

基于LSTM的Stewart平台运动学正解研究

李荣棣, 李倩

北京工业大学建筑工程学院, 北京

收稿日期: 2026年6月2日; 录用日期: 2026年6月24日; 发布日期: 2026年7月6日

摘要

Stewart平台的运动学正解是一个强非线性、多耦合的复杂问题。传统求解方法存在计算量大、实时性差、依赖初值及多解等问题, 而现有神经网络方法大多仅建立从杆长到位姿的静态瞬时映射, 无法利用杆长序列蕴含的时序依赖关系, 导致连续轨迹预测精度受限。为此, 本文采用一种基于长短期记忆网络的运动学正解方法。将运动学正解从“瞬时静态求解”转变为“时序状态预测”, 构建三层堆叠LSTM网络, 通过位姿、速度和加速度预测三个维度的仿真结果, 全面评估LSTM网络的求解效果, 验证其在Stewart平台动态轨迹预测中的有效性和优越性。

关键词

Stewart平台, 运动学正解, 长短期记忆网络(LSTM), 连续轨迹预测, 时序依赖

Research on the Kinematic Forward Solution of Stewart Platform Based on LSTM

Rongdi Li, Qian Li

College of Architecture and Civil Engineering, Beijing University of Technology, Beijing

Received: June 2, 2026; accepted: June 24, 2026; published: July 6, 2026

Abstract

The forward kinematics of the Stewart platform is a highly nonlinear, strongly coupled complex problem. Traditional solution methods suffer from issues such as high computational cost, poor real-time performance, dependence on initial values, and multiple solutions. Meanwhile, most existing neural network approaches only establish a static instantaneous mapping from leg lengths to platform pose, failing to exploit the temporal dependencies inherent in leg length sequences, which limits prediction accuracy for continuous trajectories. To address this, this paper adopts a forward kinematics method based on Long Short-Term Memory networks. By transforming the forward kinematics from an

“instantaneous static solution” into a “temporal state prediction”, a three-layer stacked LSTM network is constructed. The performance of the LSTM network is comprehensively evaluated through simulation results in three dimensions—pose, velocity, and acceleration prediction—validating its effectiveness and superiority in dynamic trajectory prediction of the Stewart platform.

Keywords

Stewart Platform, Forward Kinematics, Long Short-Term Memory (LSTM), Continuous Trajectory Prediction, Temporal Dependency

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在 Stewart 平台的运动学分析中, 运动学反解是根据振动台台面的位姿变化确定各作动器的伸缩量 [1], 一般有明确的求解公式, 结果比较容易计算, 目前已有大量成熟研究 [2]-[5]。

除了反解之外, 另一类就是运动学正解的问题, 是指通过各作动器的伸缩量来确定台面位姿, 是实现平台精确控制和轨迹规划的理论基础。但正解作为实现高精度运动控制的核心环节, 求解却异常复杂, 一直是运动学分析的核心难题。因此无论国内还是国外, 都有大量学者对正解问题做了研究, 目前常用的一些求正解的方法主要有解析法 [6]-[9]、数值法 [10]-[16]、附加传感器法 [17] 和智能算法 [18]-[22] 等, 但分别存在计算量大、依赖初值、硬件成本高或无法有效利用时序信息等问题。

神经网络法是指通过离线学习建立从杆长到平台位姿的映射关系, 从而绕过传统方法中复杂的公式推导与编程, 直接获得平台位姿。刘得军等 [23] 以 Stewart 型并联机器人为例, 验证了 BP 算法在正解问题上的可行性; Qiao Guifang 等 [24] 提出基于 DBO-PSO 的双级 BPNN 结构, 验证了其在 Stewart 平台运动学正解求解中的有效性; 宋伟刚、张国伟 [25] 针对 6-DOF 并联机器人运动学正解问题, 系统地引入并验证了 RBF 网络在训练速度、避免局部极小值方面的优势, 是该领域的开创性工作。

但以上神经网络方法均属于静态映射模型, 当平台沿连续轨迹运动时, 当前位姿与过去时刻的杆长变化存在时序关联, 传统神经网络并无法捕捉到, 而这恰恰是长短期记忆网络 (Long Short Term Memory Network, 简称 LSTM) 的强项 [26], 因此本文将 LSTM 引入 Stewart 平台运动学正解研究。LSTM 是一种专门设计用于处理时序数据的深度学习架构, 通过门控机制和细胞状态实现对历史信息的有效记忆与利用, 将运动学正解从“瞬时静态求解”转变为“时序状态预测” [27]。

针对 LSTM 神经网络, Hochreiter 等人 [26] 系统阐述了长短期记忆网络的完整理论框架, 提出了遗忘门、输入门、输出门三门控结构和细胞状态的核心设计, 是 LSTM 的奠基性原始文献, 是本文采用 LSTM 求解运动学正解的根本理论依据; 王俊等人 [28] 将 LSTM 应用于测井曲线预测领域, 验证了 LSTM 在处理地质时序数据方面的有效性, 展示了 LSTM 如何利用历史序列信息进行非线性时序预测; Wang Q 等人 [29] 对 LSTM 在 Stewart 平台上的实际表现进行了专门研究, 结果显示对于圆形和螺旋形等连续运动轨迹, 均方根误差 (RMSE) 达 10^{-4} 量级, 平均绝对百分比误差 (MAPE) 低至 0.0013%, 这表明 LSTM 完全有能力高精度地求解这一复杂的映射关系; 张琴等人 [30] 将联邦学习引入 LSTM 框架, 提升模型对未知工况的泛化能力, 使平台能快速适应新颠簸频率等突发场景; 史培龙等人 [31] 提出了 U-LSTM, 利用当前时域的真实轨迹点信息对模型进行滚动更新, 解决了标准 LSTM 在曲率变化剧烈时预测滞后或误差累积的

问题, 为 Stewart 平台的正解预测提供实时纠偏机制, 保障连续预测稳定性。

本文将基于以上研究, 构建 Stewart 平台运动学正解的 LSTM 求解模型, 通过对比分析位姿、速度和加速度的预测效果, 验证网络模型的正确性和精度。

2. Stewart 平台运动学模型

2.1. 基本结构

Stewart 平台的核心结构由三部分组成: 下平台、上平台和六个作动器。下平台为基座, 是固定不动的支撑基础; 上平台为动平台, 是实现六自由度运动的末端执行器; 作动器是连接上下平台的可伸缩构件, 是驱动系统的核心; 每个作动器的两端通过铰链与平台连接。结构示例见图 1。



