

一种求解二阶锥互补问题的神经网络方法

杨嘉妮, 张 杰, 邓 雯

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年8月25日; 录用日期: 2025年9月15日; 发布日期: 2025年9月28日

摘 要

本文提出了一种用于求解二阶锥互补问题(SOCCP)的Hopfield型神经动力学框架。通过引入单参数族的平滑价值函数, 将SOCCP重构为无约束优化问题, 并采用微分方程进行求解。理论分析表明, 该方法能保证在适当条件下实现指数稳定性。同时数值实验验证了该方法的可行性, MATLAB仿真结果表明, 该神经网络模型具有优异的稳定性和适应性。

关键词

二阶锥互补问题, 神经网络, 动力系统稳定性分析

A Neural Network Approach for Solving Second-Order Cone Complementarity Problem

Jiani Yang, Jie Zhang, Wen Deng

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: August 25, 2025; accepted: September 15, 2025; published: September 28, 2025

Abstract

This paper introduces a Hopfield-type neural dynamic framework designed to address the second-order cone complementarity problem (SOCCP). By introducing a single-parametric class of smooth merit functions, the SOCCP is reformulated as an unconstrained optimization problem and solved via differential equations. Theoretical results confirm that the proposed approach guarantees exponential stability under appropriate conditions. Numerical experiments validate the feasibility of the method, demonstrating that, the neural network model exhibits super stability and adaptability in MATLAB simulations.

Keywords

Second-Order Cone Complementarity Problem, Neural Network, Stability Analysis of Dynamical Systems

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

二阶锥互补问题(SOCCP)广泛存在于工程与管理科学领域的优化问题中,在结构力学系统的动态分析、振动与声学系统建模、电路仿真、流体动力学计算以及力学接触问题等多个实际工程领域展现出重要的应用价值[1]。

本文采用的神经网络的优化方法自 Hopfield 和 Tank 于 20 世纪 80 年代提出以来,因其并行处理和全局搜索能力,已成为求解复杂优化问题的重要工具。近年来,神经网络方法已在二阶锥规划、二阶锥约束变分不等式[2]、线性互补问题[3] [4]及广义垂直线性互补问题[5]中取得成功应用,显示出其在结构化优化问题中的良好适应性和求解潜力。

尽管传统方法如 Fukushima 等人提出的光滑化函数法[6]、张雷洪等人的 Krylov 子空间方法[7]、万仲平的幂罚函数法[8]、刘三阳等人的光滑牛顿法[9]以及潘少华的近端梯度下降法[10]等在 SOCCP 求解中取得了重大进展,为本文提供了重要理论基础,但现存这些方法仍普遍存在对初始点较敏感、计算复杂度较高、耗时较长以及难以并行实现等局限,在一定程度上限制了 SOCCP 在实时优化场景中的应用。因此,发展一种能够高效稳定并适用于实时计算的方法具有迫切的理论和实际意义。针对上述问题,本文提出一种神经网络动力学系统的求解框架,基于经典的 Fischer-Burmeister 函数,引入光滑化参数构造出连续可微的价值函数,从而避免了传统非光滑优化中复杂的次梯度计算。进一步地,通过构建相应的 Hopfield 型神经网络动力系统,利用其固有的并行性与全局收敛特性,以期提高解的稳定性和算法适用性,拓展 SOCCP 在实际工程中的应用范围。

2. 预备知识

二阶锥互补问题可以表述为:寻找 $(x, y) \in R^n \times R^n$ 使得

$$\langle x, y \rangle = 0, x \in K, y \in K, y = F(x) \quad (1)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 代表欧几里得内积, $F: R^n \times R^n \rightarrow R^n$ 是一个连续可微函数,且 $K = K^{n_1} \times K^{n_2} \times \cdots \times K^{n_m}$ 满足 $m, n_1, n_2, \dots, n_m \geq 1$ 和 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$ 。

为便于在 K^n 中进行计算,我们引入约旦积。对给定向量 $x = (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}$ 和 $y = (y_1, y_2) \in R \times R^{n-1}$, 其约旦积定义为

$$x \circ y := \begin{bmatrix} \langle x, y \rangle \\ y_1 x_2 + x_1 y_2 \end{bmatrix}。$$

对于任意向量 $x = (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}$, 其行列式由

$$\det(x) := x_1^2 - \|x_2\|^2$$

给出。此外, 对任意向量 $x = (x_1, x_2) \in R \times R^{n-1}$, 定义线性表示矩阵

$$L_x := \begin{bmatrix} x_1 & x_2^T \\ x_2 & x_1 I \end{bmatrix}.$$

当 L_x 可逆时, 其逆矩阵可显式表示为[11]

$$L_x^{-1} = \frac{1}{\det(x)} \begin{bmatrix} x_1 & -x_2^T \\ -x_2 & \frac{\det(x)}{x_1} I + \frac{1}{x_1} x_2 x_2^T \end{bmatrix}. \quad (2)$$

