

含磁性非线性接地式负刚度动力吸振器理论分析及参数优化

冯文聪*, 赵艳影#

南昌航空大学航空宇航学院, 江西 南昌

收稿日期: 2026年3月16日; 录用日期: 2026年4月6日; 发布日期: 2026年4月20日

摘要

本文提出了一种磁性非线性接地式负刚度动力吸振器模型, 能够有效地抑制主系统振动。通过理论分析验证磁性装置的非线性特性。利用增量谐波平衡法(Incremental Harmonic Balance, IHB)和弧长法得到系统的幅频响应曲线, 并通过数值模拟验证解析结果。分析了磁性非线性接地负刚度动力吸振器在不同非线性刚度、外激励和吸振器刚度下对主系统幅频响应的影响。数值仿真结果表明, 当吸振器取合适参数时, 能够有效地抑制主系统宽频范围内振动, 同时可以降低突跳等不稳定的响应。通过数值解与线性负刚度动力吸振器对比, 明显拓宽了减振频带, 且在低频区域内具有更高的减振效率。

关键词

磁性NES, 增量谐波平衡法, 振动控制, 参数优化

Theoretical Modeling and Systematic Optimization of Magnetically Nonlinear Grounded Negative-Stiffness Dynamic Vibration Absorbers

Wencong Feng*, Yanying Zhao#

School of Aeronautics and Astronautics, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi

Received: March 16, 2026; accepted: April 6, 2026; published: April 20, 2026

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 冯文聪, 赵艳影. 含磁性非线性接地式负刚度动力吸振器理论分析及参数优化[J]. 动力系统与控制, 2026, 15(2): 171-185. DOI: 10.12677/dsc.2026.152018

Abstract

This study introduces a magnetically nonlinear grounded negative-stiffness dynamic vibration absorber (MNG-NSDVA), demonstrating its exceptional efficacy in suppressing primary system vibrations. The inherent nonlinearity of the magnetic mechanism is rigorously validated through theoretical analysis. Employing the Incremental Harmonic Balance (IHB) method coupled with an arc-length continuation technique, we determine the system's frequency-amplitude response characteristics, with subsequent high-fidelity numerical verification. Comprehensive parametric investigations elucidate the influence of nonlinear stiffness magnitude, external excitation intensity, and absorber stiffness on the primary system's resonant behavior. Critically, numerical simulations establish that optimal tuning of the MNG-NSDVA yields significant vibration mitigation across broad frequency bands while simultaneously eliminating unstable phenomena, including jump discontinuities. Comparative analysis against linear negative-stiffness absorbers confirms a substantially expanded attenuation bandwidth and superior suppression efficiency, particularly pronounced within the critical low-frequency regime.

Keywords

Magnetically Enhanced NES, IHB, Active Vibration Suppression, Systematic Parameter Optimization

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



1. 引言

振动控制是航空航天、精密制造、土木工程等领域保障设备可靠性与结构安全性的核心技术需求。动力吸振器(Dynamic Vibration Absorber, DVA)作为被动振动控制的经典装置,早在1909年Frahm [1]发明了第一个无阻尼动力吸振器,但只针对某个特定频率范围内具有减振效果。1928年,Ormondroyd等[2]的研究证实,在动力吸振器结构中引入阻尼元件可同时实现主系统振幅的有效抑制与减振频带的拓宽。该阻尼增强型结构即现今普遍认知的Voigt型动力吸振器,同时发现该吸振器的频率响应曲线上存在两个与阻尼系数无关的固定点,并基于此创立了动力吸振器设计的固定点理论。随后,Brock [3]基于频率响应曲线存在固定点的特性,提出了阻尼动力吸振器减振系统的不动点理论,并推导出最优阻尼的设计公式。Den Hartog [4]在引入阻尼的动力吸振器设计中,通过调节吸振器与主系统的质量比参数,优化了其刚度与阻尼配置,从而实现主系统振动的最优抑制效果。在此基础上,Asami等[5]应用固定点理论对该系统进行了精确解析,得出了主系统与吸振器最优频率比及最优阻尼比的解析表达式。为提升动力吸振器(DVA)的振动抑制性能,Ren [6]提出了一种接地式动力吸振器结构。该设计通过调节接地阻尼系数,有效增强了系统的振动控制能力。

基于固定点理论,彭海波等[7]解析了接地负刚度动力吸振器的最优频率比与阻尼比参数。邢昭阳等[8]针对含放大机构的负刚度动力吸振器模型开展多参数协同优化研究。优化结果表明,该结构可显著抑制系统共振响应,扩展减振工作频带,并降低系统谐振频率。李强等[9]则进一步针对集成磁性负刚度单元的动力吸振器系统开展优化研究,确定了其最优调频比及磁体间隙最优值。Benacchio等[10]构建了一种基于磁力的变刚度磁吸振器(Magnetic Vibration Absorber, MVA)。通过调节MVA的几何参数,可在配

置线性负刚度元件的情况下, 实现其在非线性动力吸振器(NDVA)、非线性能量阱(NES)和双稳态特性之间的转化。刘刚等[11]则提出了一种新型连续可调变质量-负刚度动力吸振器设计, 该设计分别展现出显著的低频有效性与宽频带特性。

随着现代工程系统在速度、精度和复杂度方面不断提升, 其在宽频激励和强非线性作用下的振动控制问题变得尤为关键。在与传统被动式吸振器进行对比分析时, 许多研究表明负刚度非线性吸振器展现出更优异的减振性能。该装置在主系统振动抑制方面具有突出优势, 众多研究者通过系统性的对比研究, 为此类吸振器的优化设计奠定了坚实的理论基础。徐硕等[12]通过系统对比分析负刚度非线性吸振器与传统被动式吸振器的振动抑制性能, 并深入探究了负刚度非线性吸振器的减振机制。Vakakis 等[13]的研究聚焦于非线性刚度与行波共振响应的相互作用, 揭示了附属的“完全”非线性刚度具备与入射波和驻波发生瞬时共振的能力。Zhang 等[14]则利用了惯容器的“质量放大效应”, 将其引入非线性能量阱(NES)设计中。通过与传统 NES 的对比分析, 研究发现惯容器的引入不仅显著增强了系统的振动抑制能力, 还提升了振动能量的传递效率。同年, Zhang 等[15]进一步创新, 用惯容器替代了 NES 中的轻质元件, 提出了一种新型 NES 结构。通过优化设计确定了其最佳质量比参数。对比研究表明, 在达到同等减振效果的前提下, 该新型 NES 结构具有更小的附加质量优势。Wang 等[16]提出了一种改进的增量谐波平衡法(IHB), 通过融合快速傅里叶变换(FFT)和 Broyden 拟牛顿法, 利用 FFT 高效计算非线性代数方程的傅里叶系数残差, 替代传统数值积分, 降低计算复杂度, 显著提升了传统 IHB 方法的计算效率。Olaru 等[17]通过研究发现, 磁弹簧的回复力与位移呈显著非线性关系, 表现为高阶多项式特征, 尤其在简单磁极结构中力-位移曲线非线性明显, 需通过高阶方程精确拟合。左昂等[18]针对基于磁耦合机制的一维立方非线性刚度周期结构, 建立了相应的理论模型, 并系统推导了其频散关系的求解方法。

