

基于双线性滞回模型的振动冲击夯 - 土体耦合系统动力学演化分析

汪志敏, 张 惠

兰州交通大学机电工程学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年9月23日; 录用日期: 2026年10月14日; 发布日期: 2026年10月27日

摘 要

振动冲击夯在运行过程中由于间隙和碰撞的作用, 其与土体的相互作用表现出复杂的非光滑动力学特征。为了深入探究夯机结构参数对其工作性能的影响, 本文建立了一种考虑土体非线性变形的二自由度振动冲击夯 - 土体耦合动力学模型。采用双线性滞回模型模拟土体的弹塑性特性, 建立并利用模态叠加与解耦法求解了系统在夯实加载、夯实卸载和跳起三个阶段的动力学矩阵方程。以激励力频率为分岔参数, 通过单参数分岔图、Lyapunov指数谱、Poincaré映射以及相图, 系统地研究了该非光滑系统的动力学行为演化规律。研究揭示了系统从周期运动经Grazing分岔、边界碰撞分岔、鞍结分岔等进入复杂周期带与混沌带的过程, 并精准捕捉了系统发生的Hopf分岔行为。最后, 通过对比不同激振频率下的土体累积塑性位移, 评估了系统的最佳夯实效率。

关键词

弹塑性, 滞回, 分岔, 夯实效率

Dynamic Evolution Analysis of a Vibro-Impact Rammer-Soil Coupled System Based on a Bilinear Hysteresis Model

Zhimin Wang, Hui Zhang

School of Mechanical Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu

Received: September 23, 2026; accepted: October 14, 2026; published: October 27, 2026

Abstract

During operation, the interaction between a vibro-impact rammer and soil exhibits complex non-smooth dynamic characteristics due to the effects of clearance and impact. To investigate the influence of structural parameters on the operational performance of the rammer, a two-degree-of-freedom coupled dynamic model of the vibro-impact rammer-soil system is established, in which the nonlinear deformation behavior of soil is taken into account. A bilinear hysteresis model is introduced to characterize the elastoplastic behavior of the soil. The system dynamic matrix equations corresponding to the compaction loading, compaction unloading, and take-off stages are formulated and solved using modal superposition and decoupling methods. Taking the excitation frequency as the bifurcation parameter, the evolution of the dynamic behavior of the nonsmooth system is systematically investigated using single-parameter bifurcation diagrams, Lyapunov exponent spectra, Poincaré maps, and phase portraits. The results reveal the transition of the system from periodic motion to complex periodic bands and chaotic regimes through grazing bifurcations, border-collision bifurcations, and saddle-node bifurcations. In addition, Hopf bifurcation behavior occurring in the system is accurately identified. Finally, the cumulative plastic displacement of the soil under different excitation frequencies is compared to evaluate the optimal compaction efficiency of the system.

Keywords

Elastoplasticity, Hysteresis, Bifurcation, Compaction Efficiency

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在机械系统动力学中, 由于间隙和运动限幅机构的存在, 常导致机械部件在运行过程中发生碰撞振动[1]。为了降低机械部件碰撞对机械设备运行带来的不利影响以及为了提高由碰撞振动原理设计制造的机械设备的工作性能, 国内外学者通过理论分析、数值仿真以及试验等方法对碰撞振动系统的周期振动稳定性与分岔、混沌控制、吸引子共存等相关问题进行了一系列研究[2]。对于含间隙机械系统, 碰撞使其在运行过程中成为一类典型的非光滑动力系统, 其表现出丰富的动力学行为, 如基本碰撞运动、亚谐碰撞运动、擦边分岔、混沌激变、共存吸引子和 Neimark-Sacker 分岔等[3]。碰撞振动系统的倍化分岔序列通常由于擦边周期运动的存在而破坏, 并引发 Poincaré 映射的奇异性, 从而导致系统出现其他动力学特性。振动冲击夯是利用冲击和振动作用夯实回填土的小型压实机械。可从事很多基础设施施工, 尤其是对狭窄地段、路缘等大型压实机械无法作业的地方, 振动冲击夯的作用更加明显[3]。Broman 等[4]建立了夯土机的理论模型, 分析了夯土机的动态特性, 利用标准软件对该模型的微分方程进行了数值求解, 得出了对应的时间序列、相平面图。徐慧东等[5]研究了一类单自由度分段线性系统周期运动的分岔和混沌现象。吕小红[6][7]等建立了考虑渐进运动的小型振动冲击式打桩机的力学模型, 研究了低碰撞恢复系数及塑性碰撞工况下碰撞振动的类型、分岔和系统参数对打桩机渐进率的影响。Chen 等[8]基于土体粘弹性塑性理论, 构建了振动冲击夯与土体体系的动力学模型和方程集。得到了振动冲击夯的实时工作数据, 并提供了一种新的振动冲击夯优化设计方法。许宏飞等[9]研究了一类具有非线性分支的分段映射的动力学行为, 通过理论推导确定了周期轨道周期点的存在范围和禁区边界。沈振宗等[10]通过仿真实验对比了

振动压路机-土壤非线性模型与线性模型的优缺点。张惠[11]对参数-状态空间碰撞振动系统的分岔参数灵敏度、吸引子共存与吸引域质变机理、分岔与混沌控制等问题进行了系统的研究。张锦涛[12]分别以 Duffing 系统和分段光滑机械振动系统为研究对象,应用延拓打靶法对系统共存周期解的稳定性和分岔进行了详细研究。王超等[13]针对一类单自由度含间隙多约束碰撞振动系统,通过在碰撞面处建立系统的 Poincaré 映射通过数值模拟,计算系统混沌吸引子与周期吸引子的收敛序列。文智华[14]建立了与实际工况更相似的一类非线性约束,结合二自由度碰撞块模型,构成两类含非线性约束的机械碰撞系统,研究其非线性特性。张瑞良等[15]基于平均法及其改进形式和变步长四阶龙格库塔法对含间隙的分段线性系统的动力学行为进行了研究。张柏林等[16]提出了一种参数空间变化下探索吸引子共存现象的新方法,并分析了系统在状态空间下吸引子的演化趋势。魏冬梅等[17]考虑塑性碰撞工况下的单自由度冲击振动系统,推导了擦边分岔和余维一滑动分岔的条件。Gong 等[18]研究了两个模型在预测系统响应和混沌动力学方面的相似性,得出分段模型表现出更程度的混沌。柳剑刚[19]分别建立了振动冲击钻进系统的单自由度、二自由度、三自由度动力学模型,对它们分别进行动力学特性分析。商祥志[20]建立振动压路机-土的非线性动力学耦合模型并对振动压路机的激振力和激振频率进行分析。

2. 振动冲击夯-土体耦合模型建立

2.1. 土体模型建立

在振动冲击夯工作过程中,土体的变形可大致分为两种工况,夯实初期时,由于土体刚度系数和阻尼系数变化较大,所以土体主要变现为弹塑性特性及非线性变形;到夯实后期,塑性变形消失而只存在弹性变形。

