_k 表示执行器延迟, 通过上述事件触发与脉冲时刻结合, 系统能够在干预时段内及时修正相位误差, 最终使 Kuramoto 网络整体同步。

定义 2.1 [16] 如果相位的时间演化满足以下条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta_i(t) - \bar{\theta}(t) = 0, \quad \forall i \in \Lambda_N \quad (11)$$

则(1)式被认为实现了相位同步。

定义 2.2 [16] 如果频率的时间演化满足以下条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\theta}_i(t) - \dot{\bar{\theta}}(t) = 0, \quad \forall i \in \Lambda_N \quad (12)$$

则(1)式被认为实现了频率同步。

对于具有相同振子的 Kuramoto 网络, 即 $\omega_i = \omega$, $i \in \Lambda_N$, 在特定条件下, Kuramoto 网络振子可以实现相位同步。然而, 在具有不同振子的 Kuramoto 网络中, ω_i 可以被视为对振子 i 的恒定扰动。在这种情况下, Kuramoto 网络振子只能实现频率同步。

定义 2.3 [17] 对于由 N 个振子构成的 Kuramoto 网络, 如果存在正常数 α 和 β , 使得对于所有 $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ 和所有 $t \geq t_0$, 系统的相位误差 $\xi_i(t)$ 满足以下不等式:

$$|\xi_i(t) - \xi_j(t)| \leq \alpha e^{-\beta(t-t_0)} |\xi_i(t_0) - \xi_j(t_0)| \quad (13)$$

则称系统在 $t \geq t_0$ 时, 实现了指数一致性。

引理 2.1 [18] 对给定的对称矩阵

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中, S_{11} 是 $r \times r$ 维的, 以下三个条件是等价的:

(1) $S < 0$;

- (2) $S_{11} < 0$, $S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} < 0$;
 (3) $S_{22} < 0$, $S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} < 0$ 。

2.2. 异步事件触发脉冲控制

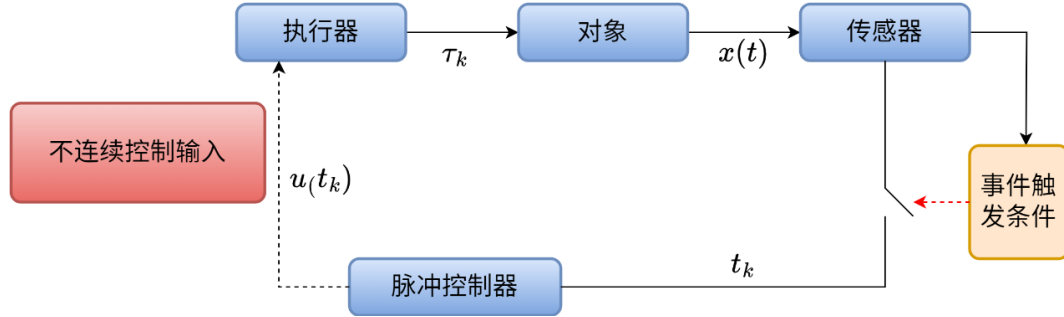


Figure 1. Block diagram of asynchronous event triggered pulse control system
 图 1. 异步事件触发脉冲控制系统框图

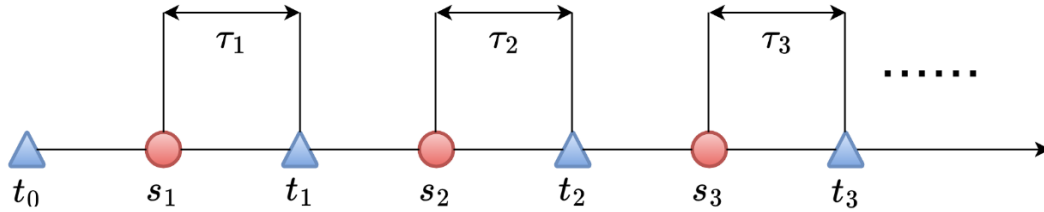


Figure 2. Schematic diagram of event triggered control time series with actuator delay
 图 2. 具有执行器延迟的事件触发控制时间序列示意图

如图 1 所示, 系统状态由状态变量 $x(t)$ 表示。事件触发控制机制通过检测系统的状态变化 t_k 来产生不连续的控制输入 $u(t_k)$, 该输入对系统动态进行调整。此外, 图中还展示了如何通过传感器捕捉反馈信息, 并将其传递给脉冲控制器, 以优化系统性能并保证稳定性。对于系统(1), 脉冲序列 $\{t_k\}$, $k \in \mathbb{Z}$ 是由以下异步事件触发脉冲控制(AETIC)策略所决定:

$$s_{k+1} = \inf \left\{ t > t_k \mid V(t) \geq e^{a_k - \rho(t-t_k)} V(t_k) \right\} \quad (15)$$