综上所述, 为深入探索兼具宽频带与高衰减性能的减振方案, 本文对一种接地式磁性非线性元件的负刚度动力吸振器模型进行研究。本文通过建立该耦合装置的理论模型并进行动力学分析, 揭示其非线性工作机制, 进而针对吸振器的关键线性刚度参数进行优化。为充分验证所提出模型的减振效果, 分别分析了谐波激励与随机激励下的主系统振幅响应特性, 与其他被动式动力吸振器模型进行定量对比。预期研究结果表明, 本文模型在实现宽频带振动抑制的同时, 能显著降低系统振动幅值, 展现出更优的综合减振性能。

2. 磁性非线性装置

本节主要介绍一种可以实现立方刚度的磁性 NES 装置, 并通过实验分析来证明该磁性装置的非线性特性。

图 1 为该 NES 装置的原理图, 磁铁之间相邻极为同极时(比如同为 N 极或同为 S 极), 它们会相互排斥。这种排斥力可以使得中间的磁铁在外力作用下仍然尝试保持在两侧磁铁的中心位置, 它会尽量逃离任一侧的强烈排斥力。针对这一特点, 本文进行力-位移相关实验分析, 如图 2 所示。

首先对静平衡时相邻的两个磁铁距离为 $h = 30 \text{ mm}$ 的实验进行分析, 用 Matlab 软件拟合得到图 3(a) 的拟合曲线。

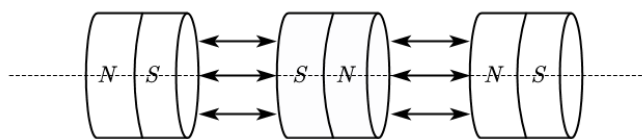


Figure 1. Schematic representation of the magnetically enhanced NES operating principle
图 1. 磁性 NES 装置原理图

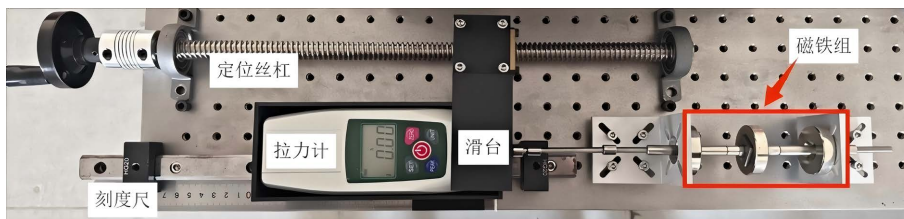
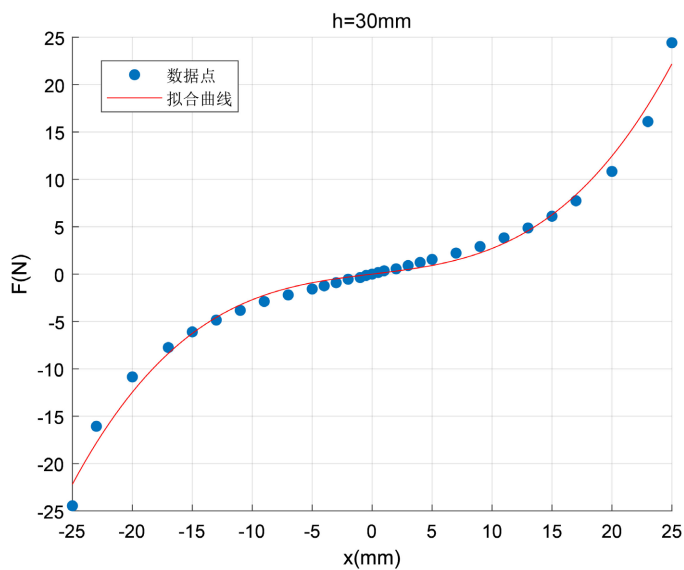


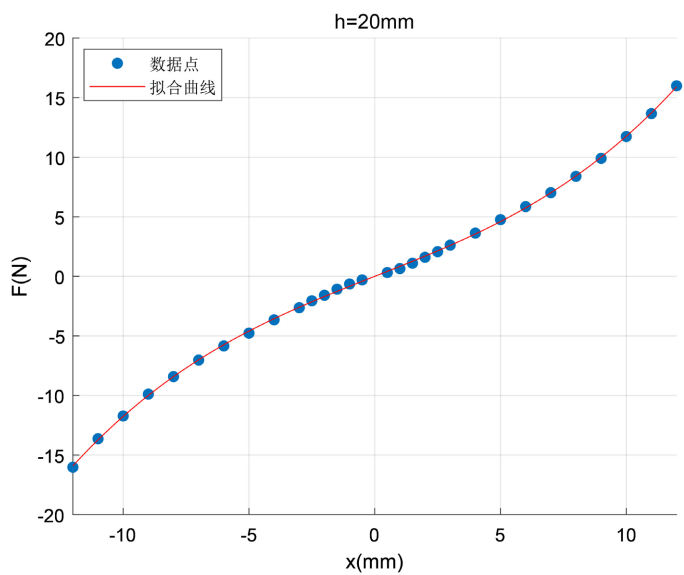
Figure 2. Force-displacement analysis experiment
图 2. 力 - 位移分析实验