Figure 1. Stewart platform structure diagram

图 1. Stewart 平台结构图

在开始计算前, 需要先确定平台的基本几何参数和布置方式, 根据 Stewart 平台的工作特性, 各参数尺寸设置如表 1 所示。

Table 1. Stewart platform parameter settings

表 1. Stewart 平台参数设置

下平台半径 R_b (m)	上平台半径 R_p (m)	高度 h (m)	作动器初始长度 L_0 (m)	上下平台偏角 α (°)
1.5	1.0	2.0	2.1(± 0.25)	30

2.2. 建立坐标系

为了便于描述平台的运动, 需要在上、下平台上各建立一个笛卡尔坐标系, 图 2 展现了 Stewart 平台的结构及坐标系建立示意图。

其中, p_i ——六自由度平台中第 i 个作动器和上平台之间的铰点;

b_i ——六自由度平台中第 i 个作动器和下平台之间的铰点。

固定坐标系用 $\{B\}$ (O-XYZ) 表示, 固连在下平台上。原点 O 位于下平台铰接点所在圆的圆心, Z 轴垂直向上, X 轴指向第一个铰接点或某对铰接点的对称轴。

动坐标系用 $\{P\}$ (o-xyz) 表示, 固连在上平台上。原点 o 位于上平台铰接点所在圆的圆心(通常也是上平台的质心), 初始状态下各轴与固定坐标系平行。

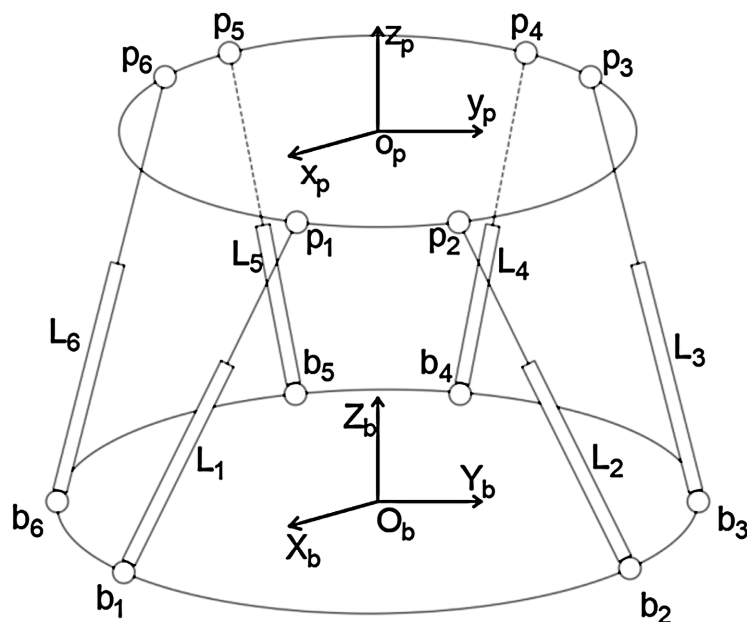


Figure 2. Stewart platform parameters and coordinate system setup diagram
图 2. Stewart 平台参数及坐标系设置图

2.3. 计算铰接点坐标

下平台铰接点在固定坐标系 $\{B\}$ 中, 用矩阵 B_i 表示:

$$B_i = \begin{bmatrix} R_b \cos(\theta_{bi}) \\ R_b \sin(\theta_{bi}) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ for } i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2-1)$$

其中 θ_{bi} 是第 i 个下铰接点的角度位置。

上平台铰接点在动坐标系 $\{P\}$ 中, 用矩阵 P_i 表示:

$$P_i = \begin{bmatrix} R_p \cos(\theta_{pi}) \\ R_p \sin(\theta_{pi}) \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ for } i = 1, 2, \dots, 6 \quad (2-2)$$

其中 θ_{pi} 是第 i 个上铰接点的角度位置。

2.4. 矩阵转换求反解

2.4.1. 定义上平台位姿

上平台的位姿由其在固定坐标系中的平移和旋转决定:

平移向量: $t = [t_x, t_y, t_z]^T$, 即动坐标系原点 o 在固定坐标系中的坐标。

旋转矩阵 R : 描述动坐标系相对于固定坐标系的旋转。通常用 Z-Y-X 欧拉角 (γ, β, α) 表示, 对应的旋转矩阵为:

$$R = R_z(\gamma)R_y(\beta)R_x(\alpha) \quad (2-3)$$

展开后为:

$$R = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & \cos \gamma \sin \beta \sin \alpha - \sin \gamma \cos \alpha & \cos \gamma \sin \beta \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \\ \sin \gamma \cos \beta & \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha + \cos \gamma \cos \alpha & \sin \gamma \sin \beta \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha \\ -\sin \beta & \cos \beta \sin \alpha & \cos \beta \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

2.4.2. 坐标转换矩阵

平台的平移和旋转姿态确定后, 得到从动坐标系 {P} 到固定坐标系 {B} 的齐次变换矩阵 T:

$$T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

2.4.3. 运动学反解公式

当上平台运动到目标位姿 (R, t) 时, 上平台各铰接点 P_i 在固定坐标系中的新坐标 Q_i 为:

$$Q_i = RP_i + t \quad (2-6)$$

根据距离公式, 连接下铰点 B_i 和上铰点新位置 Q_i 的长度, 即作动器长度 L_i 为:

$$L_i = \|l_i\| = \|Q_i - B_i\| = \sqrt{\sum_{i=1}^6 (RP_i + t - B_i)^2} \quad (2-7)$$

得到作动器伸缩量 ΔL_i 为:

$$\Delta L_i = L_i - L_0 \quad (2-8)$$

即可求出运动学反解。

3. 运动学正解的 LSTM 网络模型训练

3.1. LSTM 的基本结构

3.1.1. 单元结构

LSTM 是一种特殊的 RNN (Recurrent Neural Network) 循环神经网络, 信息可以在时间步之间传递, 形成“记忆”, 专门设计用于处理序列数据[28]。

LSTM 的核心创新在于引入了门控机制和细胞状态, 一个 LSTM 单元包含遗忘门、输入门、输出门三个门控单元和一个细胞状态[32], 三个门控单元协同工作, 对输入的信息进行筛选、丢弃、存储和传递, 细胞状态可以长期保存信息, 让网络能够有选择性地记住、遗忘和输出信息, 成功解决了传统 RNN 的梯度消失或梯度爆炸问题。图 3 为 LSTM 的内部单元结构图[33]。