针对学者们提出的许多土体的动力学模型中,选择最具代表性的双线性滞回模型代替传统线性模型,对土体进行非线性模拟。土体的双线性滞回模型图如图所示。

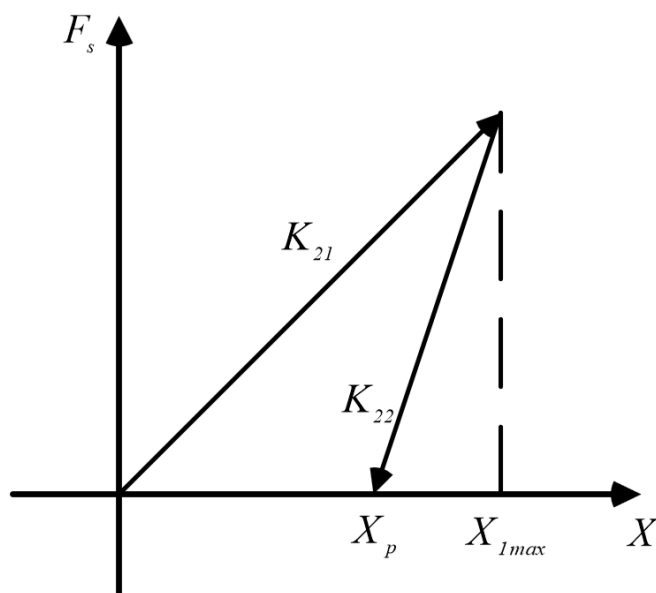


Figure 1. Bilinear Hysteresis model of soil
图 1. 土体双线性滞回模型

由图 1 可知非线性弹性力的动力学方程式如下所示。

$$F_s(X_1) = \begin{cases} K_{21}X_1, & \dot{X}_1 \geq 0 \\ K_{22}(X_{1\max} - X_p), & \dot{X}_1 < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

其中:

K_{21} 为加载夯实阶段土体等效线性刚度,

K_{22} 夯实卸载阶段土体等效线性刚度, $X_{1\max}$ 为每次夯实加载时最大夯实量,

$X_p = X_{1\max} \left(1 - \frac{K_{21}}{K_{22}}\right)$ 为夯实卸载阶段土体塑性残余变形量。

2.2. 振动冲击夯 - 土体耦合动力学模型

根据振动冲击夯振动夯实过程, 建立夯板 - 土体耦合模型, 见图 2。 M_1 为夯土机夯板, M_2 为夯土机机架, A 为无质量滑块表示被夯土体。 K_1 , C_1 夯机内部线性隔振器的弹簧刚度与阻尼系数。

见图 3, 初始阶段夯板与土体接触如图 3(a)所示, 在激励力作用下夯板开始向下运动夯实土体如图 3(b), 当 $\dot{X}_1 = 0$ 且 $\ddot{X}_1 < 0$ 时夯板达到夯实最大位移, 开始进入夯实卸载阶段如图 3(c), 当 $F_s = 0$ 时, 夯板离开土体如图 3(d)所示。

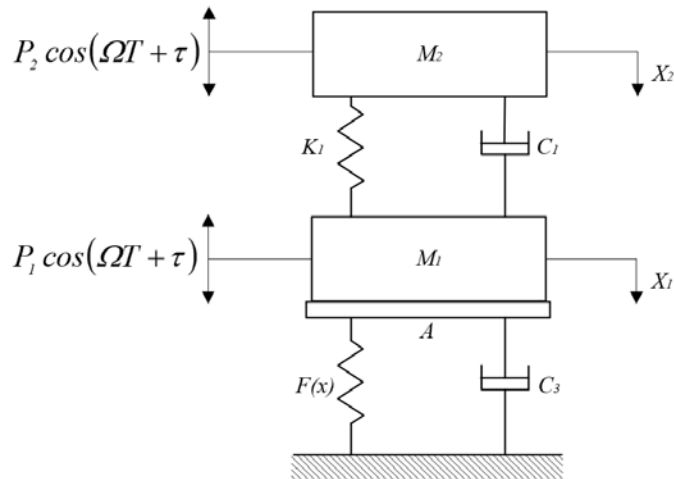


Figure 2. Two-Degree-of-freedom model

图 2. 二自由度模型

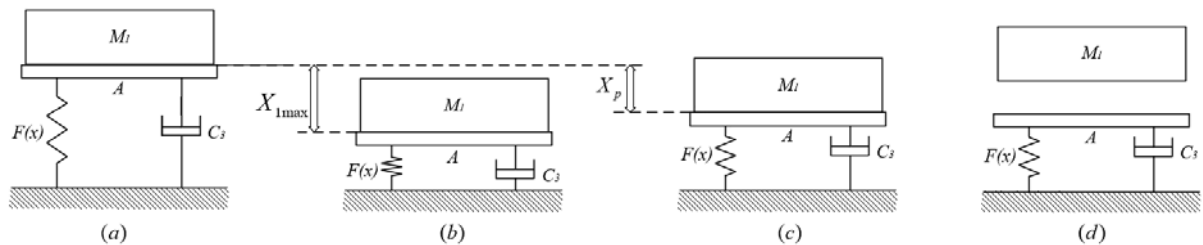


Figure 3. Schematic diagram of each stage in the compaction process

图 3. 夯实过程中各阶段示意图

由此结合土壤模型建立系统动力学方程

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{X}_1 \\ \ddot{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 \\ -K_1 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_s(X_1, \dot{X}_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 g + P_1 \cos(\Omega T + \tau) \\ M_2 g + P_2 \cos(\Omega T + \tau) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$F_s(X_1, \dot{X}_1) = \begin{cases} K_{21}X_1 + C_3\dot{X}_1, & \dot{X}_1 \geq 0 \\ \max(0, K_{22}(X_1 - X_p) + C_3\dot{X}_1), & \dot{X}_1 < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{其中 } X_p = X_{1\max} \left(1 - \frac{K_{21}}{K_{22}} \right)$$

无量纲参数如下:

$$\begin{aligned} X_c &= \frac{M_1 g}{K_1}, x_1 = \frac{X_1}{X_c}, x_2 = \frac{X_2}{X_c}, x_p = \frac{X_p}{X_c}, x_{1\max} = \frac{X_{1\max}}{X_c}, \mu_m = \frac{M_2}{M_1}, \mu_{k21} = \frac{K_{21}}{K_1}, \mu_{k22} = \frac{K_{22}}{K_1}, \\ \omega &= \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}}, t = T \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}, \zeta_1 = \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 M_1}}, \zeta_3 = \frac{C_3}{2\sqrt{K_1 M_1}}, p_1 = \frac{P_1}{M_1 g}, p_2 = \frac{P_2}{M_1 g}, \end{aligned} \quad (4)$$

无量纲化后的方程如下

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_1 & -2\zeta_1 \\ -2\zeta_1 & 2\zeta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_s(x_1, \dot{x}_1) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + p_1 \cos(\omega t + \tau) \\ \mu_m + p_2 \cos(\omega t + \tau) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$f_s(x_1, \dot{x}_1) = \begin{cases} \mu_{k21}x_1 + 2\zeta_3\dot{x}_1, & \dot{x}_1 \geq 0 \\ \max(0, \mu_{k22}(x_1 - x_p) + 2\zeta_3\dot{x}_1), & \dot{x}_1 < 0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{其中 } x_p = x_{1\max} \left(1 - \frac{\mu_{k21}}{\mu_{k22}} \right)$$