拟合曲线函数为(其中 x 单位为 m):

$$F = 1.53 \times 10^2 x + 1.175 \times 10^6 x^3$$



(a) $h = 30 \text{ mm}$



(b) $h = 20 \text{ mm}$

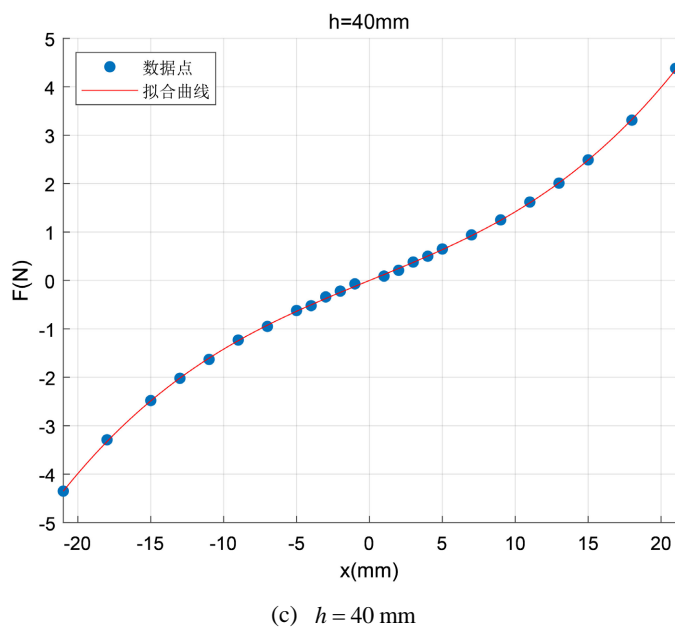


Figure 3. Force-displacement curve

图 3. 力 - 位移曲线

图 3 中通过改变磁铁间距 h 测量得到的实验数据并进行拟合, 发现所拟合出来的曲线均可以用 $F = k_{11}x + k_{12}x^3$ 的多项式表达。其中 k_{11} 、 k_{12} 分别为线性刚度项和非线性刚度项, 可以通过选取不同磁感应强度的磁铁和改变磁铁间距 h 来控制 k_{11} 、 k_{12} 的大小。通过实验观察, 当磁铁受到拉(压)力较大时, 中间磁铁偏离零点位置较远, 刚度为明显的立方非线性特性, 可见此磁性 NES 装置表现为典型的立方非线性刚度形式。

3. 动力吸振器模型及求解

本节介绍了本文所采用的模型, 是一种引入磁性 NES 装置与吸振器相结合的非线性接地式动力吸振器, 通过建立动力学方程利用增量谐波平衡法(IHB)进行分析和验证该模型的非线性特性。

3.1. 非线性接地式吸振器模型

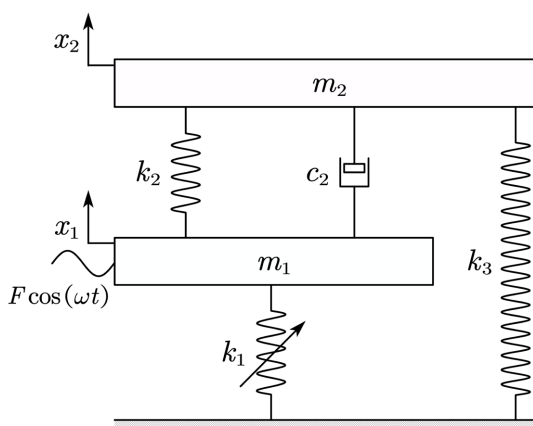


Figure 4. Dynamic vibration absorber model

图 4. 动力吸振器模型模型

如图 4 所示, 是一种新型磁性非线性接地式动力吸振器, 其中质量为 m_1 的主系统通过磁性 NES 装置 k_1 与地面连接, 当主系统处于静平衡状态时, 中间磁铁也处于平衡位置。质量为 m_2 的线性动力吸振器 (DVA) 通过弹簧 k_2 和阻尼器 c 与主系统连接, 同时通过负刚度弹簧 k_3 与地面连接。主系统受到的外激励大小为 F 、频率为 ω 的谐波激励 $F \cos(\omega t)$ 。其中 x_1 和 x_2 分别为主系统和吸振器的位移。

3.2. 增量谐波平衡法求解

根据牛顿第二定律, 构建动力学方程:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_1 - x_2) + k_{11}x_1 + k_{12}x_1^3 = F \cos(\omega t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) + k_3x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

通过引入以下无量纲参数:

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \quad f = \frac{F}{m_1}, \quad \omega_{11}^2 = \frac{k_{11}}{m_1}, \quad \omega_{12}^2 = \frac{k_{12}}{m_1}, \quad \omega_2^2 = \frac{k_2}{m_2}, \quad \xi = \frac{c}{2m_2\omega_2}, \quad \alpha = \frac{k_3}{k_2}$$

将以上参数代入到方程(1)中, 化简得到:

$$\begin{cases} x_1'' + 2\mu\xi\omega_2(x_1' - x_2') + \omega_{11}^2x_1 + \mu\omega_2^2(x_1 - x_2) + \omega_{12}^2x_1^3 = f \cos(\omega t) \\ x_2'' + 2\xi\omega_2(x_2' - x_1') + \alpha\omega_2^2x_2 + \omega_2^2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中 x_i' 和 x_i'' 分别表示 x_i 对时间 t 的一阶导和二阶导。

下面将使用增量谐波平衡法对非线性动力学方程进行分析求解。引入新的时间变量 τ , 令 $\tau = \omega t$ 代入方程(2)中得到动力学方程:

$$\begin{cases} \omega^2 x_1'' + 2\omega\mu\xi\omega_2(x_1' - x_2') + \omega_{11}^2x_1 + \mu\omega_2^2(x_1 - x_2) + \omega_{12}^2x_1^3 = f \cos(\tau) \\ \omega^2 x_2'' + 2\omega\xi\omega_2(x_2' - x_1') + \alpha\omega_2^2x_2 + \omega_2^2(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

将方程(3)转化为矩阵的形式:

$$\omega^2 MX'' + \omega CX' + (K + K_1)X = F_0 \cos(\tau) \quad (4)$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F_0 = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2\mu\xi\omega_2 & -2\mu\xi\omega_2 \\ -2\xi\omega_2 & 2\xi\omega_2 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} \omega_{11}^2 + \mu\omega_2^2 & -\mu\omega_2^2 \\ -\omega_2^2 & \alpha\omega_2^2 + \omega_2^2 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} \omega_{12}^2x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

IHB 求解非线性振动方程(4), 分为以下两个步骤:

1) 增量过程

设 X_0 、 ω_0 为振动过程的某个时间的状态, 则相邻时间的状态可以表示为:

$$X = X_0 + \Delta X, \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad (5)$$

将式子(5)代入到方程(4)中, 并且去掉高阶小项, 最后得到的增量方程为:

$$\omega_0^2 M \Delta X'' + \omega_0 C \Delta X' + (K + K_1') \Delta X = R - (2\omega_0 M X_0'' + C X_0') \Delta\omega \quad (6)$$

其中

$$K_1' = \frac{\partial(K_1 X_0)}{\partial X_0} = \begin{bmatrix} 3\omega_{12}^2 x_{10}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = F_0 \cos(\tau) - [\omega_0^2 M X_0'' + \omega_0 C X_0' + (K + K_1) X]$$