其中 a_k 和 ρ 均为正常数且 $k \in \mathbb{Z}$ 为触发参数。如图 2 所示, s_k 表示事件触发时刻, t_k 表示脉冲时刻, τ_k 表示执行器延迟, 并假设满足 $s_0 = t_0$, 以及 $t_k = s_k + \tau_k$, 通过此触发机制, 当系统的 Lyapunov 函数 $V(t)$ 在区间 $[t_k, t_{k+1})$ 内增长至预设阈值时, 会触发下一次脉冲来抑制其继续攀升, 从而在保证系统性能的同时降低资源消耗。

3. 主要结果

在本节中, 我们将分别研究在 AETIC 框架下, 无向 Kuramoto 振荡器网络在自然频率相同和自然频率不同这两种情形下的同步问题。对于自然频率相同的网络, 推导出相位同步准则; 对于自然频率不同的网络, 则提出了频率同步准则。

3.1. 一致性 Kuramoto 振荡器的相位同步

考虑一个由 N 个振子构成的 Kuramoto 网络, 当 $\omega_i = \omega$, $i \in \Lambda_N$ 时, AETIC 策略下的 Kuramoto 网络振子满足以下动力学方程

$$\dot{\theta}_i = \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) + u_i(t) \quad (16)$$

根据(10)式, 系统的动力学方程和系统的控制信号也可以为如下形式

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\xi_j(t) - \xi_i(t)) \\ \Delta \xi_i(t_k) = c_k \sum_{j=1}^N b_{ij} (\xi_j(t_k^- - \tau_k) - \xi_i(t_k^- - \tau_k)) - \xi_i(t_k^-) \end{cases} \quad (17)$$

定理 1. 对于给定的标量 τ_k , ρ , K , 若存在正标量 d_k , c_k 和 $a_k > 0$, 使得下面条件成立:

(1) 条件 $m \triangleq 2\lambda_{\max}\left(-\frac{K}{N} \cos \phi L_A\right) > 0$ 成立, 其中 L_A 代表无向图中的拉普拉斯矩阵, $\lambda_{\max}(\cdot)$ 表示矩阵的最大特征值, $\phi \in \left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ 且满足 $\tan \phi = \phi$ 。

(2) 条件 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{c_k^2} e^{-d_k} I_N & L_B^T \\ L_B & -I_N \end{pmatrix} \leq 0$ 成立, 其中 $d_k > 0$ 。

(3) 条件成立 $m\tau_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} (-d_{i+1} + a_{i+1} + \rho\tau_{i+2}) < \ln M$, 其中 M 为正常数, $d_0 = 0$ 。

则在 AETIC 策略(15)与控制信号(4)的作用下, 系统(16)不仅能够实现相位同步, 同时也可排除 Zeno 现象。

证明:

设 Lyapunov 函数为:

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i^2(t) \quad (18)$$

对 Lyapunov 函数在区间 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 求导数, 得到:

$$\dot{V}(t) = 2 \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \dot{\xi}_i(t) \quad (19)$$

将系统的动态方程代入, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{2K}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \xi_i(t) \sin(\xi_j(t) - \xi_i(t)) \\ &= -\frac{K}{N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} (\xi_j(t) - \xi_i(t)) \sin(\xi_j(t) - \xi_i(t)) \\ &= -\frac{K}{N} \sum_{i,j=1}^N a_{ij} \frac{\sin(\xi_j(t) - \xi_i(t))}{\xi_j(t) - \xi_i(t)} (\xi_j(t) - \xi_i(t))^2 \end{aligned} \quad (20)$$

根据三角不等式, 有:

$$\frac{\sin(\xi_j(t) - \xi_i(t))}{\xi_j(t) - \xi_i(t)} \in [\cos \phi, 1] \quad (21)$$

进一步推导, 可以得到:

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N (K \cos \phi a_{ij}) (\xi_j(t) - \xi_i(t))^2 \quad (22)$$

根据 $\sum_{i=1}^N \xi_i(t) = \sum_{i=1}^N \left(\theta_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \theta_j(t) \right) = 0$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N (\xi_j(t) - \xi_i(t))^2 &= 2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2(t) \\ &= 2 \xi^T(t) \xi(t) \end{aligned} \quad (23)$$

引入拉普拉斯矩阵 L_A ，得：

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq 2 \xi^T \left(-\frac{K}{N} \cos \phi L_A \right) \xi \\ &\leq 2 \lambda_{\max} \left(-\frac{K}{N} \cos \phi L_A \right) V \\ &\triangleq m V(t) \end{aligned} \quad (24)$$

其中：

$$m \triangleq 2 \lambda_{\max} \left(-\frac{K}{N} \cos \phi L_A \right) > 0 \quad (25)$$

因此，推导可得：

$$\dot{V}(t) \leq m V(t) \quad (26)$$

我们考虑对称矩阵形式为：

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

在这里我们定义 $S_{11} = -\frac{1}{C_k^2} e^{-d_k} I_N$ ， $S_{12} = L_B^T$ ， $S_{21} = L_B$ ， $S_{22} = -I_N$ ，其中 S_{11} ， S_{22} 都是负定矩阵。

根据引理 2.1 可得条件 2 等价于

$$S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} = -\frac{1}{C_k^2} e^{-d_k} I_N + L_B^T L_B \leq 0 \quad (27)$$