定义 1: [12] 设 $F: R^n \rightarrow R^n$ 是定义在 $F: R^n \rightarrow R^n$ 上的一个函数, 如果对于任意的 $x, y \in R^n$ 且 $x \neq y$, 满足

$$\max_{\substack{i \in N \\ x_i \neq y_i}} (x_i - y_i) [F_i(x) - F_i(y)] \geq 0,$$

则称 F 是 P_0 函数。

一阶微分方程系统可以表述为, 对于给定函数 $H: R^n \rightarrow R^n$,

$$\frac{du(t)}{dt} = H(u(t)), \quad u(t_0) = u_0 \in R^n. \quad (3)$$

定义 2: [13] 对于(3)中的孤立平衡点 u^* , 若存在常数 $w < 0$, $\kappa > 0$ 和 $\delta > 0$, 使得对任意满足初始条件

$$u(t_0) = u_0, \quad \|u_0 - u^*\| < \delta$$

的解 $u(t)$ 满足

$$\|u(t) - u^*\| \leq \kappa e^{\omega t} \|u_0 - u^*\|,$$

则称该平衡点 u^* 是指数稳定的。

3. 神经网络模型

本文旨在找到一种价值函数 $\psi: R^n \times R^n \rightarrow R_+$ 满足

$$\psi(x, y) = 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0, x \in K, y \in K, y = F(x),$$

使得 SOCCP 可以转化为一类无约束优化问题。

考虑下面单参数的函数[14]-[16]

$$\psi_\tau(x, y) := \frac{1}{2} \|H(x, y)\|^2 = \frac{1}{2} \|\Phi_\tau(x, y)\|^2 + \frac{1}{2} \|F(x) - y\|^2,$$

其中 $\Phi_\tau(x, y)$ 是一个分量为光滑标量函数的向量函数, 定义为

$$\Phi_\tau(x, y) = \begin{bmatrix} \phi_\tau(x_1, y_1) \\ \vdots \\ \phi_\tau(x_n, y_n) \end{bmatrix},$$

这里 $\phi_\tau(x_i, y_i) := \left[(x_i - y_i)^2 + \tau(x_i \circ y_i) \right]^{1/2} - (x_i + y_i)$, $\tau \in (0, 4)$ 。

不难发现 $H \geq 0$ 对于任意的 $u := (x, y) \in R^n \times R^n$, u 是 SOCCP 的解当且仅当 $H(u) = 0$ 。所以, 解决 SOCCP 等价于找到无约束优化问题的全局极小值, 即

$$\min_{u \in R^n} \psi_\tau(u)。$$

所以, 求解二阶锥互补问题的神经网络系统可定义如下:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = -\lambda \nabla \psi_\tau(u), \lambda > 0。 \\ u(t_0) = u_0 \end{cases} \quad (4)$$

4. 稳定性分析

命题 1: [17] SOCCP 的任意解都是系统(4)的平衡点。反过来, 如果 $(x, y) \in R^n \times R^n$ 是系统(4)的平衡点, 且 $F(x)$ 是一个 P_0 函数, 则 (x, y) 是 SOCCP 的解。

为了证明指数稳定性, 本文受文献[18]启发推导出有效的充分条件, 并运用文献[5]中定理 5.5 的方法完成了该定理的证明。

命题 2: 如果 $u^* = (x^*, y^*)$ 对于系统(4)是一个正则解, 则存在一个 u^* 的邻域 $B(u^*, \delta)$ 和一个常数 C , 使得对于任意的 $u \in B(u^*, \delta)$, $\nabla H(u)$ 是非奇异的。

定理 1: 如果 $u^* = (x^*, y^*)$ 是(4)中的一个正则解, 则 u^* 对于系统(4)是指数稳定的。

证明: 根据泰勒展开式,

$$H(u(t)) = H(u^*) + \nabla H(u^*)^T (u - u^*) + o(\|u - u^*\|), \quad \forall u(t) \in \Omega \setminus \{u^*\}。$$

$$\text{令 } f(u(t)) = \|u(t) - u^*\|^2, \quad t \in [t_0, \infty),$$

$$\begin{aligned} \frac{df(u(t))}{dt} &= 2(u(t) - u^*)^T \frac{du(t)}{dt} \\ &= -2\lambda(u(t) - u^*)^T \nabla \psi_\tau(u(t)) \\ &= -2\lambda(u(t) - u^*)^T \nabla H(u(t)) \cdot H(u(t)) \\ &= -2\lambda(u(t) - u^*)^T \nabla H(u(t)) (H(u^*) + \nabla H(u(t))(u - u^*) + o(\|u - u^*\|)) \\ &= -2\lambda(u(t) - u^*)^T \nabla H(u(t)) \nabla H(u(t))^T (u - u^*) + o(\|u - u^*\|^2) \end{aligned}$$