式子(6)中 R 为误差向量, R 的值为 0 时, 得到的 X_0 、 ω_0 为准确解。

2) 谐波平衡过程

将 X_0 、 ΔX 展开成傅里叶级数:

$$\begin{cases} X_{n0} = a_{n0} + \sum_{k=1}^N [a_{nk} \cos(k\tau) + b_{nk} \sin(k\tau)] = C_s A_n \\ \Delta X_{n0} = \Delta a_{n0} + \sum_{k=1}^N [\Delta a_{nk} \cos(k\tau) + \Delta b_{nk} \sin(k\tau)] = C_s \Delta A_n \end{cases} \quad (8)$$

在式子(8)中 $n=1, 2$ 。 a_{nk} 、 b_{nk} 分别为余弦波和正弦波得系数, N 为正弦波的个数。 C_s 、 A_n 和 ΔA_n 分别表示谐波项、谐波系数、增量谐波系数。

$$\begin{cases} C_s = [1, \cos(\tau), \sin(\tau), \cos(2\tau), \sin(2\tau), \dots, \cos(N\tau), \sin(N\tau)] \\ A_n = [a_{n0}, a_{n1}, b_{n1}, a_{n2}, b_{n2}, \dots, a_{nN}, b_{nN}]^T \\ \Delta A_n = [\Delta a_{n0}, \Delta a_{n1}, \Delta b_{n1}, \Delta a_{n2}, \Delta b_{n2}, \dots, \Delta a_{nN}, \Delta b_{nN}]^T \end{cases} \quad (9)$$

因此 X_0 和 ΔX 的解可表示为:

$$X_0 = SA, \quad \Delta X = S\Delta A \quad (10)$$

式子中

$$S = \begin{bmatrix} C_s & 0 \\ 0 & C_s \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad \Delta A = \begin{bmatrix} \Delta A_1 \\ \Delta A_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

将式子(10)代入增量方程(6)中, 然后利用伽辽金(Galerkin)过程, 得:

$$\int_0^{2\pi} \delta(\Delta X)^T [\omega_0^2 M \Delta X'' + \omega_0 C \Delta X' + (K + K_1') \Delta X] d\tau = \int_0^{2\pi} \delta(\Delta X)^T [R - (2\omega_0 M X_0'' + C X_0') \Delta \omega] d\tau \quad (12)$$

通过对上式整理后得到线性方程组:

$$K_{mc} \Delta A = \bar{R} - R_{mc} \Delta \omega \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} K_{mc} = \omega_0^2 \bar{M} + \omega_0 \bar{C} + \bar{K} + \bar{K}_1' \\ \bar{R} = \bar{F}_0 - (\omega_0^2 \bar{M} + \omega_0 \bar{C} + \bar{K} + \bar{K}_1') A \\ R_{mc} = (2\omega_0 \bar{M} + \bar{C}) A \end{cases} \quad (14)$$

而

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \int_0^{2\pi} S^T M S d\tau; \quad \bar{C} = \int_0^{2\pi} S^T C S d\tau; \quad \bar{K} = \int_0^{2\pi} S^T K S d\tau; \\ \bar{K}_1' &= \int_0^{2\pi} S^T K_1' S d\tau; \quad \bar{K}_1 = \int_0^{2\pi} S^T K_1 S d\tau; \quad \bar{F}_0 = \int_0^{2\pi} S^T F \cos(\tau) d\tau \end{aligned}$$

首先指定主动增量为 ω , 那么 $\Delta \omega = 0$ 。在每次迭代中, 所得的解可以通过式(13)线性方程求得:

$$K_{mc} \Delta A = \bar{R} \quad (15)$$

这里设置当 \bar{R} 的二范数小于 1×10^{-9} 时, 得到相应的傅里叶系数, 即稳态解。

4. 数值结果与讨论

为了验证本文模型的有效性, 以下进行数值算例来求证。分别对不同非线性刚度、不同大小外激励和不同线性刚度的减振效果进行讨论。选取系统参数 $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.1 \text{ kg}$, $F = 1 \text{ kN}$, 并根据彭海波[7]

的优化结果来选取其他参数, 得到 $c = 0.2 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$, $k_{11} = 4 \text{ N}/\text{m}$, $k_2 = 0.7935 \text{ N}/\text{m}$, $k_3 = -0.5602 \text{ N}/\text{m}$, $k_{12} = 50 \text{ N}/\text{m}^3$ 。将以上参数代入到方程(7)中, 再利用增量谐波平衡法进行求解。

4.1. 数值仿真实验

代入以上参数, 利用增量谐波平衡法进行求解, 选取傅里叶级数 $N = 5$ 。图 5 为本文模型的幅频曲线图。

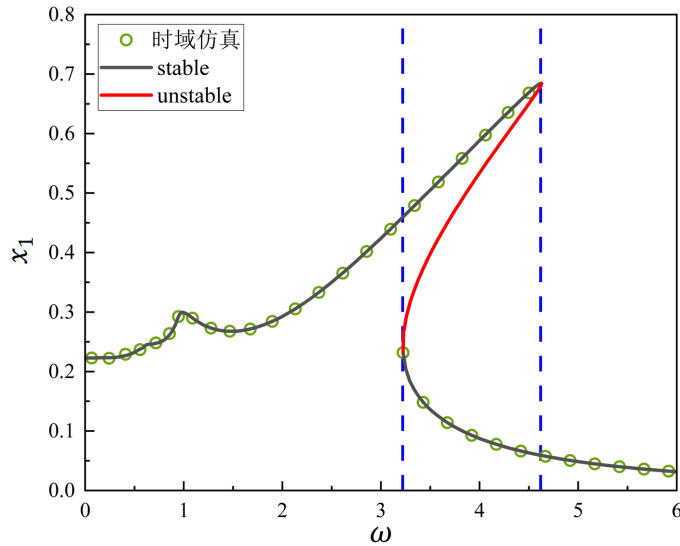


Figure 5. Amplitude-frequency curve for $k_{12} = 50 \text{ N}/\text{m}^3$

图 5. $k_{12} = 50 \text{ N}/\text{m}^3$ 时的幅频曲线

图 5 中黑色实线为系统稳定区间, 红色实线为不稳定区间, 绿色圆圈为时域仿真结果。由图可知, 时域仿真结果表明, 增量谐波平衡法的系统响应与理论解高度吻合, 从而验证了模型的有效性。从图 5 中可以明显看出, 系统存在多解区间, 即 $\omega = [3.22, 4.64]$ 。