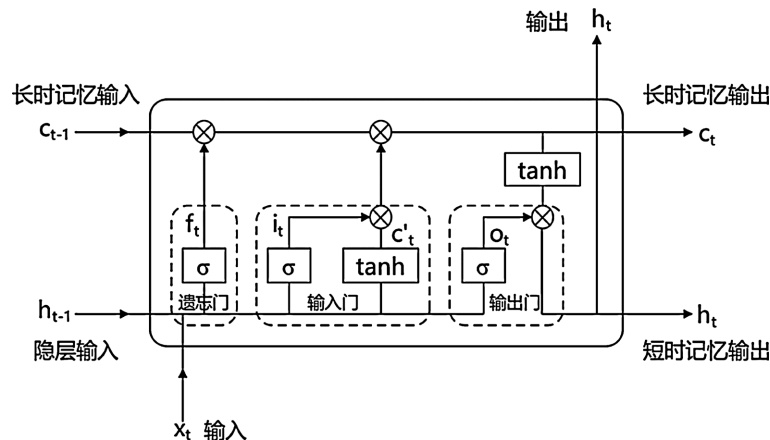


Figure 3. Internal unit structure diagram of long short-term memory network
图 3. 长短期记忆网络内部单元结构图

(1) 遗忘门 σ_f 决定从上一时刻的细胞状态中丢弃哪些信息[26], 计算公式为:

$$f_t = \text{sigmoid}(W_{xf}x_t + W_{hf}h_{t-1} + W_{cf}c_{t-1} + b_f) \quad (3-1)$$

式中: f_t 表示遗忘门状态向量, 在 0 到 1 之间(当 $f_t = 1$ 时, 完全保留该信息; 当 $f_t = 0$ 时, 完全遗忘该信息); x_t 表示当前输入; h_{t-1} 表示上一时刻的隐藏状态信息; c_{t-1} 表示上一时刻的记忆; W 为权重矩阵; b 为偏置项。

(2) 输入门 σ_i 决定哪些新信息将被存入细胞状态, 计算公式为:

$$i_t = \sigma(W_{xi}x_t + W_{hi}h_{t-1} + W_{ci}c_{t-1} + b_i) \quad (3-2)$$

候选细胞状态——创建新的候选值向量:

$$\tilde{c}_t = i_t \cdot \tanh(W_{xc}x_t + W_{hc}h_{t-1} + b_c) \quad (3-3)$$

更新细胞状态:

$$c_t = f_t \cdot c_{t-1} + \tilde{c}_t = f_t \cdot c_{t-1} + i_t \cdot \tanh(W_{xc}x_t + W_{hc}h_{t-1} + b_c) \quad (3-4)$$

式中: i_t 表示输入门状态向量, 控制哪些维度的信息需要更新(当 $i_t = 1$ 时, 表示更新; 当 $i_t = 0$ 时, 表示不更新); c_t 表示更新后的细胞状态, 长期记忆信号; \tilde{c}_t 表示当前结构单元的暂时记忆。

遗忘门决定保留多少旧信息, 输入门决定加入多少新信息, 二者结合完成细胞状态的更新。

(3) 输出门 σ_o 决定基于细胞状态输出哪些信息, 计算公式为:

$$o_t = \sigma(W_{xo}x_t + W_{ho}h_{t-1} + W_{co}c_{t-1} + b_o) \quad (3-5)$$

当前时刻的输出状态:

$$h_t = o_t \cdot \tanh(c_t) \quad (3-6)$$

式中: o_t 表示输出门状态向量, 控制从细胞状态中输出哪些信息; h_t 表示当前时刻的隐藏状态信息, 也是输出; $\tanh(c_t)$ 为激活函数, 将细胞状态压缩到-1 到 1 之间。

3.1.2. 三层 LSTM 网络结构

完整的 LSTM 网络由输入层、隐藏层和输出层构成, 针对较为复杂的 Stewart 平台运动学正解问题, 本文采用三层堆叠 LSTM 以增强网络的表达能力, 共有三层隐藏层, 每个隐藏层由 32 个隐藏单元串联而成; 输入层为六根作动器的长度值及速度、加速度 18 维向量 x_t ; 输出层为平台的位姿、速度、加速度 18 维向量 h_t 。三层 LSTM 网络结构图如图 4 所示。

3.2. 训练数据的获取与处理

3.2.1. 轨迹生成

由于静态点缺乏时序信息, 速度和加速度也无法计算, 因此在 LSTM 模型训练时, 只使用静态点训练会导致模型完全失效, 必须让平台在空间中连续运动。

由于正弦波轨迹平滑连续、参数可控且易分析, 因此确定平台的期望位姿轨迹为多自由度正弦波合成轨迹, 位置振幅在 0~0.1 m 之间, 姿态振幅在 0°~15°之间, 频率为 0.025~0.075 Hz, 相位为 0~2 π rad, 在此参数范围内均匀随机分布, 生成 10 万条不同轨迹。再使用理论解析导数计算速度和加速度, 计算时不要使用数值差分的方式, 会引入噪声。

3.2.2. 生成训练数据

确定平台的期望运动轨迹后, 通过运动学反解生成对应的杆长序列, 即理论数据。

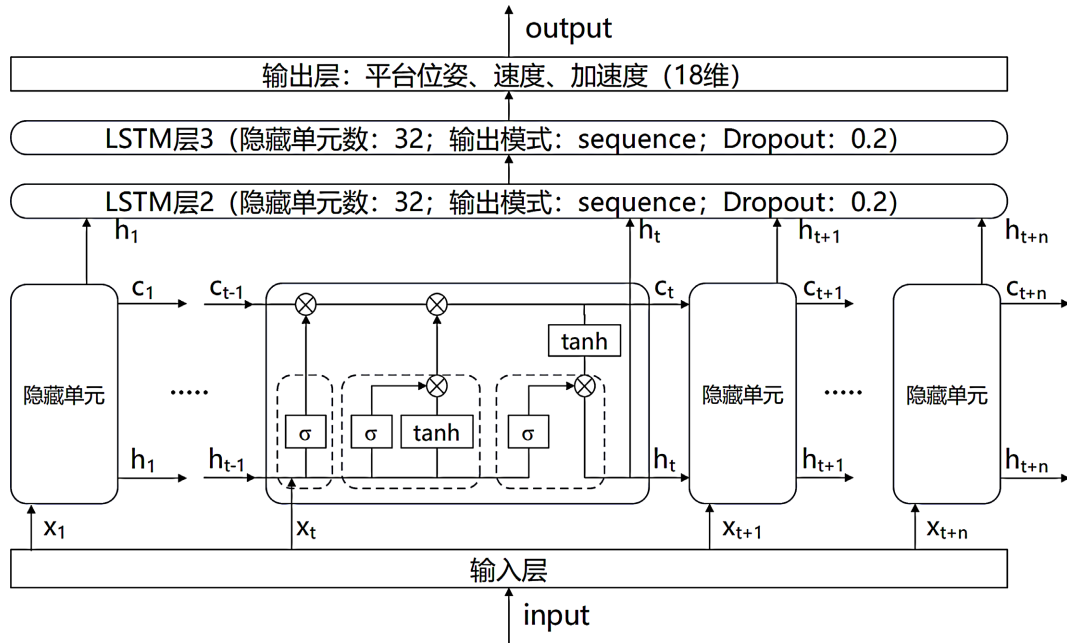


Figure 4. Three-layer LSTM network structure diagram
图 4. 三层 LSTM 网络结构图

为确保有足够的样本覆盖工作空间, 最终生成 100,000 个训练样本, 然后划分为训练集(70%)、测试集(15%)和验证集(15%), 其中:

(1) 输入特征(X):

原始输入: 6 个作动器的杆长 $[L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6]$ 变化;

增强输入: 将杆长的解析一阶导数(速度)和解析二阶导数(加速度)作为输入特征, 提供更精确的运动学信息;

最终输入维度: $[18, 1000]$, 代表 18×1000 的时序数据, 6 个杆长、6 个杆速、6 个杆加速度共 18 个输入维度, 每个样本包含连续 1000 个时刻的数据, 用来描述每个时刻的作动器状态。

(2) 输出标签(Y):

位置: 平台位姿 $[x, y, z, \phi, \theta, \varphi]$ (当前时刻);

速度: 平台位姿的一阶导数 $[\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}]$ (当前时刻);

加速度: 平台位姿的二阶导数 $[\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}, \ddot{\phi}, \ddot{\theta}, \ddot{\varphi}]$ (当前时刻);

最终输出维度: $[18, 1000]$, 描述平台的 3 个位置、3 个姿态、3 个线速度、3 个角速度、3 个线加速度及 3 个角加速度。

3.2.3. 数据归一化

由于 LSTM 内部使用 sigmoid/Tanh 激活函数, 输入数据必须落在 $[0, 1]$ 或 $[-1, 1]$, 梯度更新更平衡, 否则极易出现梯度饱和的情况, 因此必须进行归一化处理[34]。

选择 mapminmax 函数进行归一化处理, 属于 Min-Max 归一化方法, 计算速度快, 边界固定, 尤其是能够保持原始数据的分布结构, 适用于 LSTM 等神经网络训练, 归一化公式为:

$$Y = 2 \cdot \frac{X - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}} - 1 \tag{3-7}$$

3.3. LSTM 网络模型训练

3.3.1. 网络模型配置参数

表 2 为该三层 LSTM 网络模型的训练配置参数值。

Table 2. LSTM network model training parameter values

表 2. LSTM 网络模型训练参数值

参数	数值
隐藏层层数	3
隐藏层单元数	32 (过拟合风险低)
输入/出维度	18
优化器	Adam (自适应矩估计)
迭代次数	150
梯度阈值	1 (防止梯度爆炸)
初始学习率	0.005
学习率衰减系数	0.2/100epochs
验证频率	20

3.3.2. 多任务损失函数

由于位置和速度的误差级别不同, 因此使用加权 MSE。计算公式为:

$$\text{Loss} = \omega_p \cdot \text{MSE}_p + \omega_v \cdot \text{MSE}_v + \omega_a \cdot \text{MSE}_a \quad (3-8)$$

式中: Loss 表示总损失值(优化目标); ω_p 、 ω_v 、 ω_a 分别为位置误差、速度误差、加速度误差的权重; MSE_p 、 MSE_v 、 MSE_a 分别为位置误差、速度误差、加速度误差的均方值。

在权重设定时, 由于位置是核心, 因此权重设置为 $\omega_p = 1.0$, $\omega_v = 0.3$, $\omega_a = 0.05$, 这样可以让模型更加关注位置精度, 同时兼顾速度和加速度的动态特性。

图 5 展示了 LSTM 模型在训练过程中的损失函数收敛曲线。可以看出, LSTM 模型的初始损失较低,

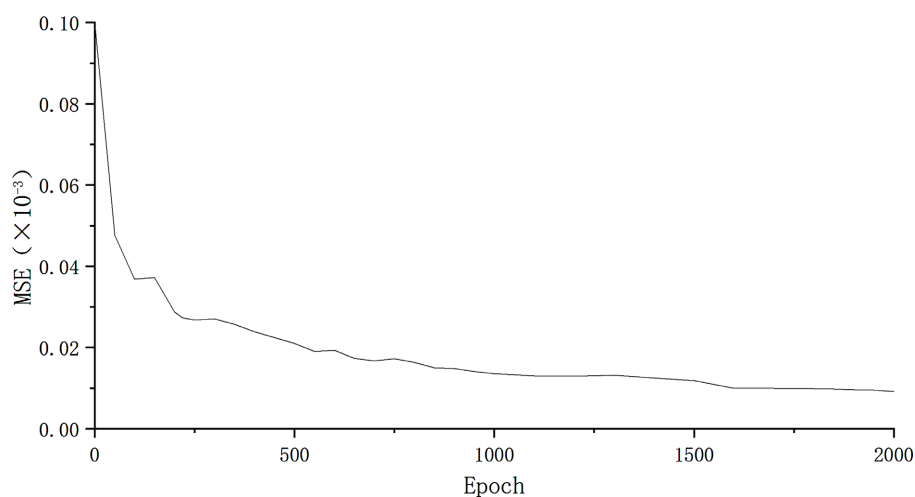


Figure 5. Loss function convergence curve during LSTM training

图 5. LSTM 训练过程中的损失函数收敛曲线

且在前 80 个 epoch 内快速下降, 随后逐渐收敛至稳定值, 曲线平滑, 无明显振荡。训练损失最终稳定在 9.1204×10^{-6} , 模型精度很高, 并且具有良好的泛化能力, 未发生过拟合。

3.3.3. 批处理与早停机制

Batch Size: 根据显存大小, 设置为 32。由于 Stewart 平台数据是连续的, 应随机打乱轨迹的数据, 但不能打乱单条轨迹内部的时间顺序。

Early Stopping: 监控验证集的损失, 当连续 20~50 个 epoch 没有下降时停止训练, 防止过拟合。若出现过拟合, 增加 Dropout 或减小网络规模。

3.4. 消融实验

3.4.1. 关键超参数选择

为验证网络层数、单元数等关键超参数选择的合理性, 分别测试 1~4 层 LSTM 堆叠结构, 每层隐藏单元数分别取 32、64 进行对比, 实验结果如表 3 所示。

实验结果表明: 随着层数增加, 32 单元网络的验证集加权 MSE 逐渐降低, 但继续增加层数至四层或增加隐藏单元数至 64 时, 精度提升趋于饱和, 而训练时间显著增加。因此综合考虑预测精度与计算效率, 选择三层堆叠 LSTM 结构, 每层 32 个隐藏单元。