由命题 2 可知, $\nabla H(u)$ 是非奇异的, 则存在一个常数 $k > 0$, 使得

$$(u(t) - u^*)^T \nabla H(u) \nabla H(u)^T (u(t) - u^*) \geq k \|u(t) - u^*\|^2。 \quad (5)$$

否则, 若 $(u(t) - u^*)^T \nabla H(u) \nabla H(u)^T (u(t) - u^*) = 0$, 那么将推出 $\nabla H(u(t))^T (u(t) - u^*) = 0$ 。由已知 $\nabla H(u)$ 是非奇异的, 所以 $u(t) - u^* = 0$, 即 $u(t) = u^*$, 这就与 u^* 是孤立平衡点矛盾。因此, (5)成立。

对于 $o(\|u(t) - u^*\|^2)$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $o(\|u(t) - u^*\|^2) \leq \varepsilon \|u(t) - u^*\|^2$, 所以可得,

$$\frac{df(u(t))}{dt} \leq (-2\lambda k + \varepsilon) \|u(t) - u^*\|^2 = (-2\lambda k + \varepsilon) f(u(t)),$$

进而

$$f(u(t)) \leq e^{(-2\lambda k + \varepsilon)t} f(u(t_0)),$$

$$\|u(t) - u^*\| \leq e^{-\lambda k + \frac{\varepsilon}{2}t} \|u(t_0) - u^*\|。$$

得证。

5. 数值实验

例 1: 考虑一个定义在 K^5 上的线性 SOCCP, 函数 F 定义如下:

$$F(x) = \begin{pmatrix} 15x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 - 5x_5 \\ 5x_2 + x_5 \\ -x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 - 3x_5 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 4x_5 \\ -5x_2 + 10x_5 - 1 \end{pmatrix}, \quad K := K^5.$$

例 1 采取本文提出的神经网络系统(4)求解, 对不同的初始值进行数值仿真得到结果如表 1, 解轨迹图像如图 1 所示, 其中参数取定为 $\tau = 0.001$ 和 $\lambda = 0.5$ 。

Table 1. Numerical results for example 1

表 1. 例 1 的数值实验结果

T	τ	x_0	x^*
30	10^{-3}	$(10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1}, 10^{-1})^T$	$(0.0246, -0.0054, 0.0298, 0.0280, 0.0956)^T$
30	10^{-3}	$(10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2})^T$	$(0.0112, -0.0286, 0.0059, 0.0171, 0.0757)^T$
30	10^{-3}	$(10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3})^T$	$(0.0026, -0.0449, 0.0013, 0.0042, 0.0562)^T$