3. 各运动阶段动力学方程求解

3.1. 夯实加载阶段动力学方程求解

在此阶段 $\dot{x}_1 > 0$ 且 $x_1 \geq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_1 + 2\zeta_3 & -2\zeta_1 \\ -2\zeta_1 & 2\zeta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \mu_{k21} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + p_1 \cos(\omega t + \tau) \\ \mu_m + p_2 \cos(\omega t + \tau) \end{bmatrix} \quad (7)$$

将方程写为标准的动力学矩阵形式

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = F_{DC} + F_{AC}(t) \quad (8)$$

提取各矩阵和向量

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 + 2\zeta_3 & -2\zeta_1 \\ -2\zeta_1 & 2\zeta_1 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 + \mu_{k21} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ F_{DC} &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_m \end{bmatrix}, F_{AC}(t) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \cos(\omega t + \tau) \end{aligned} \quad (9)$$

设此阶段 M_1 运动时间为 t_c 矩阵 Ψ 将方程解耦系统的位移 $x_i(t)$ 和速度 $\dot{x}_i(t)$ ($i=1, 2$) 的通解为:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} \left[e^{-\eta_j t} (a_j \cos \omega_{dj} t + b_j \sin \omega_{dj} t) + A_j \sin(\omega t + \tau) + B_j \cos(\omega t + \tau) \right] + x_{0i} \quad (10)$$

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} \left[e^{-\eta_j t} \left((\omega_{dj} b_j - \eta_j a_j) \cos \omega_{dj} t - (\omega_{dj} a_j + \eta_j b_j) \sin \omega_{dj} t \right) + A_j \omega \cos(\omega t + \tau) - B_j \omega \sin(\omega t + \tau) \right] \quad (11)$$

其中:

ψ_{ij} (正则模态矩阵元素): 系统模态矩阵 Ψ 的元素, 由无阻尼特征方程 $(K - \omega_j^2 M) \psi_j = 0$ 确定。 ω_j 为系统的第 j 阶无阻尼固有频率, $\eta_j = \frac{1}{2}(\Psi^T C \Psi)_{jj}$, $\omega_{dj} = \sqrt{\omega_j^2 - \eta_j^2}$, $x_{01} = \frac{1 + \mu_m}{\mu_{k21}}$, $x_{02} = \frac{1 + \mu_m(1 + \mu_{k21})}{\mu_{k21}}$, 振幅常数 $A_j = \frac{2\eta_j \omega \hat{p}_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\eta_j \omega)^2}$, $B_j = \frac{(\omega_j^2 - \omega^2) \hat{p}_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (2\eta_j \omega)^2}$ ($\hat{p}_j = \psi_{1j} p_1 + \psi_{2j} p_2$), 积分常数 a_j, b_j 由系统在某一阶段运动初始时刻 t_0 的具体状态条件 $x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)$ 确定。

3.2. 夯实卸载阶段动力学方程求解

当 $\dot{x}_1 = 0$ 且 $\ddot{x}_1 < 0$ 时系统进入夯实卸载阶段, 在此阶段 $\dot{x}_1 < 0$, 设此阶段 M_1 运动时间为 t_n

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_1 + 2\zeta_3 & -2\zeta_1 \\ -2\zeta_1 & 2\zeta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 + \mu_{k22} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_{k22} x_p + p_1 \cos(\omega t + \tau) \\ \mu_m + p_2 \cos(\omega t + \tau) \end{bmatrix} \quad (12)$$

其中:

$$x_p = x_{1\max} \left(1 - \frac{\mu_{k21}}{\mu_{k22}} \right) \text{ 且 } x_1 = x_{1\max}$$

提取此阶段变化的矩阵和向量

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_{k22} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_{DC} = \begin{bmatrix} 1 + \mu_{k22} x_p \\ \mu_m \end{bmatrix} \quad (13)$$

利用新的模态矩阵 $\bar{\Psi}$ 解耦后, $\bar{x}_i(t)$ 和 $\dot{\bar{x}}_i(t)$ 的通解为

$$\bar{x}_i(t) = \sum_{j=1}^2 \bar{\psi}_{ij} \left[e^{-\bar{\eta}_j t} (\bar{a}_j \cos \bar{\omega}_{dj} t + \bar{b}_j \sin \bar{\omega}_{dj} t) + \bar{A}_j \sin(\omega t + \tau) + \bar{B}_j \cos(\omega t + \tau) \right] + \bar{x}_{0i} \quad (14)$$

$$\dot{\bar{x}}_i(t) = \sum_{j=1}^2 \bar{\psi}_{ij} \left[e^{-\bar{\eta}_j t} \left((\bar{\omega}_{dj} \bar{b}_j - \bar{\eta}_j \bar{a}_j) \cos \bar{\omega}_{dj} t - (\bar{\omega}_{dj} \bar{a}_j + \bar{\eta}_j \bar{b}_j) \sin \bar{\omega}_{dj} t \right) + \bar{A}_j \omega \cos(\omega t + \tau) - \bar{B}_j \omega \sin(\omega t + \tau) \right] \quad (15)$$

其中:

$$\text{偏置位移量 } \bar{x}_{01} = \frac{1 + \mu_{k22} x_p + \mu_m}{\mu_{k22}}, \bar{x}_{02} = \frac{1 + \mu_{k22} x_p + \mu_m (1 + \mu_{k22})}{\mu_{k22}}, \bar{A}_j = \frac{2\bar{\eta}_j \omega \hat{\bar{p}}_j}{(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + (2\bar{\eta}_j \omega)^2},$$

$\bar{B}_j = \frac{(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2) \hat{\bar{p}}_j}{(\bar{\omega}_j^2 - \omega^2)^2 + (2\bar{\eta}_j \omega)^2}$ 为振幅常数, 积分常数 $\bar{a}_j, \bar{b}_j$ 由系统状态量 $x_1(t_c), x_2(t_c), \dot{x}_1(t_c), \dot{x}_2(t_c)$ 确定。

3.3. 跳起阶段动力学方程求解

当 $f_s = 0$ 且 $\dot{x}_1 < 0$ 时, 振动夯进入跳起阶段, 夯板与机架在激励力与重力作用下自由运动直到再次进

入夯实加载阶段,设此阶段 M_1 运动时间为 t_h 。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\zeta_1 & -2\zeta_1 \\ -2\zeta_1 & 2\zeta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + p_1 \cos(\omega t + \tau) \\ \mu_m + p_2 \cos(\omega t + \tau) \end{bmatrix} \tag{16}$$