Table 3. Comparison of validation set weighted MSE for different network structures

表 3. 不同网络结构的验证集加权 MSE 对比

层数	隐藏单元数	验证集加权 MSE	训练时间(秒/epoch)
1	32	8.56×10^{-5}	0.28
1	64	5.23×10^{-5}	0.51
2	32	3.18×10^{-5}	0.62
2	64	1.86×10^{-5}	1.18
3	32	9.12×10^{-6}	1.05
3	64	8.35×10^{-6}	1.96
4	32	9.28×10^{-6}	1.47

3.4.2. 损失函数权重设置

为验证损失函数中各任务的权重设置合理性, 设计了四组对比实验, 均采用位置、速度、加速度三项误差的加权 MSE 作为总损失函数, 仅调整三项权重配比。实验结果如表 4 所示。

Table 4. Comparison of prediction errors under different loss weight configurations

表 4. 不同损失权重配置下的预测误差对比

实验编号	权重配置(ω_p 、 ω_v 、 ω_a)	位置 MSE	速度 MSE	加速度 MSE
方案 A	1.0: 0.1: 0.01	8.02×10^{-6}	2.86×10^{-5}	3.42×10^{-4}
方案 B	1.0: 0.3: 0.05	9.12×10^{-6}	5.84×10^{-6}	9.57×10^{-5}
方案 C	1.0: 0.5: 0.1	1.08×10^{-5}	1.08×10^{-5}	1.28×10^{-4}
方案 D	1.0: 1.0: 0.2	1.35×10^{-5}	7.20×10^{-6}	8.20×10^{-5}

方案 A 中速度、加速度的权重很小, 因此误差偏高; 方案 C、D 进一步增大速度、加速度权重后,

误差虽有降低, 但位置误差上升至 10^{-5} 量级; 而方案 B 在三项任务之间取得了最佳平衡。因此, 本文采用 $\omega_p = 1.0$ 、 $\omega_v = 0.3$ 、 $\omega_a = 0.05$ 的权重配置是合理的。

4. 仿真结果验证与分析

4.1. 评价指标

(1) 位置误差指标

均方误差(MSE)——衡量预测值与真实值之间的总体偏差程度:

$$\text{MSE}_p = \frac{1}{6n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^6 (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2 \quad (4-1)$$

式中: n 表示样本总数; y_{ij} 、 \hat{y}_{ij} 分别表示第 i 个样本、第 j 个自由度的真实位置和预测位置。

最大绝对误差(Max Error)——衡量预测值的最大偏差:

$$\text{Max Error}_p = \max_{i=1-n} \max_{j=1-6} |y_{ij} - \hat{y}_{ij}| \quad (4-2)$$

(2) 速度/加速度误差指标

速度/加速度的 MSE 计算公式与位置 MSE 相同, 需重点关注相位延迟指标。

相位延迟(Phase Delay)——衡量预测信号相对于真实信号在时间轴上的滞后或超前程度, 通过互相关分析计算。

计算互相关函数:

$$R_{y\hat{y}}(\tau) = \sum_{t=1}^N y(t) \cdot \hat{y}(t+\tau) \quad (4-3)$$

归一化互相关[35]:

$$\rho_{y\hat{y}}(\tau) = \frac{\sum_{t=1}^N (y(t) - \bar{y}) \cdot (\hat{y}(t+\tau) - \bar{\hat{y}})}{\sqrt{\sum_{t=1}^N (y(t) - \bar{y})^2} \cdot \sqrt{\sum_{t=1}^N (\hat{y}(t) - \bar{\hat{y}})^2}} \quad (4-4)$$

式中: τ 表示时间延迟(样本数); \bar{y} 、 $\bar{\hat{y}}$ 分别为 $y(t)$ 、 $\hat{y}(t)$ 的均值; N 表示信号长度。

找到最大相关性的延迟:

$$\tau_{delay} = \arg \max_{\tau} |\rho_{y\hat{y}}(\tau)| \quad (4-5)$$

转换为实际时间:

$$\text{Phase Delay} = \tau_{delay} \cdot \Delta t \quad (4-6)$$

式中: Δt 为采样间隔(0.02s)。

(3) 表 5、表 6 为判断 LSTM 网络预测效果的 RMSE 值和 Max Error 值参考[36]。

Table 5. RMSE value reference for LSTM network prediction performance

表 5. LSTM 网络预测效果的 RMSE 值参考

预测类型	优秀	良好	中等	较差
位置(m)	<0.005	0.005~0.012	0.012~0.025	>0.025
姿态(deg)	<0.05	0.05~0.15	0.15~0.35	>0.35
速度(m/s)	<0.004	0.004~0.010	0.010~0.020	>0.020
加速度(m/s ²)	<0.003	0.003~0.008	0.008~0.015	>0.015

Table 6. Reference for the Max Error value of LSTM network prediction performance
表 6. LSTM 网络预测效果的 Max Error 值参考

预测类型	优秀	良好	中等	较差
位置(m)	<0.010	0.010~0.025	0.025~0.050	>0.050
姿态(deg)	<0.1	0.1~0.3	0.3~0.7	>0.7
速度(m/s)	<0.008	0.008~0.020	0.020~0.040	>0.040
加速度(m/s ²)	<0.006	0.006~0.015	0.015~0.030	>0.030

4.2. 位姿预测效果

LSTM 模型求解 Stewart 平台运动学位姿正解的预测效果如图 6 所示。

从预测轨迹来看, 位姿的预测精度高, 稳定性好, 尤其 X 和 Y 方向, 预测轨迹与真实轨迹高度吻合, Roll 和 Pitch 的预测非常精准, 几乎完全重合; Z 方向位置预测在初始阶段略有偏差, 但也很快收敛, 预测精度很高; Yaw 方向预测幅值略有偏差, 但整体趋势捕捉得很好。