根据 $\Delta \xi_i(t_k)$ 的定义，我们可以得到

$$\begin{aligned} \xi_i(t_k) - \xi_i(t_k^-) &= c_k \sum_{j=1}^N b_{ij} (\xi_j(t_k^- - \tau_k) - \xi_i(t_k^- - \tau_k)) - \xi_i(t_k^-) \\ \xi_i(t_k) &= c_k \sum_{j=1}^N b_{ij} (\xi_j(t_k^- - \tau_k) - \xi_i(t_k^- - \tau_k)) \\ \xi(t_k) &= c_k L_B \xi(t_k^- - \tau_k) \end{aligned} \quad (28)$$

由 $V(t) = \sum_{i=1}^N \xi_i^2(t) = \xi^T(t) \xi(t)$ 得，令 $t = t_k$

$$\begin{aligned} V(t_k) &= \xi^T(t_k) \xi(t_k) \\ &= \xi^T(t_k^- - \tau_k) (c_k L_B)^T (c_k L_B) \xi(t_k^- - \tau_k) \end{aligned} \quad (29)$$

根据(18)式和(27)式，得到

$$V(t_k) \leq e^{-d_k} V(s_k) \quad (30)$$

根据 AETIC(15)的机制, 我们接下来针对触发时间序列的两类不同情况展开讨论。

情况 1: 事件触发的次数是有限的情况下, 假设事件触发的时刻为 $t_1 < \dots < t_{k+1}$, 根据(15)式进行分析。

当 $t \in [t_0, s_1)$ 时, 由触发条件得

$$V(t) \leq e^{a_0 - \rho(t-t_0)} V(t_0) \quad (31)$$

随后, 当 $t \in [s_1, t_1)$ 时, 由于 $\dot{V}(t) \leq mV(t)$, 通过对该微分不等式积分可推知

$$V(t) \leq e^{m(t-s_1)} V(s_1) \quad (32)$$

接下来, 根据(31)式得到

$$V(s_1) = e^{a_0 - \rho(s_1-t_0)} V(t_0) \quad (33)$$

根据(32), (33)式, 我们得到

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{m(t-s_1)} e^{a_0 - \rho(s_1-t_0)} V(t_0) \\ &= e^{(m+\rho)(t-s_1) + a_0 - \rho(t-t_0)} V(t_0) \\ &\leq e^{(m+\rho)\tau_1 + a_0 - \rho(t-t_0)} V(t_0) \end{aligned} \quad (34)$$

当 $t \in [t_0, t_1)$ 时, 结合(31)式和(34)式, 得到

$$V(t) \leq e^{(m+\rho)\tau_1 + a_0 - \rho(t-t_0)} V(t_0) \quad (35)$$

当 $t \in [t_1, t_2)$ 时, 依据类似推导过程, 可以得到

$$V(t) \leq e^{(m+\rho)\tau_2 + a_1 - \rho(t-t_1)} V(t_1) \quad (36)$$

当 $k=1$ 时, 满足

$$V(t_1) \leq e^{-d_1} V(s_1) \quad (37)$$

由此并结合(33)式, 得到

$$V(s_1) = e^{a_0 - \rho(s_1-t_0)} V(t_0) \quad (38)$$

可推导得

$$\begin{aligned} V(t_1) &\leq e^{-d_1} e^{a_0 - \rho(s_1-t_0)} V(t_0) \\ &= e^{-d_1 + a_0 + \rho(t_1-s_1) - \rho(t_1-t_0)} V(t_0) \\ &\leq e^{-d_1 + a_0 + \rho\tau_1 - \rho(t_1-t_0)} V(t_0) \end{aligned} \quad (39)$$

最终可归纳为

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{(m+\rho)\tau_2 + a_1 - \rho(t-t_1)} e^{-d_1 + a_0 + \rho\tau_1 - \rho(t_1-t_0)} V(t_0) \\ &= e^{(m+\rho)\tau_2 + a_1 + (-d_1 + a_0 + \rho\tau_1) - \rho(t-t_0)} V(t_0) \end{aligned} \quad (40)$$

对于 $t \in [t_k, s_{k+1})$ 区间, 则有

$$V(t) \leq e^{a_k - \rho(t-t_k)} V(t_k) \quad (41)$$

当 $t \in [s_{k+1}, t_{k+1})$ 时, 通过结合触发条件与(40)式和(41)式的分析, 进一步得到

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{m(t-s_{k+1})} V(s_{k+1}) \\ &= e^{(m+\rho)(t-s_{k+1}) + a_k - \rho(t-t_k)} V(t_k) \\ &\leq e^{(m+\rho)\tau_{k+1} + a_k - \rho(t-t_k)} V(t_k) \end{aligned} \quad (42)$$