此阶段的刚度矩阵:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

通过模态叠加法可以得到 $x_i(t)$ 和 $\dot{x}_i(t)$ 的通解为:

$$x_i(t) = \tilde{\psi}_{i1} \left[\frac{1}{2} \tilde{F}_{DC1} t^2 + a_1 t + a_0 + b_1 - \frac{\tilde{p}_1}{\omega^2} \cos(\omega t + \tau) \right] \tag{18}$$

$$+ \tilde{\psi}_{i2} \left[e^{-\tilde{\eta}_2 t} (a_2 \cos \tilde{\omega}_{d2} t + b_2 \sin \tilde{\omega}_{d2} t) + \tilde{A}_2 \sin(\omega t + \tau) + \tilde{B}_2 \cos(\omega t + \tau) + \tilde{x}_{02} \right]$$

$$\dot{x}_i(t) = \tilde{\psi}_{i1} \left[\tilde{F}_{DC1} t + a_1 + \frac{\tilde{p}_1}{\omega} \sin(\omega t + \tau) \right] \tag{19}$$

$$+ \tilde{\psi}_{i2} \left[e^{-\tilde{\eta}_2 t} ((\tilde{\omega}_{d2} b_2 - \tilde{\eta}_2 a_2) \cos \tilde{\omega}_{d2} t - (\tilde{\omega}_{d2} a_2 + \tilde{\eta}_2 b_2) \sin \tilde{\omega}_{d2} t) + \tilde{A}_2 \omega \cos(\omega t + \tau) - \tilde{B}_2 \omega \sin(\omega t + \tau) \right]$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 = 0, \tilde{\eta}_1 = 0 \quad \tilde{F}_{DC1} = \tilde{\psi}_{11}(1) + \tilde{\psi}_{21}(\mu_m), \quad \tilde{p}_1 = \tilde{\psi}_{11} p_1 + \tilde{\psi}_{21} p_2, \quad \tilde{\omega}_{d2} = \sqrt{\tilde{\omega}_2^2 - \tilde{\eta}_2^2}, \quad \tilde{F}_{DC2} = \tilde{\psi}_{12}(1) + \tilde{\psi}_{22}(\mu_m), \\ \tilde{x}_{02} = \frac{\tilde{F}_{DC2}}{\tilde{\omega}_2^2}, \quad \tilde{p}_2 = \tilde{\psi}_{12} p_1 + \tilde{\psi}_{22} p_2, \quad \text{受迫振动的稳态谐波振幅 } \tilde{A}_2 = \frac{2\tilde{\eta}_2 \omega \tilde{p}_2}{(\tilde{\omega}_2^2 - \omega^2)^2 + (2\tilde{\eta}_2 \omega)^2}, \end{aligned}$$

$$\tilde{B}_2 = \frac{(\tilde{\omega}_2^2 - \omega^2) \tilde{p}_2}{(\tilde{\omega}_2^2 - \omega^2)^2 + (2\tilde{\eta}_2 \omega)^2} \text{ 积分常数 } a_2, b_2 \text{ 由系统进入该阶段瞬间的初始条件 } x_1(t_n), x_2(t_n), \dot{x}_1(t_n), \dot{x}_2(t_n)$$

确定。

4. 系统动力学行为演化分析

4.1. 单参数分岔图演化

为研究系统动力学行为演化情况。选取系统主要参数值[21]见表 1。

Table 1. System parameter values
表 1. 系统参数值

参数	值	单位
M_1	19.73	Kg
M_2	3.89	Kg
C_3	3075	Ns/m
K_{21}	750,000	N/m
C_1	496	$N \cdot s/m$
K_1	77,000	N/m
g	9.81	m/s^2