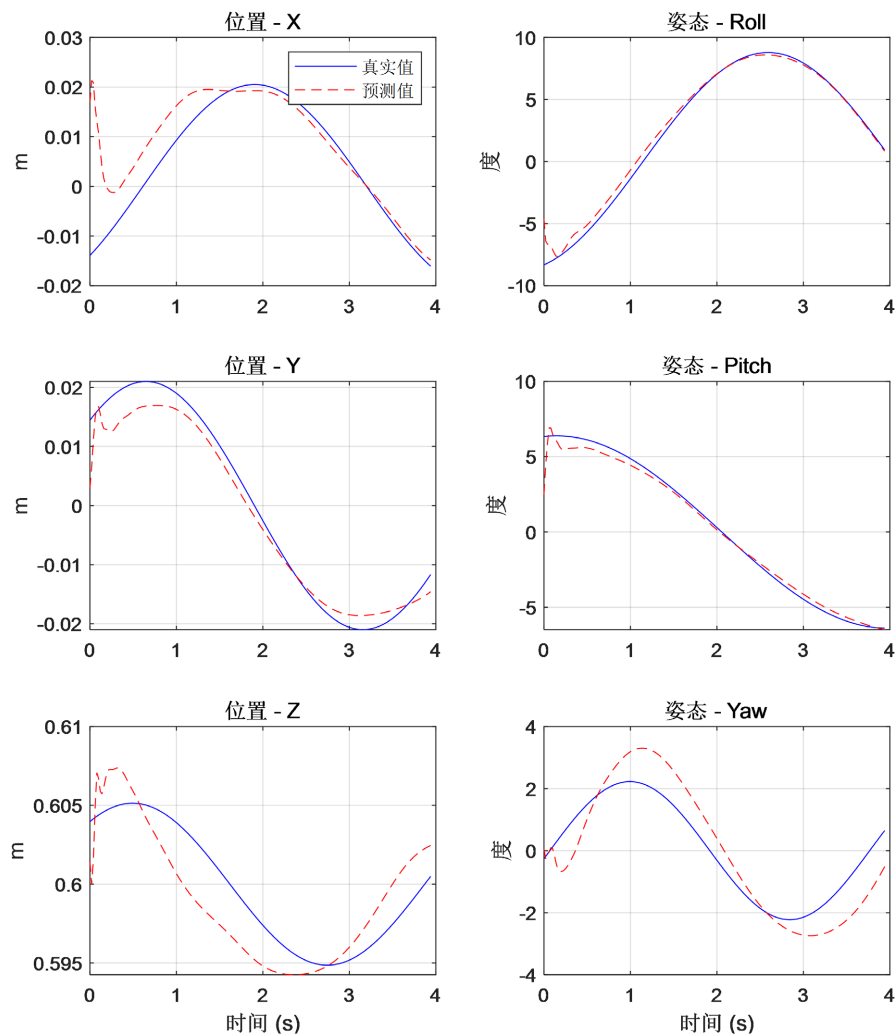


Figure 6. The pose forward kinematics prediction results of LSTM
图 6. LSTM 的位姿正解预测结果

根据预测数据计算所有位姿的 RMSE 和 Max Error, 如表 7 所示, 根据表 5 和表 6 的判断标准, 位置预测的效果完全达到了优秀标准; 姿态预测的 Max Error 值略差于位置预测, 由于 LSTM 需要时序训练, 因此初始阶段不太稳定, 0.25 s 后误差都回归正常, 以平稳段的 Max Error 值为准来判断预测效果。

Table 7. LSTM pose prediction RMSE and Max Error values

表 7. LSTM 位姿预测 RMSE 和 Max Error 值

预测类型	RMSE	Max Error (0.25 s 后)	预测效果
位置	0.00302	0.0060	优秀
姿态 Roll (deg)	0.026	0.093	优秀
姿态 Pitch (deg)	0.034	0.164	良好
姿态 Yaw (deg)	0.053	0.615	中等

4.3. 速度和加速度预测效果

图 7 为 LSTM 模型求解 Stewart 平台运动学速度和加速度正解的预测效果。

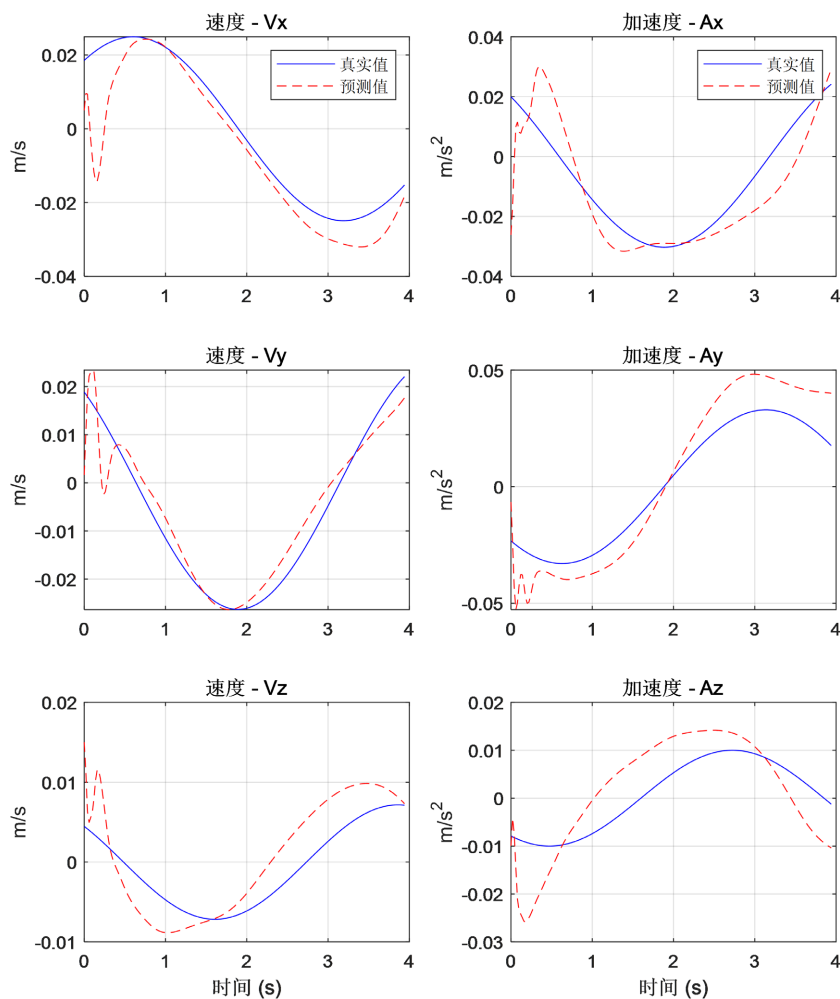


Figure 7. The velocity and acceleration forward kinematics prediction results of LSTM

图 7. LSTM 的速度和加速度正解预测结果

(1) 速度

从预测轨迹来看, Z 方向存在轻微相位超前, 但整体效果良好。0.5 s 后, V_x 和 V_y 的预测曲线与真实曲线重合度很高, 转折点捕捉准确, 且在时间序列内保持稳定, 没有发散迹象, 在千分位级别仍能保持跟随, 证明模型的小数值捕捉能力也很强, 这是时序预测中一个非常重要的优势。

根据预测数据计算 RMSE 值和 Max Error 值, 如表 8 所示, 三个方向的速度 RMSE 均小于 0.004 m/s, Max Error 均小于 0.008 m/s, 可以看出 0.5 s 后速度预测精度很高, 完全达到优秀标准, 比位姿预测稳定性更高。