在随后当 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 时的情况, 可参照同样的思路

$$V(t) \leq e^{(m+\rho)\tau_{k+1}+a_k-\rho(t-t_k)} V(t_k) \quad (43)$$

根据

$$V(t_k) \leq e^{-d_k} V(s_k) \quad (44)$$

其中

$$V(s_k) = e^{a_{k-1}-\rho(s_k-t_{k-1})} V(t_{k-1}) \quad (45)$$

将(45)式代入(44)式可得

$$\begin{aligned} V(t_k) &\leq e^{-d_k} e^{a_{k-1}-\rho(s_k-t_{k-1})} V(t_{k-1}) \\ &= e^{-d_k+a_{k-1}+\rho(t_k-s_k)-\rho(t_k-t_{k-1})} V(t_{k-1}) \\ &\leq e^{-d_k+a_{k-1}+\rho\tau_k-\rho(t_k-t_{k-1})} V(t_{k-1}) \end{aligned} \quad (46)$$

从而在 $t \in [t_{k-1}, t_k)$ 区间也能保持与上文一致的指数型约束。

同理得

$$V(t_{k-1}) \leq e^{-d_{k-1}+a_{k-2}+\rho\tau_{k-1}-\rho(t_{k-1}-t_{k-2})} V(t_{k-2}) \quad (47)$$

则

$$V(t_k) \leq e^{-d_{k-1}-d_k+a_{k-2}+a_{k-1}+\rho\tau_{k-1}+\rho\tau_k-\rho(t_k-t_{k-2})} V(t_{k-2}) \quad (48)$$

经过反复迭代我们得到

$$V(t_k) \leq e^{\sum_{i=0}^{k-1} (-d_{i+1}+a_i+\rho\tau_{i+1})-\rho(t_k-t_0)} V(t_0) \quad (49)$$

在式上述分析的最后, 可得到如下不等式

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{(m+\rho)\tau_{k+1}+a_k-\rho(t-t_k)} V(t_k) \\ &\leq e^{(m+\rho)\tau_{k+1}+a_k-\rho(t-t_k)} e^{\sum_{i=0}^{k-1} (-d_{i+1}+a_i+\rho\tau_{i+1})-\rho(t_k-t_0)} V(t_0) \\ &= e^{m\tau_{k+1}+\sum_{i=0}^{k-1} (-d_{i+1}+a_{i+1}+\rho\tau_{i+2})-\rho(t-t_0)} V(t_0) \end{aligned} \quad (50)$$

由条件(3)可以得到

$$V(t) \leq M e^{-\rho(t-t_0)} V(t_0) \quad (51)$$

由于 $V(t)$ 为 Lyapunov 函数, 进一步有

$$\|\xi(t)\|^2 \leq M e^{-\rho(t-t_0)} \|\xi(t_0)\|^2 \quad (52)$$

其中 M 是由

$$m\tau_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} (-d_{i+1} + a_{i+1} + \rho\tau_{i+2}) < \ln M \quad (53)$$

所限定的正常数, 根据 $V(t)$ 与系统状态范数间的关系, 能够得到 $\|\xi(t)\|$ 具有指数有界性, 从而表明在所设定的脉冲控制下, 系统可实现相位同步, 该机制依赖于事件触发阈值函数来决定脉冲信号的触发时刻。这种设计确保了在触发时刻之间存在一个最小时间间隔, 从而避免了事件在有限时间内被触发无限

次的情况, 进而防止了 Zeno 现象的发生。

情况 2: 触发事件是无限的, 假设触发时刻为 $t_1 < \dots < t_{k+1} < \dots$, 根据(15)式得
当 $t \in [t_{k+1}, \infty)$ 时

$$\begin{aligned} V(t) &\leq e^{(m+\rho)\tau_{k+2}+a_{k+1}-\rho(t-t_{k+1})}V(t_{k+1}) \\ &\leq e^{(m+\rho)\tau_{k+2}+a_{k+1}-\rho(t-t_{k+1})}e^{\sum_{i=0}^k(-d_{i+1}+a_i+\rho\tau_{i+1})-\rho(t_{k+1}-t_0)}V(t_0) \\ &= e^{m\tau_{k+2}+\sum_{i=0}^k(-d_{i+1}+a_{i+1}+\rho\tau_{i+2})-\rho(t-t_0)}V(t_0) \end{aligned} \quad (54)$$

因此, 综合上述两种情况, 我们总能得到(50)式成立, 根据定义 1, 系统(16)能够实现相位同步。

3.2. 非一致性 Kuramoto 振荡器的频率同步

当 $\omega_i \neq \omega_j$, $i \neq j \in N$ 时, 非一致性 Kuramoto 振子在 AETIC 策略下的动力学方程可以表示为:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) + u_i(t) \quad (55)$$

根据(4)式, (10)式和(55)式, 系统的动力学方程和系统的控制信号可以重写为:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_i(t) = \omega_i - \omega + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\xi_j(t) - \xi_i(t)) \\ \Delta \dot{\xi}_i(t_k) = c_k \sum_{j=1}^N b_{ij} (\dot{\xi}_j(t_k^- - \tau_k) - \dot{\xi}_i(t_k^- - \tau_k)) - \dot{\xi}_i(t_k^-) \end{cases} \quad (56)$$