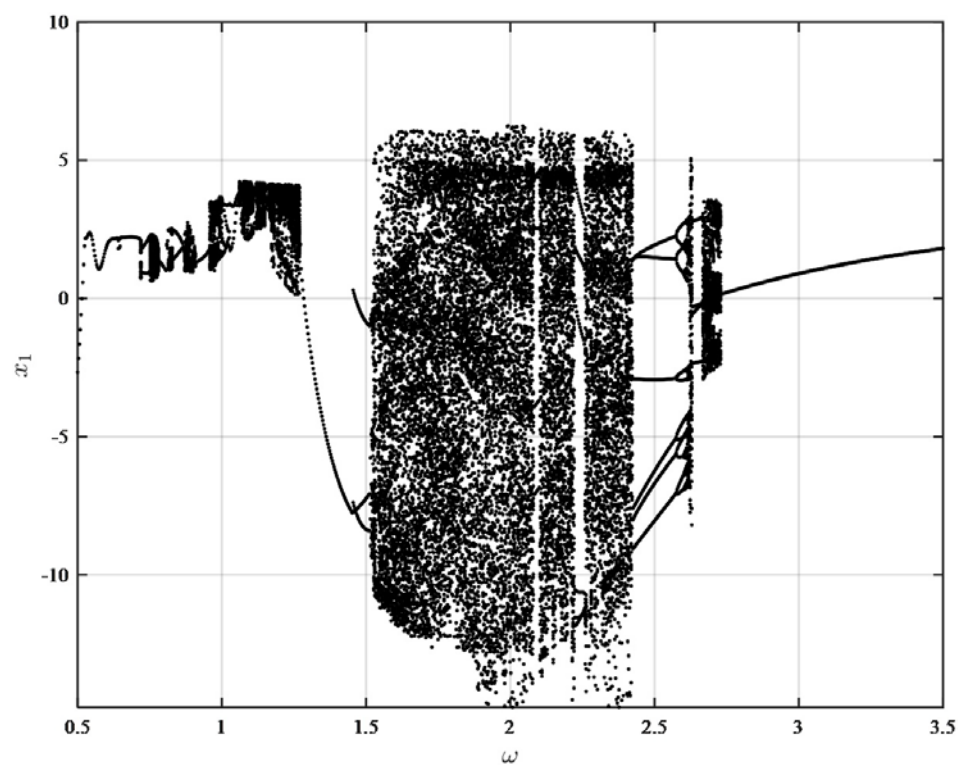


Figure 4. Bifurcation diagram
图 4. 分岔图

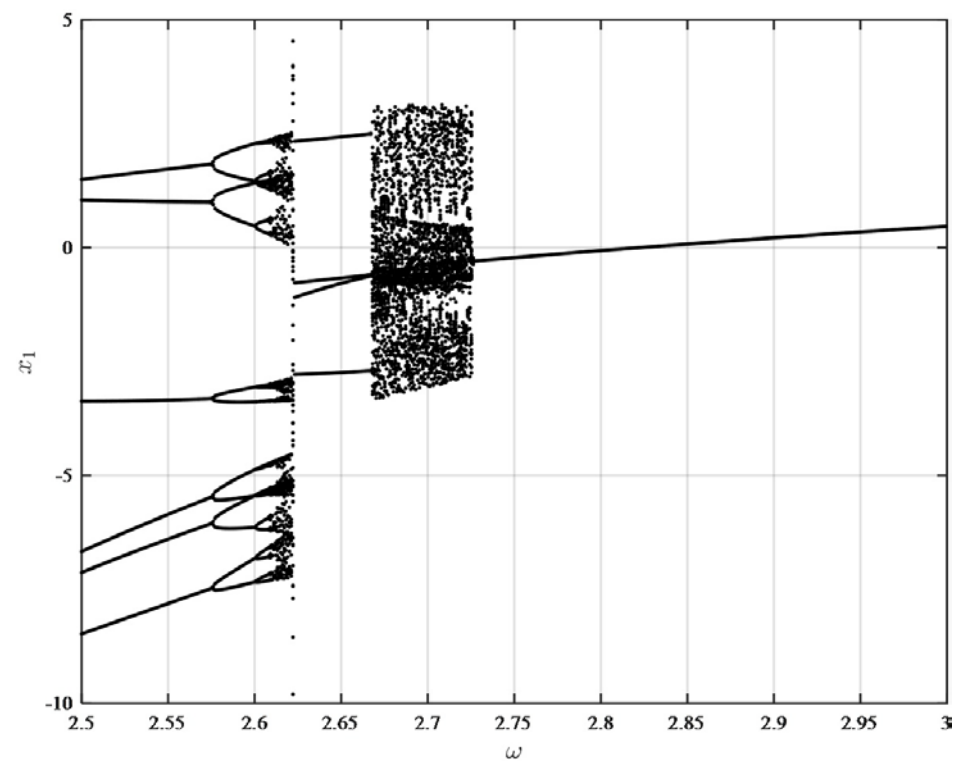


Figure 5. Partially enlarged view
图 5. 局部放大图

以系统激励频率 ω 为分岔参数, 夯板位移 x_1 随激励频率 ω 变化的分岔图如图 4 所示。图 4 展示了冲击夯板位移 x_1 随控制参数激振频率 ω 变化的分岔图。由图可知, 随着激振频率的连续变化, 系统展现出了极其丰富的动力学行为, 在低频区, 系统动力学行为复杂, 呈现为周期运动与混沌的交替带。系统在 $\omega=1.3$ 附近发生突变, 混沌吸引子突然失稳并塌陷, 系统进入一个相对狭窄的周期运动窗口。随 ω 增大, 如图 5 所示, 在高频区主要呈现周期运动、倍周期分岔级联、混沌以及概周期运动。图中多处出现的突然跳跃, 体现了系统中典型的突变和 Grazing 现象。

为了从拓扑动力学角度验证系统在变频激振下的非线性演化机制, 图 6 计算了系统在该激振频率范围内的 Lyapunov 指数谱。图中清晰展示了四个李雅普诺夫指数随频率 ω 变化的演化轨迹。最大李雅普诺夫指数(λ_1)的演变与分岔图中的动力学行为一致, 严格证明了系统在不同频段内发生的周期分岔与混沌演化。

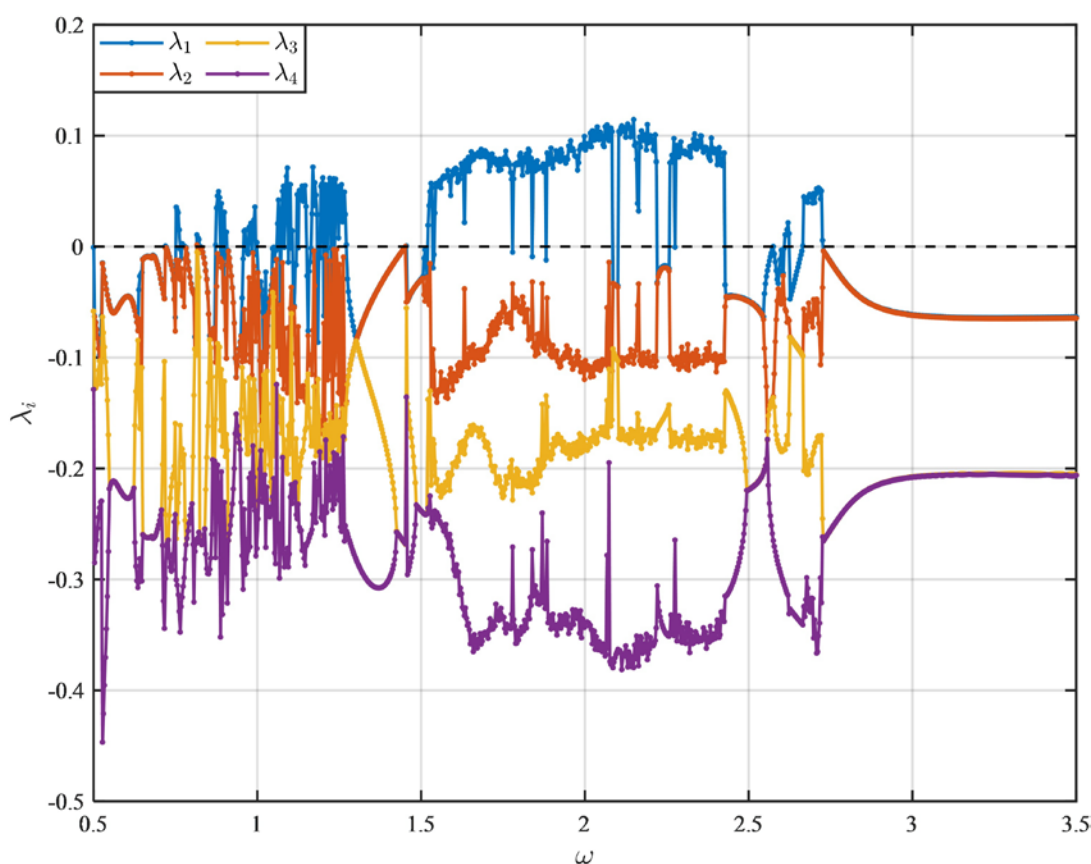


Figure 6. Lyapunov exponent spectrum

图 6. Lyapunov 指数谱图

4.2. 拟周期行为演化

图 7 展示了随激励频率 ω 减小, 系统在 Poincaré 映射下的概周期演化路径。在 $\omega=2.7154$ 时, 系统处于周期一运动, Poincaré 映射图如图 7(a) 展现为吸引不动点。随着 ω 减小, 系统发生了 Hopf 分岔现象, 从周期一运动转变为概周期运动, 对应的庞加莱映射图如图 7(b) 系统表现为一个稳定的极限环。随着 ω 继续减小, 概周期极限环震荡变形如图 7(c) 随后进入锁相如图 7(d)。这进一步验证了分岔图中的概周期运动域是可靠的。

图 8 揭示了系统处于概周期运动时的位移时间历程以及速度时间历程, 从图中可以看出, 系统在处于该运动状态时, 夯板时间历程曲线完全脱离了规则的单周期简谐运动形态, 速度剧烈波动。这种不规则振动会导致夯机作业时出现跳振失稳, 不仅无法保证压实质量的均匀性, 还会产生异常强烈的动载荷, 加速机械结构件的疲劳破坏。因此, 在冲击夯的实际工程设计与工作参数调控中, 应尽量避免此类复杂的非线性动力学响应频区。