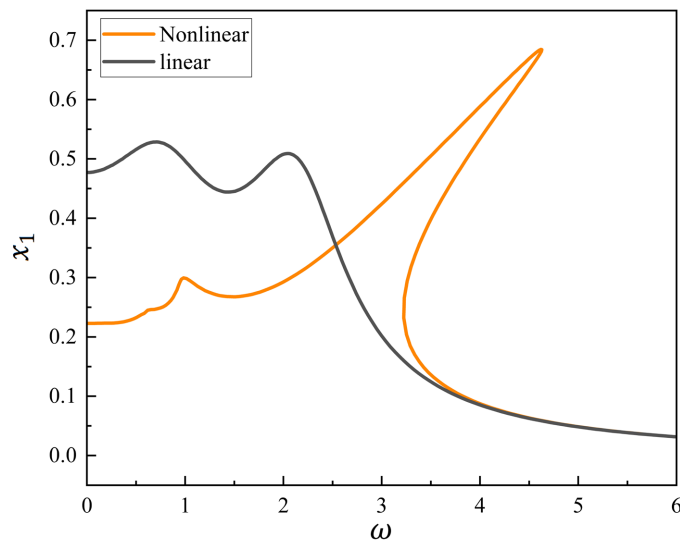


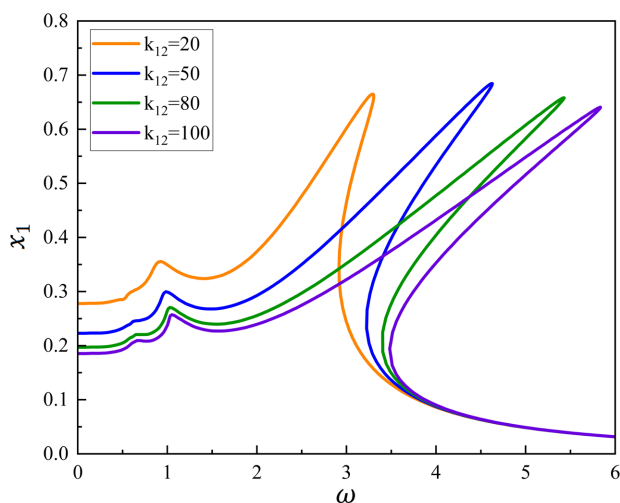
Figure 6. Comparison of linear DVA and nonlinear DVA

图 6. 线性 DVA 与非线性 DVA 对比

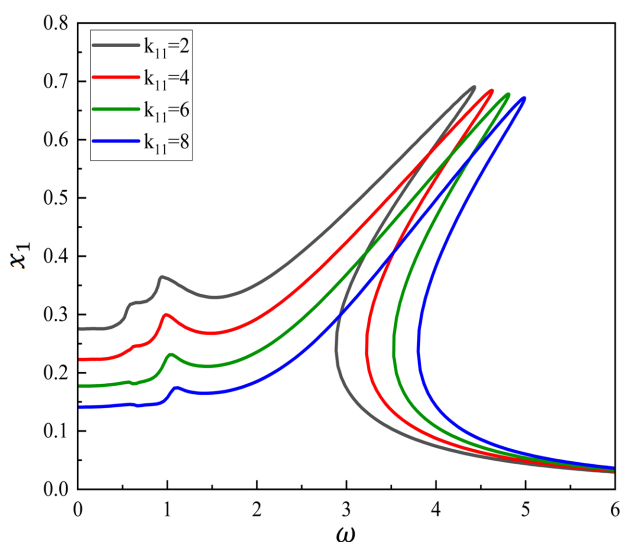
对比含负刚度线性 DVA 与非线性 DVA 的幅频响应曲线, 如图 6, 其中黑色实线为彭海波[7]优化后的幅频曲线。通过比较, 可以明显看出, 非线性 DVA 明显拓宽了减振频带, 且在低频区域内具有更高的减振效率, 在高频区域($\omega \approx 4$ 附近), 本文模型的响应曲线呈现明显的硬化现象。

4.2. 参数分析

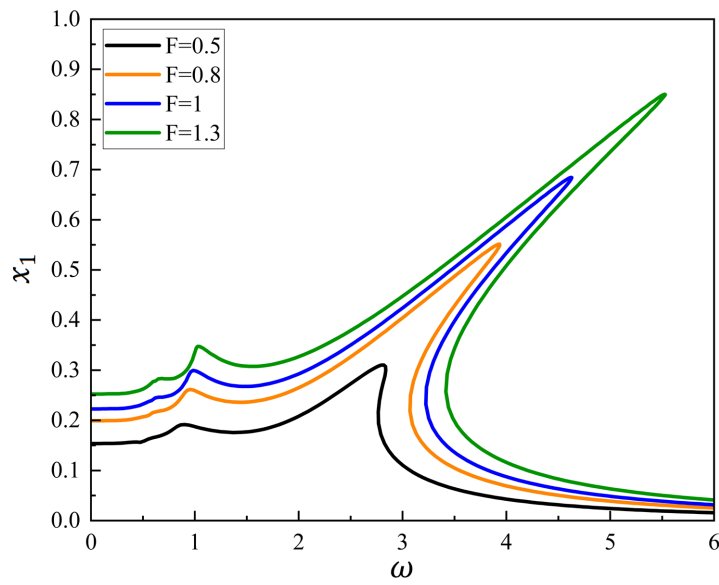
在对本模型有效性进行验证后, 本节讨论磁性 NES 装置非线性刚度、磁性 NES 装置线性刚度以及激励大小对非线性振动特性的影响。如图 7(a)所示, 随着非线性刚度 k_{12} 的增大, 幅频曲线的跳跃特性呈现明显的差异, 非线性刚度较小时, 幅频曲线的峰值出现更早且幅值变化更剧烈; 而非线性刚度增大时, 曲线的峰值区域向高频段偏移, 且幅值的突变区间更窄。图 7(b)所示, 随着线性刚度增大, 其固有频率也发生改变, 幅频曲线的整体形态向高频段偏移, k_{11} 较小时低频区域处存在多段幅值波动, 随着 k_{11} 增大, 幅值波动明显减小。图 7(c)所示, 随着外激励 F 的增大, 幅频响应的共振区间以及幅值大小也随之增大, 系统的非线性特性也变得更加明显。