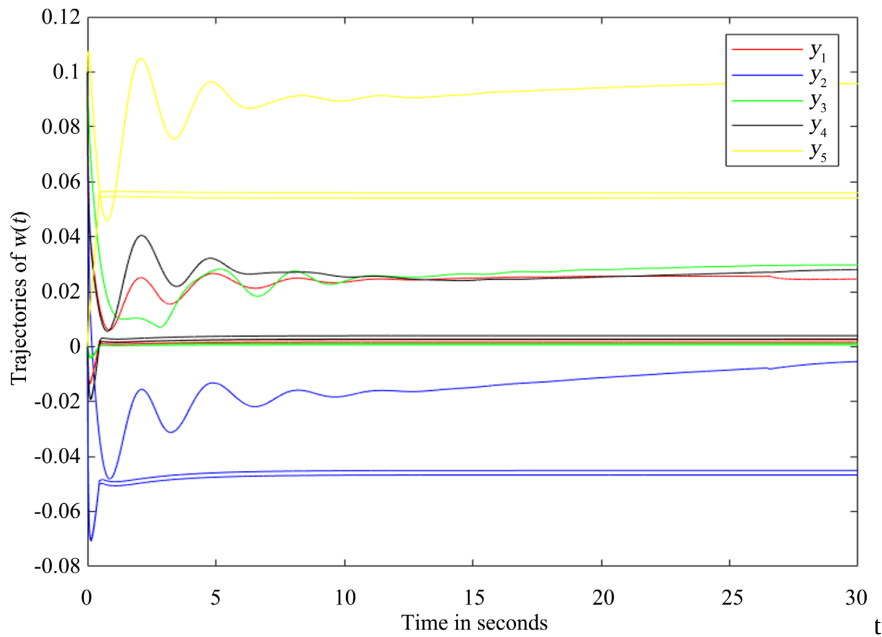


Figure 1. Solution trajectory diagram for example 1

图 1. 例 1 的解轨迹图像

以上数值实验结果表明, 采取适当的参数时, 本论文提出的神经网络方法具有可行性以及解的稳定性。

致 谢

感谢张杰导师对本论文的指导。

参考文献

- [1] Tang, J.Y., Li, D., Zhou, J.C. and Sun, L. (2014) A Smoothing-Type Algorithm for the Second-Order Cone Complementarity Problem with a New Nonmonotone Line Search. *Optimization*, **64**, 1935-1955. <https://doi.org/10.1080/02331934.2014.906595>
- [2] Miao, X.H., Chen, J.S. and Ko, C.H. (2014) A Smoothed NR Neural Network for Solving Nonlinear Convex Programs with Second-Order Cone Constraints. *Information Sciences*, **268**, 255-270.
- [3] He, X., Huang, J.J. and Li, C.J. (2018) Neural Network with Added Inertia for Linear Complementarity Problem. 2018 15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision (ICARCV), Singapore, 18-21 November 2018, 1-6. <https://doi.org/10.1109/icarcv.2018.8581109>
- [4] Gao, X.B. and Wang, J. (2011) A Neural Network for a Class of Horizontal Linear Complementary Problems. 2011 7th International Conference on Computational Intelligence and Security, Sanya, 3-4 December 2011, 1-5. <https://doi.org/10.1109/cis.2011.85>
- [5] Hou, B., Zhang, J. and Qiu, C. (2022) A Neural Network for a Generalized Vertical Complementarity Problem. *AIMS Mathematics*, **7**, 6650-6668. <https://doi.org/10.3934/math.2022371>
- [6] Fukushima, M., Luo, Z.Q. and Tseng, P. (2002) Smoothing Functions for Second-Order-Cone Complementarity Problems. *SIAM Journal on Optimization*, **12**, 436-460. <https://doi.org/10.1137/s1052623400380365>
- [7] Zhang, L., Yang, W.H., Shen, C. and Li, R. (2015) A Krylov Subspace Method for Large-Scale Second-Order Cone Linear Complementarity Problem. *SIAM Journal on Scientific Computing*, **37**, A2046-A2075. <https://doi.org/10.1137/140995064>
- [8] Hao, Z.J., Wan, Z.P., Chi, X.N. and Chen, J.W. (2015) A Power Penalty Method for Second-Order Cone Nonlinear Complementarity Problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **290**, 136-149. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.05.007>
- [9] Zhang, X.S., Liu, S.Y. and Liu, Z.H. (2009) Analysis of a Smoothing Newton Method for Second-Order Cone Complementarity Problem. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **31**, 459-473. <https://doi.org/10.1007/s12190-008-0224-3>
- [10] Pan, S.H. and Chen, J.S. (2010) A Proximal Gradient Descent Method for the Extended Second-Order Cone Linear Complementarity Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **366**, 164-180. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.01.011>
- [11] Pan, S.H. and Chen, J.S. (2008) A Damped Gauss-Newton Method for the Second-Order Cone Complementarity Problem. *Applied Mathematics and Optimization*, **59**, 293-318. <https://doi.org/10.1007/s00245-008-9054-9>
- [12] De Luca, T., Facchinei, F. and Kanzow, C. (1996) A Semismooth Equation Approach to the Solution of Nonlinear Complementarity Problems. *Mathematical Programming*, **75**, 407-439. <https://doi.org/10.1007/bf02592192>
- [13] Zabczyk, J. (2020) Mathematical Control Theory. Springer.
- [14] Chen, J.S. and Pan, S.H. (2008) A One-Parametric Class of Merit Functions for the Second-Order Cone Complementarity Problem. *Computational Optimization and Applications*, **45**, 581-606. <https://doi.org/10.1007/s10589-008-9182-9>
- [15] Chi, X.N., Wan, Z.P. and Hao, Z.J. (2013) A Two-Parametric Class of Merit Functions for the Second-Order Cone Complementarity Problem. *Journal of Applied Mathematics*, **2013**, Article ID: 571927. <https://doi.org/10.1155/2013/571927>
- [16] Pan, S.H. and Chen, J.S. (2008) A Semismooth Newton Method for SOCCPs Based on a One-Parametric Class of SOC Complementarity Functions. *Computational Optimization and Applications*, **45**, 59-88. <https://doi.org/10.1007/s10589-008-9166-9>
- [17] Liao, L.Z., Qi, H.D. and Qi, L.Q. (2001) Solving Nonlinear Complementarity Problems with Neural Networks: A Reformulation Method Approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **131**, 343-359. [https://doi.org/10.1016/s0377-0427\(00\)00262-4](https://doi.org/10.1016/s0377-0427(00)00262-4)
- [18] Qi, L.Q. and Sun, J. (1993) A Nonsmooth Version of Newton's Method. *Mathematical Programming*, **58**, 353-367. <https://doi.org/10.1007/bf01581275>