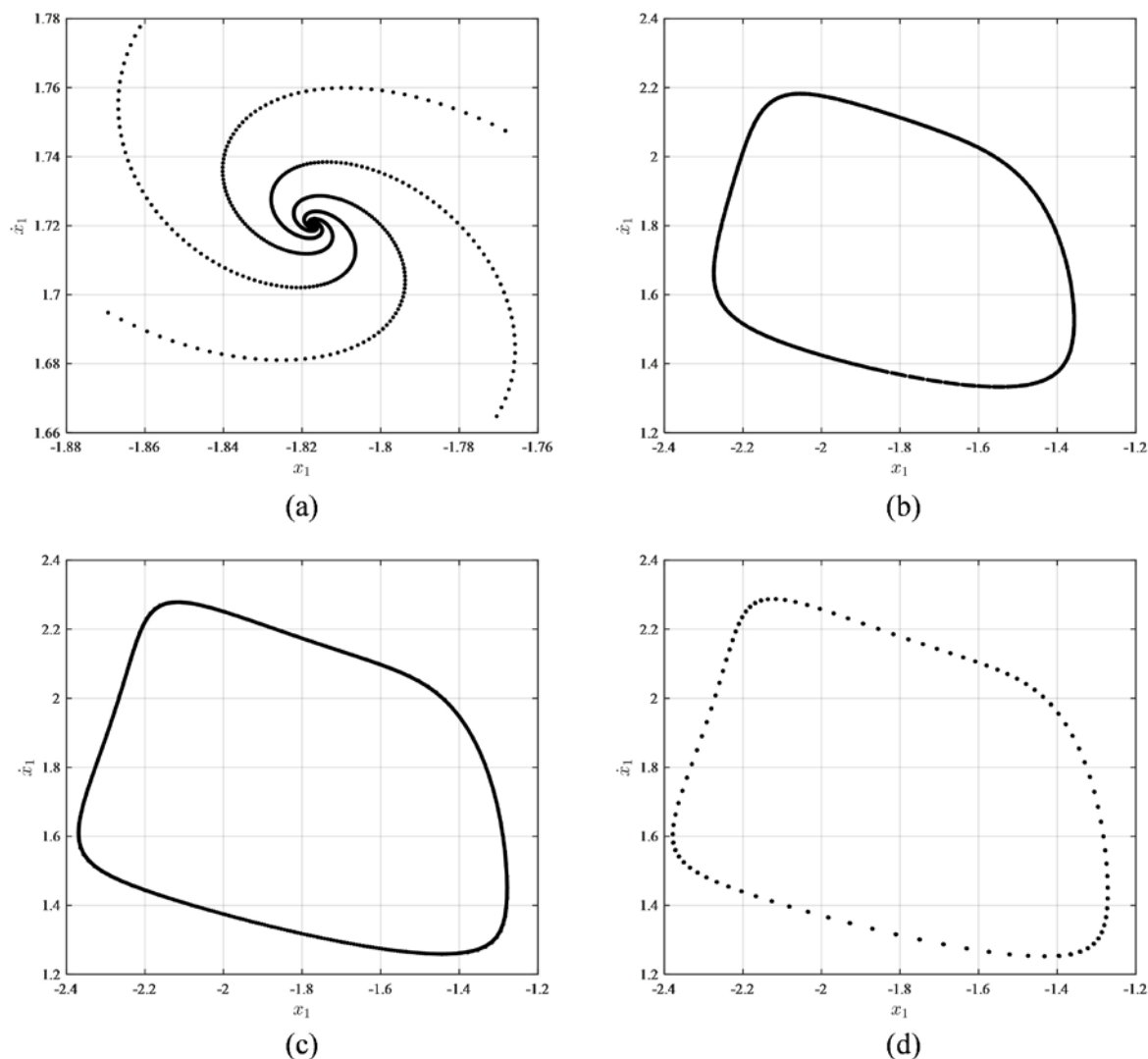


Figure 7. Evolution path of periodic Poincaré map: (a) Attract fixed points ($\omega = 2.7259$); (b). Attracting non moving circles ($\omega = 2.7154$); (c) Non moving coil oscillation deformation ($\omega = 2.7134$); (d) Phase-locked ($\omega = 2.7132$)

图 7. 概周期 Poincaré 映射图演化路径: (a) 吸引不动点 ($\omega = 2.7259$); (b) 吸引不动圈 ($\omega = 2.7154$); (c) 不动圈震荡变形 ($\omega = 2.7134$); (d) 锁相 ($\omega = 2.7132$)

4.3. 系统周期一行为响应分析

如图 9 所示, 选取 $\omega = 1.44$, 从 M_1 相图、Poincaré 映射图可以看出系统在此频率下冲击夯系统处于稳定的单周期运动, 此时冲击夯土壤夯实量 x_p 在 $x_1 = 2.134$ 附近, 图 9(d)和图 9(f)的系统频谱图显示基频在无量纲激励频率与系统固有频率频率比 $\omega/\omega_c = 1$ 处, 从频域角度证明了系统响应的周期一运动。

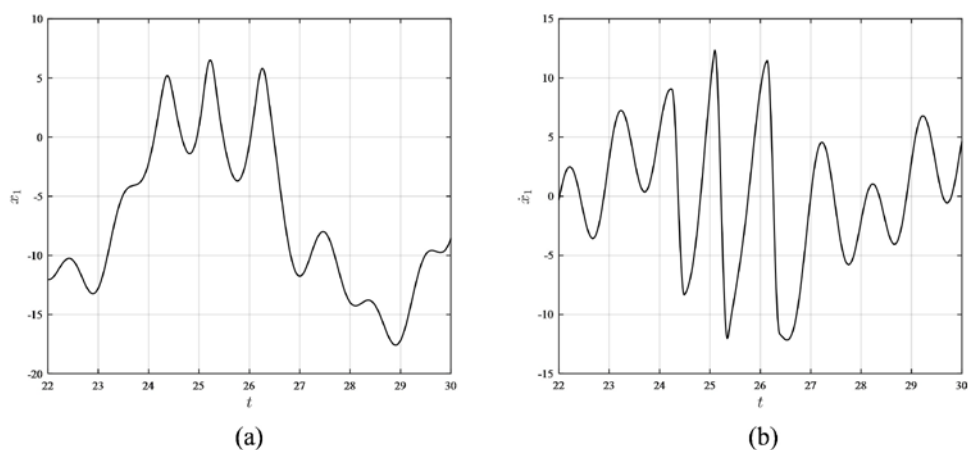


Figure 8. Time history diagram of approximate periodic motion: (a) x_1 time history chart ($\omega = 2.7154$); (b) $\dot{x}_1$ time history chart ($\omega = 2.7154$)

图 8. 概周期运动时间历程图: (a) x_1 时间历程图 ($\omega = 2.7154$); (b) $\dot{x}_1$ 时间历程图 ($\omega = 2.7154$)

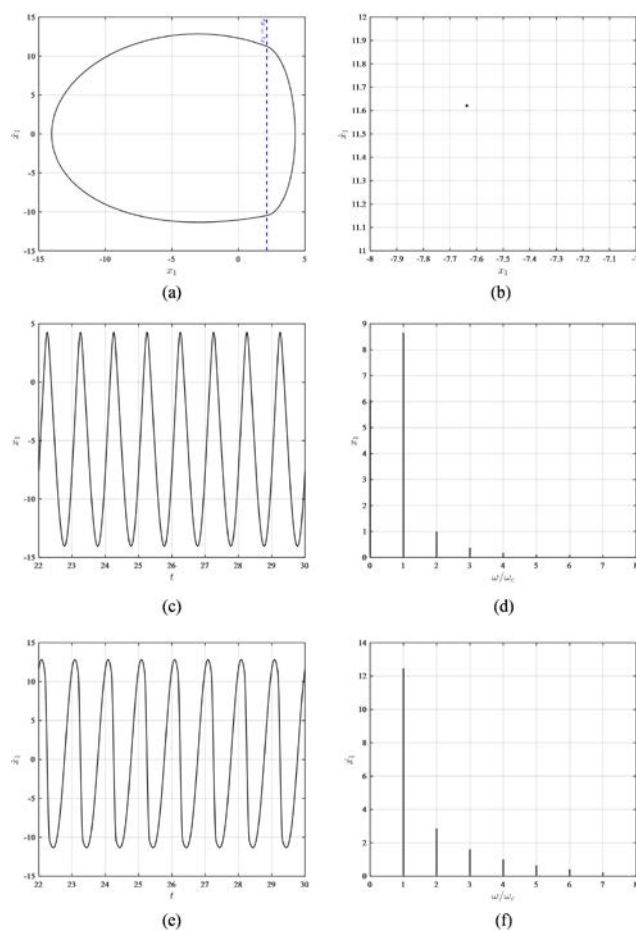


Figure 9. System response diagram ($\omega = 1.44$): (a) x_1 phase diagram; (b) x_1 Poincaré map; (c) x_1 time history chart; (d) x_1 spectrum diagram; (e) $\dot{x}_1$ time history chart; (f) $\dot{x}_1$ spectrum diagram