(a) 幅频曲线随非线性刚度变化



(b) 幅频曲线随线性刚度变化



(c) 幅频曲线随激励大小变化

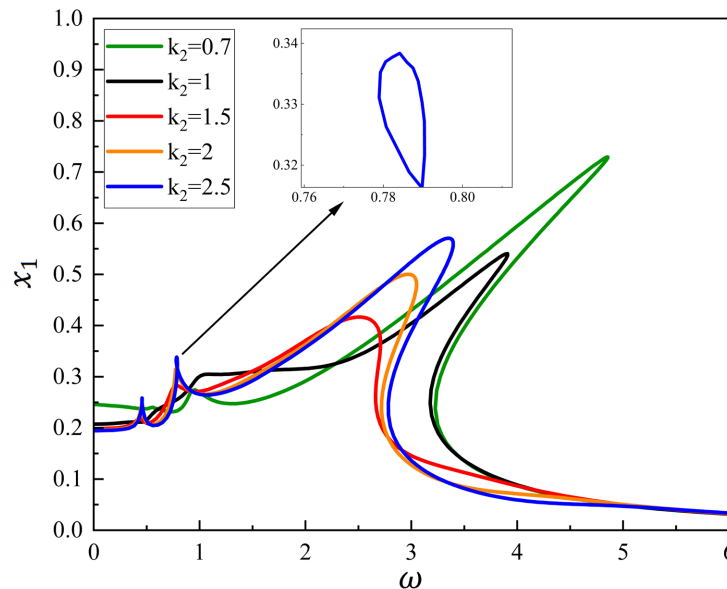
Figure 7. Amplitude-frequency curves under different parameters

图 7. 不同参数下的幅频曲线

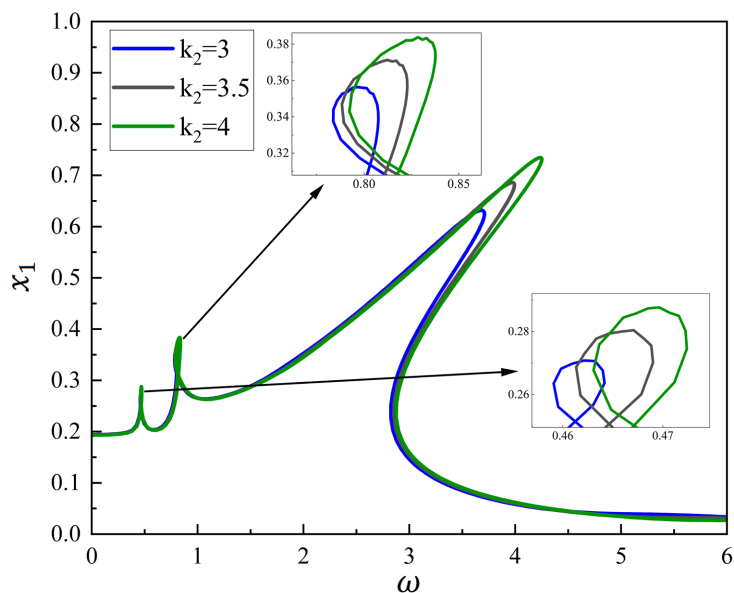
在本非线性振动系统中, 非线性刚度 k_{12} 、线性刚度 k_{11} 和激励大小 F 对系统的幅频响应特性都产生了比较显著的调控作用, 三者通过不同机制共同影响系统的非线性振动行为, 在三者的耦合作用下共同决定了系统幅频特性的复杂形态。

5. 吸振器线性刚度参数优化

在清楚非线性接地式吸振器参数对系统非线性特性具有调控作用后, 本节基于负刚度动力吸振器参数优化结果, 下面对吸振器线性刚度参数进行优化处理。

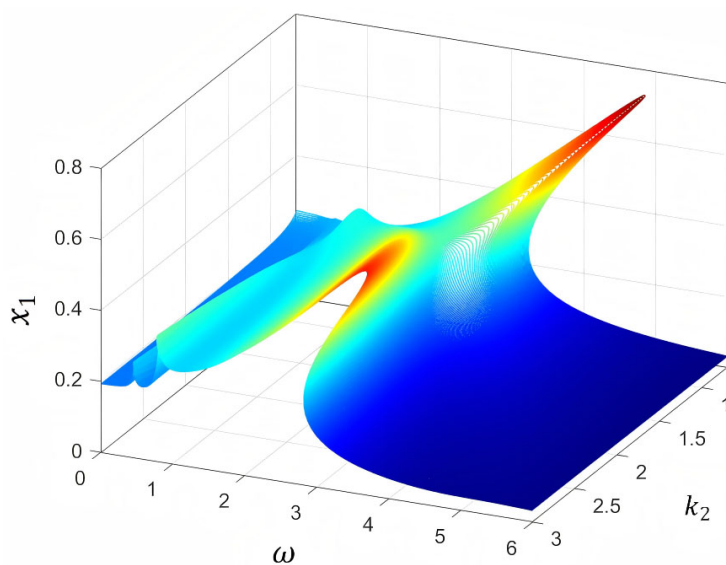


(a) 不同线性刚度

(b) k_2 继续增大的环形共振响应**Figure 8.** Different linear stiffness k_2 **图 8.** 不同线性刚度 k_2

在固定其他参数不变的条件下, 单独分析吸振器线性刚度 k_2 对系统幅频响应的影响, 如图 8(a) 所示, 动力吸振线性刚度 k_2 增大时, 幅频响应曲线的最大共振峰值先减小再增大, 如图 8(b) 所示, 当 k_2 继续增大时, 在共振频率附近会出现环形共振响应, 因此动力吸振器的线性刚度 k_2 在其他参数固定的条件下存在最优值。

由图 8(a) 可知, 在 $k_2 \in [0.7, 3]$ 的范围内存在最优值, 使得幅频响应曲线在共振峰与反共振峰之间的过渡更加平缓, 且最大共振峰幅值更低。

**Figure 9.** 3D surface plot for different linear stiffness values**图 9.** 不同线性刚度三维曲面图

如图 9 所示的三维曲面图, 这里固定其他参数不变, 可以发现存在一个线性刚度 k_2 , 使得两个共振峰峰值近似相等, 能够满足优化准则。

本文通过计算主系统振幅极大值, 使两个极大值点的振幅相等来进行等峰优化。其中计算主系统振幅极大值条件为:

$$\frac{dx_1}{d\omega} = 0, \quad \frac{d^2x_1}{d\omega^2} < 0 \quad (16)$$

将上述求解极大值条件代入到式(15)中, 同时忽略低频区域上的幅值波动产生的极大值点, 得到两个共振点的频率 ω_{res1} 和 ω_{res2} , 其中 ω_{res1} 和 ω_{res2} 分别对应第一共振峰点和第二共振峰点。为使两个共振峰幅值相等, 则需要满足条件:

$$x_1(\omega_{res1}) = x_1(\omega_{res2}) \quad (17)$$

通过求解式(17)求得 $k_2 = 1.1673$ 满足等峰要求。

如图 10 所示, 当 $k_2 = 1.1673$ 时, 对比其他吸振器模型(文献[6]和文献[7]), 本文模型具有更优的减振效果, 能有效降低振动幅值, 尽管存在局部频率的不稳定问题, 但整体减振性能更具优势。相比于负刚度线性系统幅值最大值, 非线性系统幅值最大值降低了 33.56%。