Table 8. RMSE and Max Error of LSTM-based velocity prediction

表 8. LSTM 速度预测 RMSE 和 Max Error 值

预测类型	RMSE	Max Error (0.5 s 后)	预测效果
速度 v_x (m/s)	0.00247	0.005	优秀
速度 v_y (m/s)	0.00162	0.004	优秀
速度 v_z (m/s)	0.00316	0.006	优秀

(2) 加速度预测效果

由于加速度预测难度相对较大, 从预测轨迹来看, 整体趋势捕捉正确, 0.5 s 后趋势跟随更准确, 但极值和时序精度不足, 明显劣于位姿和速度预测, 还存在明显的可优化空间。 A_x 的正负趋势捕捉正确, 但在 0.5 s 附近由正转负时存在滞后; A_y 的整体趋势捕捉正确, 变化速率(斜率)也基本一致, 表现稳定, 是三个维度中预测效果最好的, 但幅值存在误差; A_z 的整体趋势捕捉正确, 但存在幅值偏差和轻微滞后。

以 0.5 s 后的数据为参考, 计算 RMSE 值和 Max Error 值, 能够更明显的分析预测效果, 如表 9 所示, 可以看出加速度误差虽然相对较大, 但均在正常范围内, 预测效果还是达到预期的。

Table 9. LSTM acceleration prediction RMSE and Max Error values

表 9. LSTM 加速度预测 RMSE 和 Max Error 值

预测类型	RMSE	Max Error (0.5 s 后)	预测效果
加速度 A_x (m/s^2)	0.00647	0.011	良好
加速度 A_y (m/s^2)	0.00925	0.015	中等
加速度 A_z (m/s^2)	0.01362	0.009	中等

加速度的预测难度大有多方面原因, 首先加速度数值小(0.01 量级), 信噪比低, 噪声相对影响大; 加速度是速度的导数, 变化频率更高, 而 LSTM 倾向于输出平滑结果, 难以捕捉加速度的快速转折; 并且在设置损失函数时以位姿和速度为主优化, 加速度会相对被忽略。这些问题是很难完全避免的。

4.4. 模型计算成本与实时性分析

为评估 LSTM 模型在实际工程应用中的实时控制潜力, 分别在 Intel Core i7-12700K CPU 和 NVIDIA RTX 3060 GPU 上执行一次前向传播的平均时间, 每次测试包含 100 次独立前向传播取平均值, 并选取 Newton-Raphson 迭代法作为对比, 初值采用上一时刻位姿, 迭代精度设为 1×10^{-6} , 最大迭代次数 50, 结果如表 10 所示。

Table 10. Real-time performance comparison between LSTM and Newton-Raphson method
表 10. LSTM 与 Newton-Raphson 方法实时性对比

方法	单步推理时间(ms)	是否满足实时性	依赖初值	多解问题
Newton-Raphson	8.65	是	是	有
LSTM(CPU)	2.34	是	否	无
LSTM(GPU)	0.18	是	否	无

LSTM 在 CPU 上速度约为 Newton-Raphson 法的 3.7 倍, GPU 上达 48 倍, 且无需初值、无多解问题, 虽然两种方法均满足实时控制要求, 但 LSTM 具有更高的实时性余量。

但 LSTM 的训练依赖连续轨迹数据, 且加速度预测误差较大, 更适用于对位姿和速度实时性要求高的控制任务, 在高精度力控场景需谨慎使用。

5. 结论

本文针对 Stewart 平台的运动学正解这一传统难题, 构建了一种基于长短期记忆网络的预测模型, 采用三层堆叠 LSTM 结构, 将杆长、杆速、杆加速度构建为 18 维时序输入, 实现了对平台位姿、速度、加速度的同步预测。得出以下主要结论:

(1) LSTM 适用于含时序依赖的 Stewart 平台运动学正解问题, 且具有显著优势。与传统静态神经网络不同, LSTM 引入了门控机制与细胞状态, 能够有效利用杆长序列中的时序依赖信息, 显著提升了连续轨迹下的预测精度与动态响应能力。

(2) LSTM 模型的位姿与速度预测精度高, 展现出良好的连续轨迹跟随能力。从整个时间序列来看, 预测曲线与真实曲线在转折点、减速段等动态变化区域高度吻合, 没有出现明显发散, 验证了 LSTM 对小数值变化和时序动态的敏锐捕捉能力。

(3) 连续轨迹训练策略显著提升正解精度。连续轨迹的优势在于, 相邻时刻的杆长变化具有明确的物理连续性和运动学约束, LSTM 可以发挥其记忆门控机制的优势, 学习到这些隐含的动态规律, 从而计算速度和加速度等动态指标。

(4) 多任务损失函数与数据增强策略有效提升了模型泛化能力。通过加权 MSE 联合优化位姿、速度、加速度, 并结合杆长导数信息作为输入特征, 模型在训练过程中收敛稳定, 未出现过拟合, 验证了所提训练策略的合理性。

参考文献

- [1] 张连朋. 冗余驱动电液振动台阵系统时域波形复现控制策略研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2017.
- [2] Jeong, J.W., Kim, S.H. and Kwak, Y.K. (1998) Kinematic Analysis of the Wire Parallel Mechanism for Full Coordinate Measuring of Industrial Robot. *KSME International Journal*, **12**, 1064-1072. <https://doi.org/10.1007/bf02942579>
- [3] Zhang, Y. and Cui, G. (2007) Kinematic Analysis on Spatial Rotation 4-SPS-1-S Parallel Manipulator with a Passive Constraining Spherical Joint. 2009 *IEEE International Conference on Intelligent Computing and Intelligent Systems*, Shanghai, 20-22 November 2009, 853-857.
- [4] Virgil Petrescu, R.V., Aversa, R., Apicella, A., Kozaitis, S., Abu-Lebdeh, T. and Petrescu, F.I.T. (2018) Inverse Kinematics of a Stewart Platform. *Journal of Mechatronics and Robotics*, **2**, 45-59. <https://doi.org/10.3844/jmrsp.2018.45.59>
- [5] 倪振松, 廖启征, 魏世民, 等. 空间 6R 机器人位置反解的对偶四元数法[J]. 机械工程学报, 2009, 45(11): 25-29.
- [6] Innocenti, C. and Parenti-Castelli, V. (1990) Direct Position Analysis of the Stewart Platform Mechanism. *Mechanism and Machine Theory*, **25**, 611-621. [https://doi.org/10.1016/0094-114x\(90\)90004-4](https://doi.org/10.1016/0094-114x(90)90004-4)