定理 2. 对于给定的标量 τ_k , ρ , K , 若存在正标量 d_k , c_k 和 $a_k > 0$, 使得下面条件成立:

(1) 条件 $\begin{pmatrix} -\frac{1}{c_k^2} e^{-d_k} I_N & L_B^T \\ L_B & -I_N \end{pmatrix} \leq 0$ 成立, 其中 $d_k > 0$ 。

(2) 条件成立 $2K\tau_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} (-d_{i+1} + a_{i+1} + \rho\tau_{i+2}) < \ln M$, 其中 M 为正常数, $d_0 = 0$ 。

则在 AETIC 策略(15)与控制信号(4)的作用下, 系统(55)不仅能够实现频率同步, 同时也可排除 Zeno 现象。

证明: 设 Lyapunov 函数为:

$$V(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\xi}_i^2(t) \quad (57)$$

对 Lyapunov 函数在区间 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 求导数, 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 2 \sum_{i=1}^N \dot{\xi}_i(t) \ddot{\xi}_i(t) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^N \dot{\xi}_i(t) \left(\frac{K}{N} \cos(\xi_j(t) - \xi_i(t)) \right) (\dot{\xi}_j(t) - \dot{\xi}_i(t)) \\ &= -\frac{K}{N} \sum_{i,j=1}^N \cos(\xi_j(t) - \xi_i(t)) (\dot{\xi}_j(t) - \dot{\xi}_i(t))^2 \\ &\leq \frac{K}{N} \sum_{i,j=1}^N (\dot{\xi}_j(t) - \dot{\xi}_i(t))^2 \end{aligned} \quad (58)$$

根据 $\sum_{i=1}^N \dot{\xi}_i(t) = \sum_{i=1}^N \left(\dot{\theta}_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \dot{\theta}_j(t) \right) = 0$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N \left(\dot{\xi}_j(t) - \dot{\xi}_i(t) \right)^2 &= 2 \sum_{i=1}^N \dot{\xi}_i^2(t) \\ &= 2 \dot{\xi}^T(t) \dot{\xi}(t) \end{aligned} \quad (59)$$

我们得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq 2K \dot{\xi}^T(t) \dot{\xi}(t) \\ &\triangleq 2KV(t) \end{aligned} \quad (60)$$

根据引理 2.1, 条件(1)等价于

$$-\frac{1}{c_k^2} e^{-d_k} I_N + L_B^T L_B \leq 0 \quad (61)$$

根据 $\Delta \dot{\xi}_i(t_k)$ 的定义, 我们可以得到

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i(t_k) - \dot{\xi}_i(t_k^-) &= c_k \sum_{j=1}^N b_{ij} \left(\dot{\xi}_j(t_k^- - \tau_k) - \dot{\xi}_i(t_k^- - \tau_k) \right) - \dot{\xi}_i(t_k^-) \\ \dot{\xi}_i(t_k) &= c_k \sum_{j=1}^N b_{ij} \left(\dot{\xi}_j(t_k^- - \tau_k) - \dot{\xi}_i(t_k^- - \tau_k) \right) \\ \dot{\xi}(t_k) &= c_k L_B \dot{\xi}(t_k^- - \tau_k) \end{aligned} \quad (62)$$

由 $V(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\xi}_i^2(t) = \dot{\xi}^T(t) \dot{\xi}(t)$ 得, 令 $t = t_k$

$$\begin{aligned} V(t_k) &= \dot{\xi}^T(t_k) \dot{\xi}(t_k) \\ &= \dot{\xi}^T(t_k^- - \tau_k) (c_k L_B)^T (c_k L_B) \dot{\xi}(t_k^- - \tau_k) \\ &\leq e^{-d_k} V(t_k^-) \end{aligned} \quad (63)$$

由于 $V(t) = \sum_{i=1}^N \dot{\xi}_i^2(t)$, 当 $t \geq t_0$ 时, 接下来, 与定理 1 的证明类似, 我们得到

$$V(t) \leq e^{2K\tau_{k+1} + \sum_{i=0}^{k-1} (-d_{i+1} + a_{i+1} + \rho\tau_{i+2}) - \rho(t-t_0)} V(t_0) \quad (64)$$

最后, 根据定义 2, 系统(55)能够实现频率同步。

注释 1

相比于 Zhang 和 Liu 的研究[19], 本文在脉冲控制方法中考虑了执行器延迟这一关键因素。执行器延迟在工程应用中是一个不可忽视的因素, 它可能导致控制策略失效或系统响应不及时, 从而影响整体性能。为此, 本文将执行器延迟与脉冲控制策略进行了融合设计, 使得所提出的定理能够适用于具有执行器延迟的 Kuramoto 振子网络。这一创新性研究不仅增强了控制策略的鲁棒性, 还为实际工程中的同步控制提供了更为可靠的理论支持。