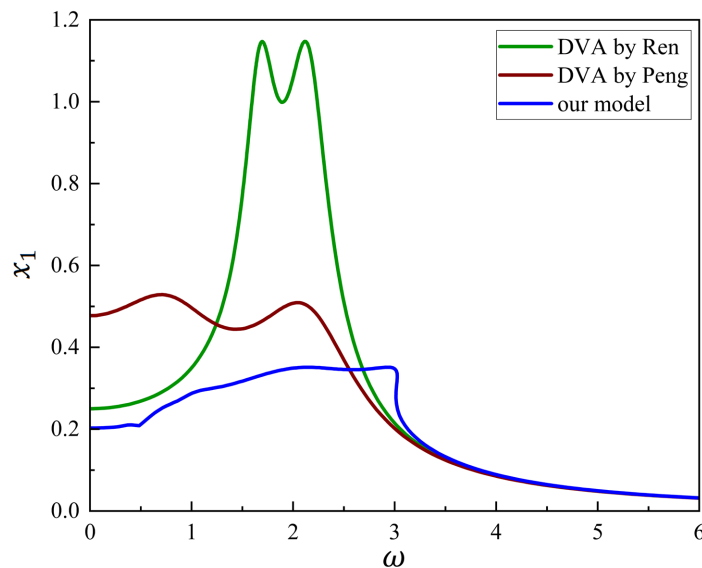


Figure 10. Comparison of the optimized model with other vibration absorber models
图 10. 优化后与其他吸振器模型对比

6. 随机激励下的响应对比

在工程实际中, 大多数振动为随机激励, 因此本文进一步研究吸振器主系统在随机激励下的减振效果, 对比了负刚度线性动力吸振器和负刚度非线性动力吸振器在随机激励下的位移响应。

为了有效模拟工程实际, 本文构建一个 50 s 均值为 0 方差为 1 的随机激励, 其时间历程如图 11 所示, 所选取参数与前文保持不变, 其中非线性系统通过优化后取 $k_2 = 1.1673$ 。为了验证优化后的非线性吸振器的减振效果, 图 12~15 分别给出无吸振器、接地式吸振器、负刚度线性吸振器和负刚度非线性接地式吸振器的时间位移响应, 可以明显看到本文模型振幅峰值较其他模型更小且振幅响应相对更稳定。因为系统振动能量可以用系统的位移方差来衡量, 本文总结了主系统的位移方差及其衰减比, 如表 1 所示。

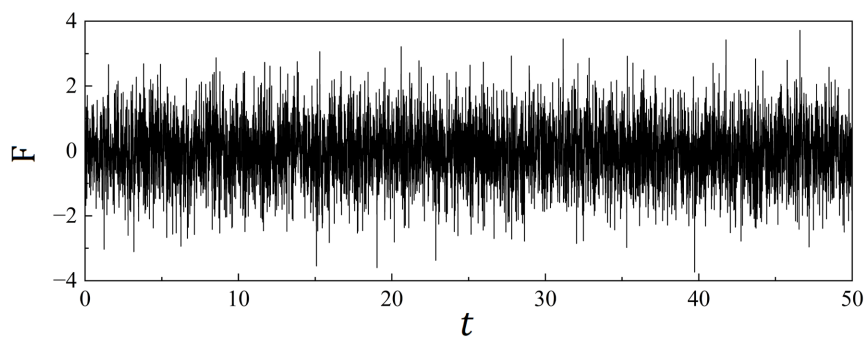


Figure 11. Time history of random excitation

图 11. 随机激励时间历程

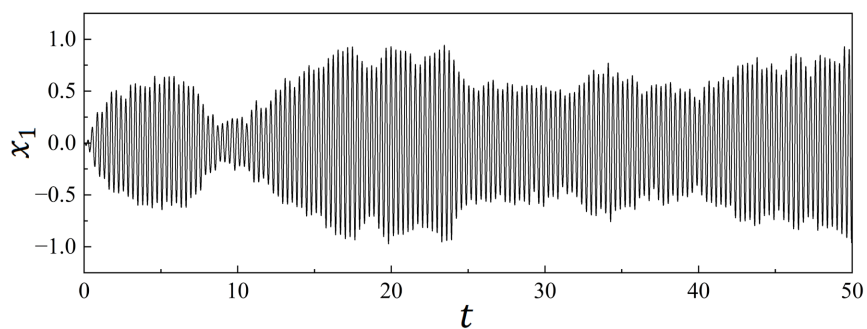


Figure 12. Time history of the linear primary system without vibration absorber

图 12. 无吸振器线性主系统时间历程

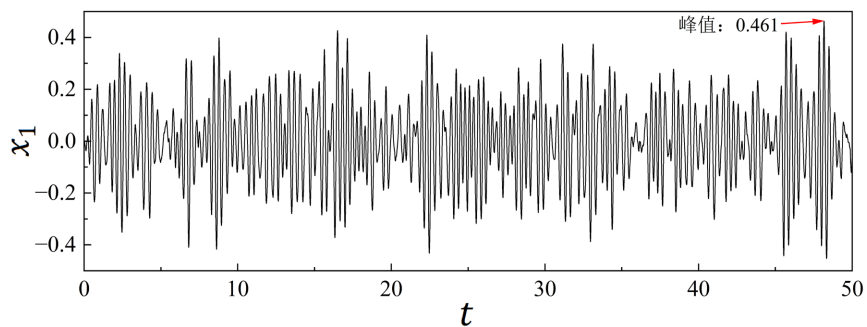


Figure 13. Time history of the primary system with grounded vibration absorber

图 13. 含接地型吸振器主系统时间历程

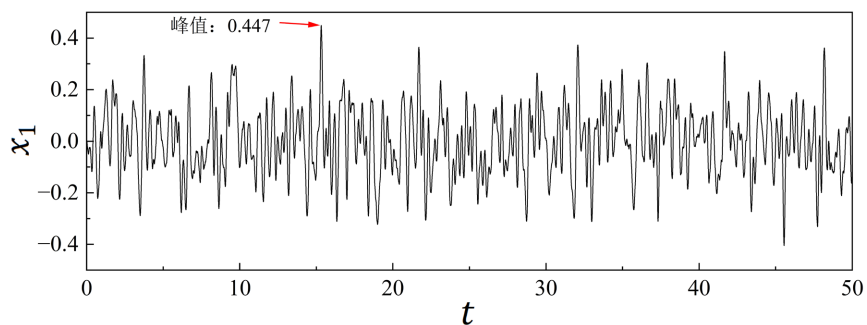


Figure 14. Time history of the primary system with negative-stiffness linear vibration absorber