- [7] Enferadi, J. and Tootoonchi, A.A. (2010) A Novel Approach for Forward Position Analysis of a Double-Triangle Spherical Parallel Manipulator. *European Journal of Mechanics—A/Solids*, **29**, 348-355. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2009.12.001>
- [8] Huang, X., Liao, Q. and Wei, S. (2010) Closed-Form Forward Kinematics for a Symmetrical 6-6 Stewart Platform Using Algebraic Elimination. *Mechanism and Machine Theory*, **45**, 327-334. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2009.09.008>
- [9] Abbasnejad, G., Daniali, H.M. and Fathi, A. (2012) Closed Form Solution for Direct Kinematics of a 4PUS + 1PS Parallel Manipulator. *Scientia Iranica*, **19**, 320-326. <https://doi.org/10.1016/j.scient.2012.02.015>
- [10] 王启明. 冗余驱动并联机构性能分析与控制策略研究[D]: [博士学位论文]. 长春: 吉林大学, 2017.
- [11] 耿明超, 赵铁石, 王唱, 等. 基于拟 Newton 法的并联机构位置正解[J]. 机械工程学报, 2015, 51(9): 28-36.
- [12] Yang, C., Zheng, S., Jin, J., Zhu, S. and Han, J. (2010) Forward Kinematics Analysis of Parallel Manipulator Using Modified Global Newton-Raphson Method. *Journal of Central South University of Technology*, **17**, 1264-1270. <https://doi.org/10.1007/s11771-010-0630-1>
- [13] Darvishi, M.T. and Barati, A. (2007) A Third-Order Newton-Type Method to Solve Systems of Nonlinear Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **187**, 630-635. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.08.080>
- [14] Zhou, W., Chen, W., Liu, H. and Li, X. (2015) A New Forward Kinematic Algorithm for a General Stewart Platform. *Mechanism and Machine Theory*, **87**, 177-190. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2015.01.002>
- [15] Cardona, M. (2015) A New Approach for the Forward Kinematics of General Stewart-Gough Platforms. 2015 *IEEE Thirty Fifth Central American and Panama Convention (CONCAPAN XXXV)*, Tegucigalpa, 11-13 November 2015, 1-6. <https://doi.org/10.1109/concapan.2015.7428478>
- [16] Gallardo, J. and Alcaraz, L.A. (2018) Kinematics of the Gough-Stewart Platform by Means of the Newton-Homotopy Method. *IEEE Latin America Transactions*, **16**, 2850-2856. <https://doi.org/10.1109/latl.2018.8804248>
- [17] 裴葆青, 韩先国, 陈五一. 基于传感器的 6-DOF 并联机构运动学正解[J]. 北京航空航天大学学报, 2005, 31(4): 421-424.
- [18] Rokbani, N. and Alimi, A.M. (2013) Inverse Kinematics Using Particle Swarm Optimization, a Statistical Analysis. *Procedia Engineering*, **64**, 1602-1611. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.09.242>
- [19] Chandra, R. and Rolland, L. (2011) On Solving the Forward Kinematics of 3RPR Planar Parallel Manipulator Using Hybrid Metaheuristics. *Applied Mathematics and Computation*, **217**, 8997-9008. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.106>
- [20] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究[J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70-80.
- [21] Kardan, I. and Akbarzadeh, A. (2015) An Improved Hybrid Method for Forward Kinematics Analysis of Parallel Robots. *Advanced Robotics*, **29**, 401-411. <https://doi.org/10.1080/01691864.2014.994034>
- [22] Limtrakul, S. and Arnonkijpanich, B. (2019) Supervised Learning Based on the Self-Organizing Maps for Forward Kinematic Modeling of Stewart Platform. *Neural Computing and Applications*, **31**, 619-635. <https://doi.org/10.1007/s00521-017-3095-4>
- [23] 刘得军, 王娟, 王世营, 等. 基于 BP 算法的六自由度并联机器人正运动学求解[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2006(1): 35-37, 44.
- [24] 乔贵方, 聂新港, 付冬梅, 等. 基于 DBO-PSO-BPNN 的 Stewart 平台正运动学求解方法研究[J]. 仪表技术与传感器, 2023(12): 94-98.
- [25] 宋伟刚, 张国伟. 基于径向基函数神经网络的并联机器人运动学正问题[J]. 东北大学学报, 2004(4): 386-389.
- [26] Hochreiter, S. and Schmidhuber, J. (1997) Long Short-Term Memory. *Neural Computation*, **9**, 1735-1780. <https://doi.org/10.1162/neco.1997.9.8.1735>
- [27] 曲东明, 刘曰涛, 韩振, 等. 高精度并联 6-DOF 测量机构的正解研究[J]. 工具技术, 2023, 57(8): 137-141.
- [28] 王俊, 曹俊兴, 刘哲哥, 等. 基于长短期记忆网络的钻前测井曲线预测方法[J]. 成都理工大学学报(自然科学版), 2020, 47(2): 227-236.
- [29] Wang, Q., Xue, M., Su, J., Liu, Q., Chen, B. and Fang, M. (2022) Forward Kinematics Solution for Stewart and TBBP: A Neural Network Approach Based on LSTM. 2022 *5th International Conference on Robotics, Control and Automation Engineering (RCAE)*, Changchun, 28-30 October 2022, 227-235. <https://doi.org/10.1109/rcae56054.2022.9996010>
- [30] 张琴, 刘敦康, 张燕忠, 等. 基于联邦 LSTM 的突遇新频率船舶升沉运动预测策略[J]. 船舶工程, 2022, 44(7): 103-108.

-
- [31] 史培龙, 王彩瑞, 马强, 等. 考虑轨迹预测的大曲率道路智能车辆动态避障控制[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2024, 44(4): 161-174.
- [32] 黄大伟, 陈立昆, 高亚东. 基于 LSTM 和响应分解的冲击载荷识别方法研究[J]. 振动与冲击, 2024, 43(3): 69-76, 119.
- [33] 张文鹏, 纪金豹, 王东岳. 基于 LSTM 的振动台参数整定方法[J]. 机床与液压, 2024, 52(5): 124-130.
- [34] Ioffe, S. and Szegedy, C. (2015) Batch Normalization: Accelerating Deep Network Training by Reducing Internal Covariate Shift. arXiv: 1502.03167.
- [35] 王玉梅, 纪金豹, 王东岳. 基于串联长短时记忆网络的振动台子结构试验模拟[J]. 振动与冲击, 2023, 42(23): 80-86.
- [36] Zhu, X., Wang, L., Yang, M. and Fu, L. (2023) Deep Learning-Based CNN-LSTM Model Used for Predicting Pose Error of Stewart Platform. In: Yang, H., *et al.*, Eds., *Intelligent Robotics and Applications*, Springer, 358-370. https://doi.org/10.1007/978-981-99-6480-2_30