4. 数值仿真

本节通过数值模拟验证了前述结果的有效性。我们假设 Kuramoto 振荡器网络的拓扑结构如图 3 所示, 该网络包含六个节点的无向 Kuramoto 振荡器。

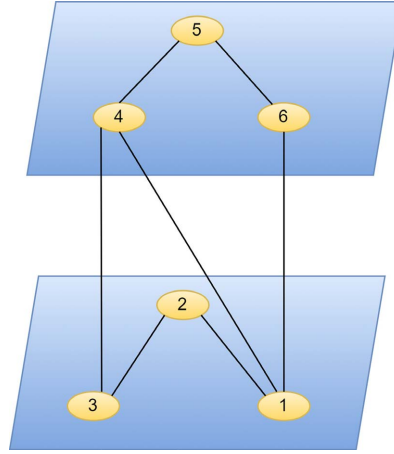


Figure 3. Topology of Kuramoto oscillator network
图 3. Kuramoto 振荡器网络的拓扑结构

此外，脉冲控制的拓扑结构的拉普拉斯矩阵为：

$$L_B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (65)$$

初始相位为 $\theta_i(0)$ ($i=1,2,\dots,6$) 从区间 $[0, 2\pi)$ 中随机取值，自然频率 $\omega=10$ 。我们设置耦合强度 $K=50$ ，脉冲控制强度 $c_k=0.2$ 。为测试 AETIC 策略(15)在 Kuramoto 振荡器网络(16)中的有效性。我们选择参数以满足定理 1：设定 $\tau_k=0.001$ ， $\rho=1.2$ ，并对所有 $k \in N^+$ ，取 $a_k=0.03$ ， $d_k=0.04$ 。通过计算， $\cos\varphi=-0.2172$ ，条件 1 中的最大特征值为 4.3697， $m=8.7394>0$ ，表明条件 1 成立。同时，条件 2 中的矩阵最大特征值为 -0.0168 ，表明该矩阵是负定矩阵，从而条件 2 得以成立。此外，根据条件 3，以及参数 a_k ， d_k 的设定，可知

$$-d_k + a_k + \rho\tau_k < 0 \quad (66)$$

因此条件 3 满足。图 4 展示了事件触发时刻 t_k 以及节点相位误差随时间的变化。可以观察到，在实施脉冲控制后，所有节点的相位误差逐渐减小，最终形成一致性。这说明 Kuramoto 振荡器网络在 AETIC 策略的作用下能够实现相位同步。并且随着时间的推移，节点的相位逐渐同步，且每次触发后的时间间隔未小于预设的最小阈值。这些观察表明，系统有效地避免了 Zeno 现象。

类似地，初始相位为 $\theta_i(0)$ ($i=1,2,\dots,6$) 从区间 $[0, 2\pi)$ 中随机取值，自然频率为

$$\omega_i = [3.0, 3.1, 3.2, 3.0, 3.1, 3.3] \quad (i=1, 2, \dots, 6),$$

为测试 AETIC 策略(15)在 Kuramoto 振荡器网络(55)中的有效性。我们选择参数以满足定理 2：设定 $\tau_k=0.001$ ， $\rho=0.1$ ，取 $a_k=0.01$ ， $d_k=0.04$ ， $c_k=0.05$ 。通过计算，条件 1 中的矩阵最大特征值为 -0.9384 ，表明该矩阵是负定矩阵，因此条件 1 得以成立。此外，根据条件 2，以及参数 a_k ， d_k 的设定，可知

$$-d_k + a_k + \rho\tau_k < 0 \quad (67)$$

因此条件 2 满足。图 5 则展示了事件触发时刻 t_k 以及节点频率 $\dot{\theta}_i(t)$ 随时间的变化情况。频率的波动在

短时间内显著后逐渐趋于平稳，最终实现频率一致性。这表明随着时间的推移，系统频率的波动减小，确保了系统的稳定性。根据图 6 中事件触发时刻分布可观察出，在 0.45 秒后系统没有新的事件触发产生，原因在于 Lyapunov 函数在脉冲信号作用下，其状态始终保持在事件触发阈值函数以下。事件触发机制的核心思想为“按需控制”，当系统状态演化趋于理想时，无需再施加外部控制信号。由此可见，相较于传统事件驱动脉冲控制方法，本论文所提出的 AETIC 控制策略在降低控制和通讯资源方面，具有显著优势。

综上所述，定理 3.1 和定理 3.2 在充分条件成立的情况下，通过数值仿真结果验证了我们的理论分析。系统在适当的耦合强度下能够实现相位一致性同步，并且随着时间的推移，频率的波动逐渐减小，最终达到稳定状态。