图 14. 负刚度线性吸振器主系统时间历程

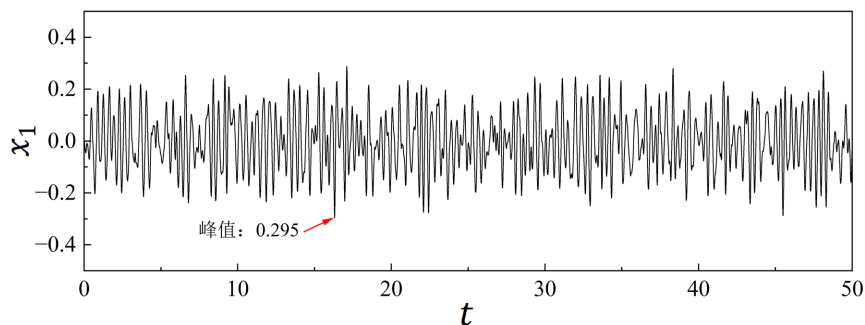


Figure 15. Time history of the primary system with negative-stiffness nonlinear grounded vibration absorber
图 15. 负刚度非线性接地式吸振器主系统时间历程

Table 1. Main-system displacement equation and damping ratio

表 1. 主系统位移方程及衰减比

Model of DVA	Displacement variance/m ²	Reduction ratio/%
No DVA	0.206033	—
DVA by Ren	0.023376	88.65
DVA by Peng	0.016328	92.07
Our model	0.011733	94.31

对比以上图表,可以看出在主系统上添加磁性 NES 装置,对比负刚度线性动力吸振器具有更好的减振性能,可以有效降低主系统的振动能量。综上所述,本文模型在随机激励下仍然具有良好的减振效果。

7. 结论

本文对含磁性非线性接地式负刚度动力吸振器的减振机理分析以及吸振器线性刚度参数进行优化,研究了磁性 NES 装置的非线性特性,分析了本文模型在不同参数下对主系统幅频曲线的影响,最后对吸振器关键的线性刚度参数进行优化,有效降低了振动幅值以及拓宽减振频带,得到以下几个主要结论。

1) 磁性非线性装置的非线性特性表现为典型的立方刚度非线性形式,可以通过调节磁铁之间的间距来改变 NES 装置的线性刚度项和非线性刚度项。

2) 数值结果参数分析:随着非线性刚度 k_2 的增大,幅频曲线的峰值会向高频段偏移;随着主系统线性刚度 k_{11} 的增大,幅频曲线整体形态会向高频段偏移;随着外激励 F 的增大,响应幅值也会随着增大。

3) 参数优化分析表明,随着吸振器线性刚度 k_2 的增大,幅频曲线的峰值会先减小再增大。通过等峰优化后找到最优线性刚度 k_2 ,再与文献[6]模型和文献[7]模型进行对比,表现出较好的减振效果。

4) 在随机激励下,本文模型与其他两个模型相比,分析了模型的峰值以及衰减比,本文模型也表现出更好的减振效果。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(编号:12072140)。

参考文献

- [1] Frahm, H. (1909) Device for Damping Vibrations of Bodies. U.S. Patent 089958.
- [2] Ormondroyd, J. and Den Hartog, J.P. (1928) The Theory of the Dynamic Vibration Absorber. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **49**, Article 021007. <https://doi.org/10.1115/1.4058553>

- [3] Brock, J.E. (1946) A Note on the Damped Vibration Absorber. *Journal of Applied Mechanics*, **13**, A284. <https://doi.org/10.1115/1.4009588>
- [4] Den Hartog, J.P. (1985) *Mechanical Vibrations*. McGraw-Hall Book Company, 112-132.
- [5] Asami, T. and Nishihara, O. (2003) Closed-form Exact Solution to H_∞ Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems). *Journal of Vibration and Acoustics*, **125**, 398-405. <https://doi.org/10.1115/1.1569514>
- [6] Ren, M.Z. (2001) A Variant Design of the Dynamic Vibration Absorber. *Journal of Sound and Vibration*, **245**, 762-770. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3564>
- [7] 彭海波, 申永军, 杨绍普. 一种含负刚度元件的新型动力吸振器的参数优化[J]. 力学学报, 2015, 47(2): 320-327.
- [8] 邢昭阳, 申永军, 邢海军, 等. 一种含放大机构的负刚度动力吸振器的参数优化[J]. 力学学报, 2019, 51(3): 894-903.
- [9] 李强, 董光旭, 张希农, 等. 新型可调动力吸振器设计及参数优化[J]. 航空学报, 2018, 39(6): 128-140.
- [10] Benacchio, S., Malher, A., Boisson, J. and Touzé, C. (2016) Design of a Magnetic Vibration Absorber with Tunable Stiffnesses. *Nonlinear Dynamics*, **85**, 893-911. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2731-3>
- [11] 刘刚, 郑大胜, 丁志雨, 等. 变质量-负刚度动力吸振器试验研究[J]. 中国机械工程, 2018, 29(5): 538-543.
- [12] 徐硕, 文永蓬, 张晨, 等. 城市轨道交通车辆负刚度非线性吸振器减振方法[J]. 噪声与振动控制, 2022, 42(6): 247-255.
- [13] Vakakis, A.F., Manevitch, L.I., Musienko, A.I., Kerschen, G. and Bergman, L.A. (2005) Transient Dynamics of a Dispersive Elastic Wave Guide Weakly Coupled to an Essentially Nonlinear End Attachment. *Wave Motion*, **41**, 109-132. <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2004.06.002>
- [14] Zhang, Y., Lu, Y., Zhang, W., Teng, Y., Yang, H., Yang, T., et al. (2019) Nonlinear Energy Sink with Inerter. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **125**, 52-64. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.08.026>
- [15] Zhang, Z., Lu, Z., Ding, H. and Chen, L. (2019) An Inertial Nonlinear Energy Sink. *Journal of Sound and Vibration*, **450**, 199-213. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.03.014>
- [16] Wang, X.F. and Zhu, W.D. (2015) A Modified Incremental Harmonic Balance Method Based on the Fast Fourier Transform and Broyden's Method. *Nonlinear Dynamics*, **81**, 981-989. <https://doi.org/10.1007/s11071-015-2045-x>
- [17] Olaru, R., Arcire, A., Petrescu, C., Mihai, M.M. and Gîrtan, B. (2017) A Novel Vibration Actuator Based on Active Magnetic Spring. *Sensors and Actuators A: Physical*, **264**, 11-17. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2017.07.041>
- [18] 左昂, 徐艳龙, 陈宁, 等. 一维立方非线性刚度周期结构色散特性研究[J]. 航空科学技术, 2024, 35(6): 63-70.