图 9. 系统响应图 ($\omega = 1.44$): (a) x_1 相图; (b) x_1 Poincaré 映射图; (c) x_1 时间历程图; (d) x_1 频谱图; (e) $\dot{x}_1$ 时间历程图; (f) $\dot{x}_1$ 频谱图

图 10 揭示了系统在高频区单周期域的运动特性, 在激励频率 $\omega = 2.8$ 时, 从相图、Poincaré 映射图可以看出系统处于稳定的周期一运动。但此时土壤夯实量 x_p 在 $x_1 = 1.443$ 附近, 与激励频率 $\omega = 1.44$ 时相比, 系统夯实量减少。说明此时冲击夯实效率没有在 $\omega = 1.44$ 时高。

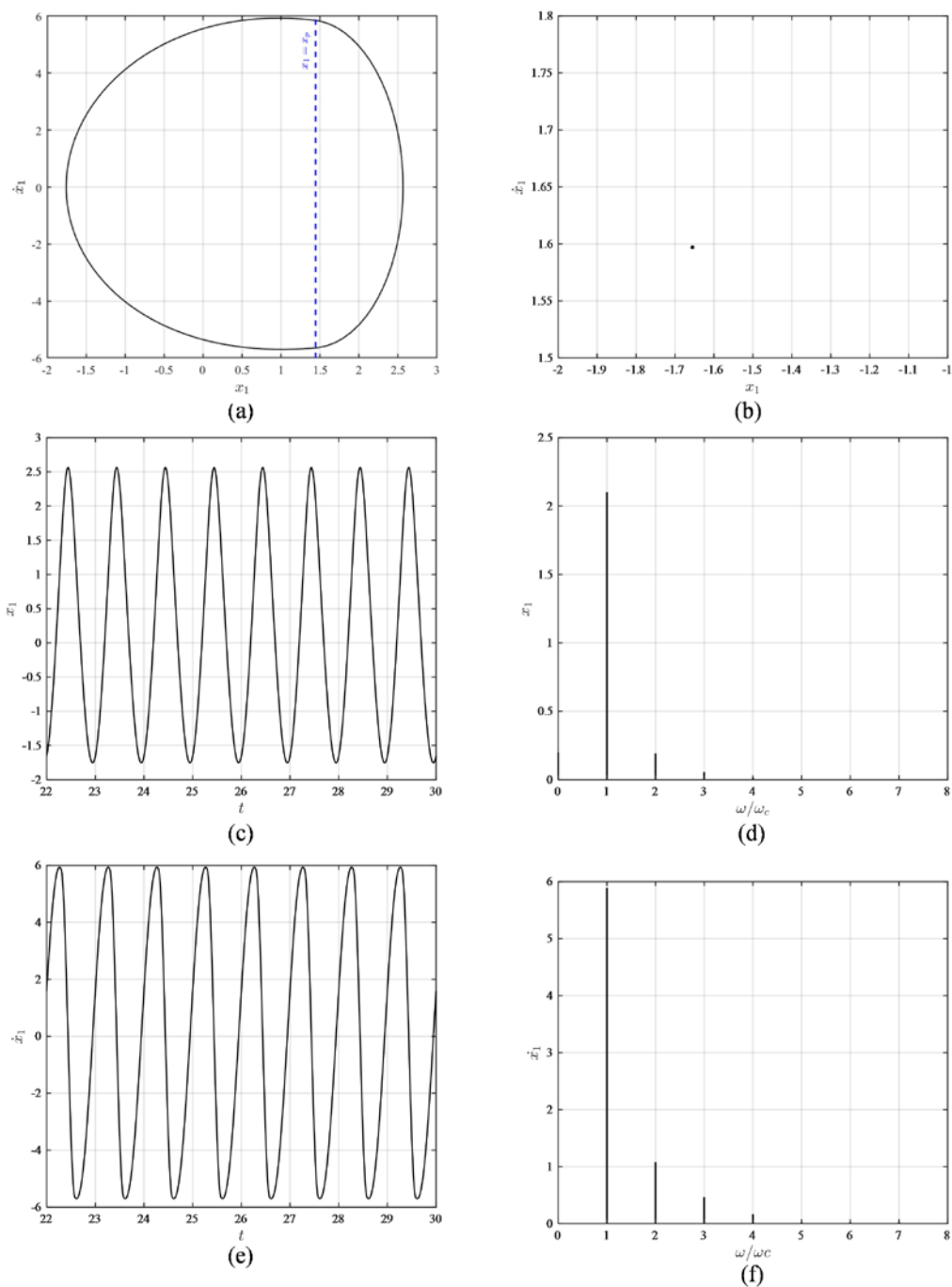


Figure 10. System response diagram ($\omega = 2.8$): (a) x_1 phase diagram; (b) x_1 Poincaré map; (c) x_1 time history chart; (d) x_1 spectrum diagram; (e) $\dot{x}_1$ time history chart; (f) $\dot{x}_1$ spectrum diagram

图 10. 系统响应图($\omega = 2.8$): (a) x_1 相图; (b) x_1 Poincaré 映射图; (c) x_1 时间历程图; (d) x_1 频谱图; (e) $\dot{x}_1$ 时间历程图; (f) $\dot{x}_1$ 频谱图