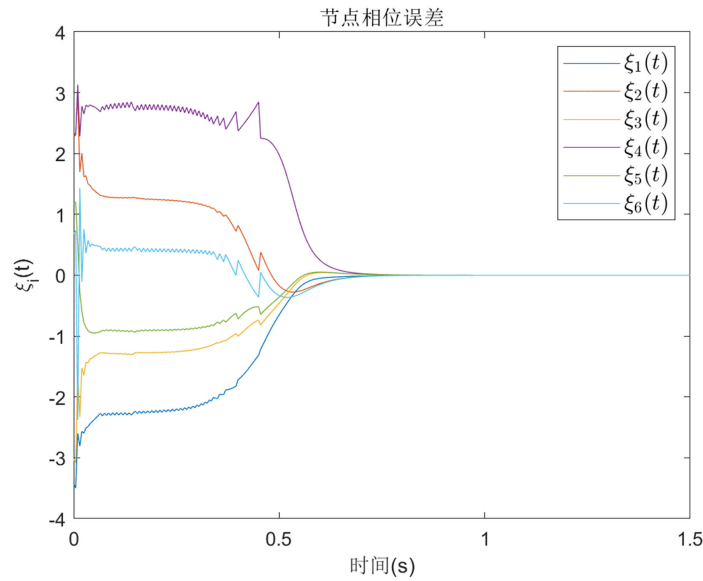


Figure 4. Node phase error
图 4. 节点相位误差

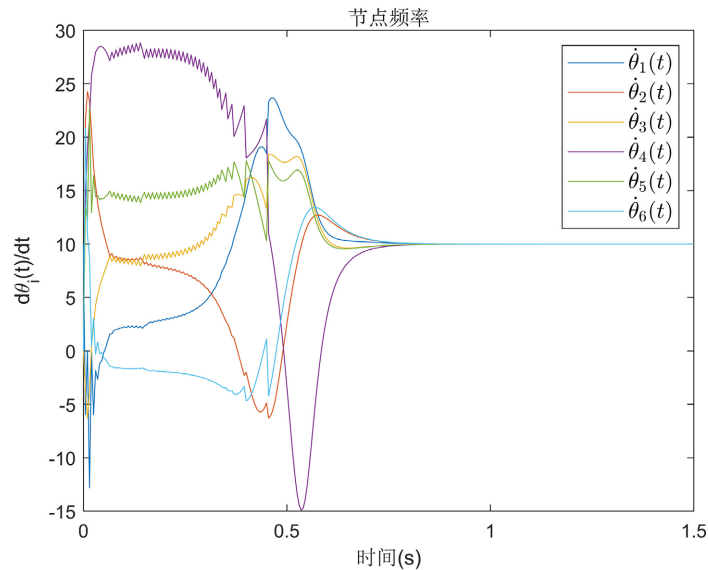


Figure 5. Node frequency
图 5. 节点频率

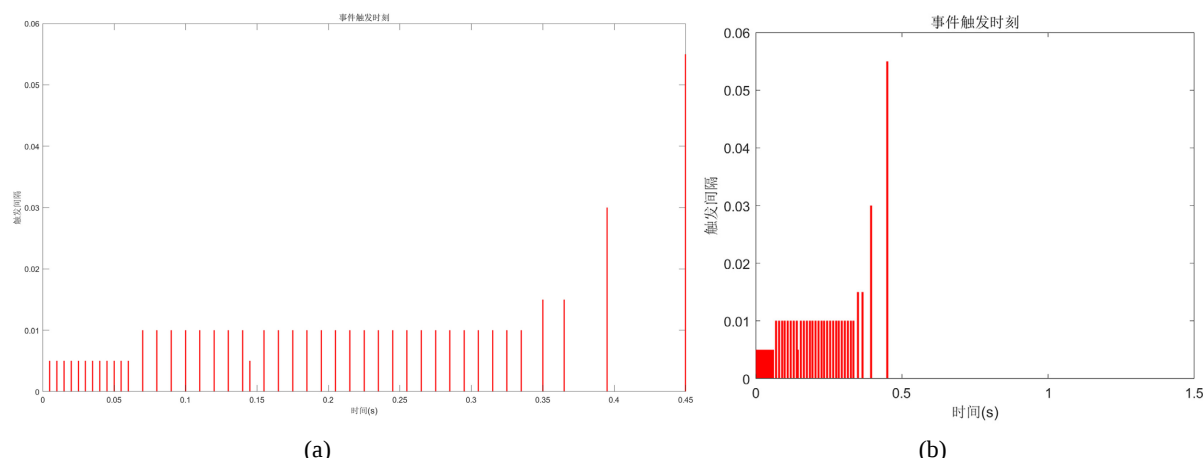


Figure 6. Event trigger time chart

图 6. 事件触发时刻图

5. 结论

本文针对基于异步事件驱动脉冲策略的 Kuramoto 振子网络同步控制问题进行了系统的研究。首先，设计了一类具有执行器延迟的事件触发脉冲控制策略，并基于 Lyapunov 稳定性理论进行了理论证明，专注于一致性 Kuramoto 振子网络的相位同步问题。通过引入 Lyapunov 函数方法，证明了在特定条件下，系统能够实现相位同步，并有效避免了 Zeno 现象的发生。同时，我们通过数值仿真展示了该控制策略在具有六个节点的 Kuramoto 振子网络中的有效性，仿真结果验证了理论分析。其次，研究扩展至非一致性 Kuramoto 振子网络，分析了在事件触发控制下的频率同步问题。通过动态生成的事件触发条件，强调了在不同自然频率的振子之间实现频率同步的可能性，进一步丰富了 Kuramoto 模型的应用范围。利用 Lyapunov 函数方法，证明了系统在满足一定条件时能够实现频率同步，确保了控制策略的有效性和可行性。本研究不仅为复杂网络系统的同步控制提供了新的理论框架，还为实际应用中的高效资源利用提供了指导。未来的研究将继续探索 Kuramoto 振子网络在更复杂拓扑结构下的同步控制问题，以及事件驱动控制策略在其他类型复杂网络中的潜在应用。这些研究将为实现高效的网络同步控制提供更为坚实的理论基础和实践指导。

参考文献

- [1] Armaou, A. and D. Christofides, P. (2000) Feedback Control of the Kuramoto-Sivashinsky Equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **137**, 49-61. [https://doi.org/10.1016/s0167-2789\(99\)00175-x](https://doi.org/10.1016/s0167-2789(99)00175-x)
- [2] Zgliczynski, P. and Mischaikow, K. (2001) Rigorous Numerics for Partial Differential Equations: The Kuramoto—Sivashinsky Equation. *Foundations of Computational Mathematics*, **1**, 255-288. <https://doi.org/10.1007/s002080010010>
- [3] Wazwaz, A. (2006) New Solitary Wave Solutions to the Kuramoto-Sivashinsky and the Kawahara Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **182**, 1642-1650. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.06.002>
- [4] Lin, C. and Lin, M. (2009) The Mathematical Research for the Kuramoto Model of the Describing Neuronal Synchrony in the Brain. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **14**, 3258-3260. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.01.007>
- [5] Dörfler, F. and Bullo, F. (2012) Synchronization and Transient Stability in Power Networks and Nonuniform Kuramoto Oscillators. *SIAM Journal on Control and Optimization*, **50**, 1616-1642. <https://doi.org/10.1137/110851584>
- [6] Dörfler, F. and Bullo, F. (2011) On the Critical Coupling for Kuramoto Oscillators. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*, **10**, 1070-1099. <https://doi.org/10.1137/10081530x>
- [7] Choi, Y., Ha, S. and Yun, S. (2011) Complete Synchronization of Kuramoto Oscillators with Finite Inertia. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **240**, 32-44. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2010.08.004>

-
- [8] Huh, H. and Kim, D. (2024) Critical Threshold for Synchronizability of High-Dimensional Kuramoto Oscillators under Higher-Order Interactions. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **34**, Article ID: 123119. <https://doi.org/10.1063/5.0211410>
 - [9] Millán, A.P., Torres, J.J. and Bianconi, G. (2020) Explosive Higher-Order Kuramoto Dynamics on Simplicial Complexes. *Physical Review Letters*, **124**, Article ID: 218301. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.124.218301>
 - [10] Zhang, H. and Yan, X. (2024) Prescribed-Time Synchronization of Kuramoto Oscillators over Undirected Network. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, **71**, 3041-3045. <https://doi.org/10.1109/tcsii.2024.3353341>
 - [11] Popović, N. (2012) A Geometric Analysis of Front Propagation in an Integrable Nagumo Equation with a Linear Cut-off. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **241**, 1976-1984. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.05.007>
 - [12] Evangelakos, V., Paspalakis, E. and Stefanatos, D. (2024) Fast Charging of an Ising-Spin-Pair Quantum Battery Using Optimal Control. *Physical Review A*, **110**, Article ID: 052601. <https://doi.org/10.1103/physreva.110.052601>
 - [13] Nguyen, T. and McCaskey, A. (2022) Enabling Pulse-Level Programming, Compilation, and Execution in XACC. *IEEE Transactions on Computers*, **71**, 547-558. <https://doi.org/10.1109/tc.2021.3057166>
 - [14] Wang, Y., Song, Y., Hill, D.J. and Krstic, M. (2019) Prescribed-Time Consensus and Containment Control of Networked Multiagent Systems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **49**, 1138-1147. <https://doi.org/10.1109/tyb.2017.2788874>
 - [15] Wang, Z., Ren, F., Luo, D., Yan, Z. and Wu, L. (2020) Almost-Exact State Transfer by Leakage-Elimination-Operator Control in a Non-Markovian Environment. *Physical Review A*, **102**, Article ID: 042406. <https://doi.org/10.1103/physreva.102.042406>
 - [16] 熊河浪. 一类二阶 Kuramoto 振荡子系统的同步分析[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆理工大学, 2022.
 - [17] Xiao, Q., Liu, H. and Wang, Y. (2023) An Improved Finite-Time and Fixed-Time Stable Synchronization of Coupled Discontinuous Neural Networks. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **34**, 3516-3526. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2021.3116320>
 - [18] Hong, M., Yang, H., Qi, Y., Wu, J. and Sun, Y. (2024) Synchronization of Kuramoto-Oscillator Networks under Event-Triggered Impulsive Control with Noise Perturbation. *Systems & Control Letters*, **192**, Article ID: 105884. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2024.105884>
 - [19] Zhang, H., Liu, X. and Xu, W. (2021) Threshold Dynamics and Pulse Control of a Stochastic Ecosystem with Switching Parameters. *Journal of the Franklin Institute*, **358**, 516-532. <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2020.10.035>