4.4. 冲击夯夯实量分析

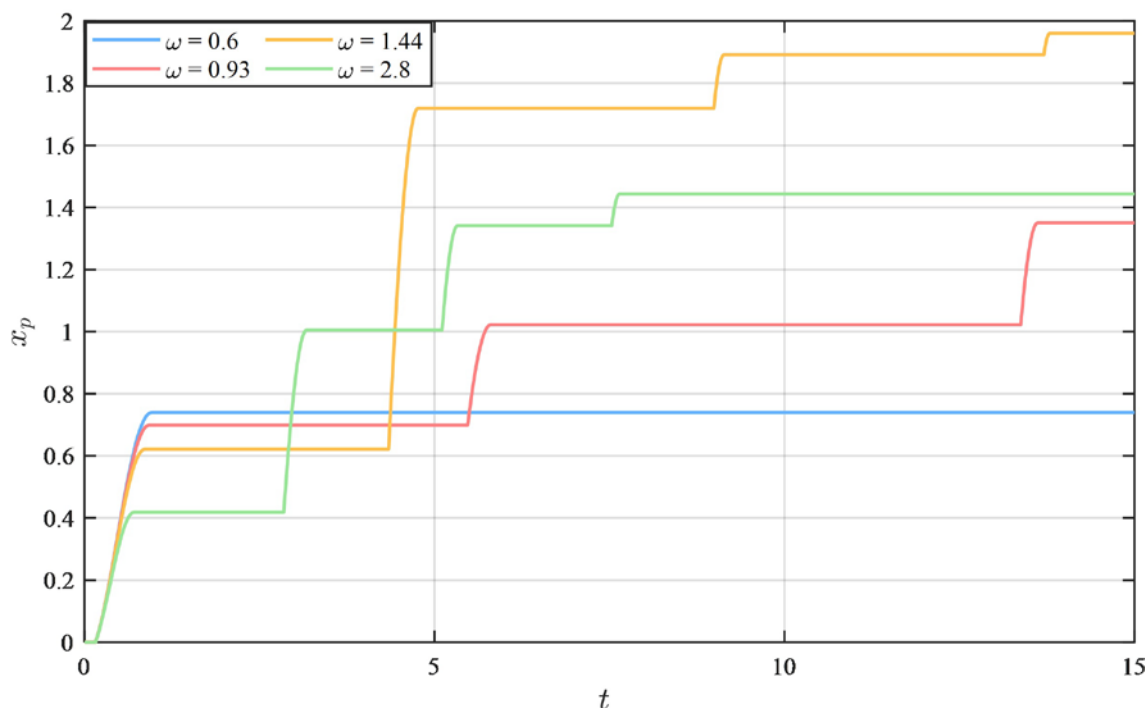


Figure 11. Comparison of cumulative compaction amount during compaction

图 11. 夯实累计夯实量对比图

振动冲击夯的稳态运动是系统的组成部分在振动的同时伴随有塑性变形, 因此, 塑性变形的大小对此类系统的有效工作非常重要。一个判断夯实效率的有效方法是计算有限时间内的累计塑性变形。图 11 给出了系统在四组不同参数 $\omega = 0.6, 0.93, 1.44, 2.8$ 下, 土壤的累计夯实量 x_p 在有限时间 t 内的累计演化。该图直观地反映了系统在周期一运动域内激励频率 ω 对最终压实效果的影响, 在低频区 $\omega = 0.6$, $\omega = 0.93$ 处系统夯实量变化缓慢, 且累积量较少。随激励频率 ω 增加, 在 $\omega = 1.44$ 处系统夯实量变化最快, 累计量也最多, 结合图 11 可知 $\omega = 1.44$ 处于系统的非线性主共振区即为冲击夯系统的最佳工作频段。随激励频率 ω 继续增加, 累计夯实量出现了减少的现象。这揭示了在周期一运动域内累计夯实量与外部激励之间的非线性关系。可知对于该振动冲击夯系统而言, 单纯在周期一运动域内提高工作频率并不能带来最佳的夯实效果。

5. 结论

本文针对振动冲击夯与土体相互作用的复杂力学过程, 建立了二自由度冲击夯 - 双线性滞回土体耦合动力学模型, 并对其非光滑动力学行为及夯实性能进行了深入研究, 主要得出以下结论:

(1) 成功构建了多阶段非光滑动力学解析模型。引入双线性滞回模型表征土体的非线性变形, 将冲击夯的运动精确划分为夯实加载、夯实卸载及跳起三个阶段。将分段方程进行模态解耦, 求得了各阶段位移与速度的通解, 为冲击夯的理论分析提供了可靠的数学模型。

(2) 揭示了随着激励力频率的递增, 系统经历了从微小局部失稳恢复单周期, 再经擦边分岔和边界碰撞分岔进入复杂周期带与混沌带交替的演化过程。

(3) 明确了最佳夯实状态对应的动力学特征。对系统周期一运动域的响应与累积塑性位移分析表明,

在低频 $\omega = 0.6, 0.9$ 下, 系统虽处于平稳的单周期运动, 但夯实效率极低。在 $\omega = 1.44$ 时, 系统处于超共振区, 此时冲击夯系统达到最佳工作频段。而进一步提升频率 $\omega = 2.8$ 反而会导致累积位移下降。该结论为工程设备的参数调控提供了直接的理论指导。本文当前效率评估方法尚具有一定的局限性, 如未考虑不同土体参数对系统的影响, 不同的土体参数对于振动冲击夯的稳定工作区间会有较大影响, 在后续研究中应进一步研究, 为冲击夯各种工作状况的调整提供更加全面的理论依据。

参考文献

- [1] 严世榕, 闻邦椿. 考虑塑性变形的振动压路机非线性动力学仿真[J]. 筑路机械与施工机械化, 1999(4): 13-16+55.
- [2] 高溥, 王娜. 振动平板夯周期运动的稳定性与分岔[J]. 振动与冲击, 2007(10): 132-136+193.
- [3] 陈柯, 段志善. 振动冲击夯动力学模型的完善和优化设计[J]. 建筑机械, 2012(3): 76-79+10.
- [4] Broman, G. and Jönsson, A. (2000) The Nonlinear Behavior of a Rammer Soil Compactor Machine. *ASCE 14th Engineering Mechanics Conference*, Austin, 21-24 May 2000, 33-46.
- [5] 徐慧东, 谢建华. 单自由度含间隙分段线性系统周期运动的倍化分岔[J]. 西南交通大学学报, 2008(2): 227-231.
- [6] 吕小红, 朱喜锋. 一类冲击钻进机械系统的动力学特性[J]. 振动与冲击, 2011, 30(6): 239-242.
- [7] 吕小红, 罗冠炜. 小型振动冲击式打桩机的非线性动力学分析[J]. 工程力学, 2013, 30(11): 227-232.
- [8] Chen, K., Duan, Z.S. and Fei, J.Q. (2012) Perfect Dynamic Model and Optimal Design of Vibration-Impact Rammer. *Advanced Materials Research*, **422**, 525-528. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.422.525>
- [9] 许宏飞, 李群宏, 宁敏, 等. 一类分段非线性映射的混沌边界分析[J]. 海南师范大学学报(自然科学出版), 2016, 29(4): 363-368+383.
- [10] 沈振宗, 乔佳斌, 郑艾心, 等. 振动压路机——土壤非线性与线性动力学模型对比[J]. 现代制造技术与装备, 2019(3): 104-106.
- [11] 张惠. 碰撞振动系统参数-状态空间全局动力学研究[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州交通大学, 2021.
- [12] 张锦涛. 分段光滑机械振动系统共存周期解的稳定性与分岔[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州交通大学, 2022.
- [13] 王超, 丁旺才, 李得洋, 等. 含间隙多约束碰撞振动系统稳定性分析[J]. 噪声与振动控制, 2022, 42(1): 14-19.
- [14] 文智华. 含间隙机械碰撞系统的动力学特性研究[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州交通大学, 2022.
- [15] 张瑞良. 分段线性系统的数学建模与动力学分析[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 石家庄铁道大学, 2024.
- [16] 张柏林, 李险峰, 张惠, 等. 一种非对称特性约束的碰撞振动系统的动力学分析[J]. 振动与冲击, 2024, 43(12): 72-79.
- [17] 魏冬梅, 吕小红, 王昕, 等. 塑性冲击振动系统的非光滑分岔[J]. 机械强度, 2024, 46(2): 264-271.
- [18] Gong, C., Fang, X. and Cheng, L. (2024) Multi-State Dynamics and Model Similarity of a Vibro-Impact Nonlinear System. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **163**, Article 104765. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104765>
- [19] 柳剑刚. 一类振动冲击钻进系统的非线性动力学研究[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州交通大学, 2020.
- [20] 商祥志. 振动压路机非线性特性响应及振动控制研究[D]: [硕士学位论文]. 石家庄: 石家庄铁道大学, 2023.
- [21] 中华人民共和国住房和城乡建设部. GB 50040-2020 动力机器基础设计标准[S]. 北京: 中国计划出版社, 2020.