E-Commerce Letters 电子商务评论, **2024, 13(3), 7660-7668**
Published Online August 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ecl
https://doi.org/10.12677/ecl.2024.133941

电子商务视角下集合优化问题的Levitin-Polyak良定性

谢林燕[1,2]

[1]贵州大学数学与统计学院，贵州 贵阳
[2]贵州省博弈决策与控制系统重点实验室，贵州 贵阳

收稿日期：2024年6月9日；录用日期：2024年7月4日；发布日期：2024年8月19日

摘 要

在许多经济模型中，决策者需要通过比较集值优化问题的目标函数来衡量支出以达到自身收益的最大。在电子商务视角下，本文讨论了有限理性下基于改进集的集合优化问题*E-u*-最小解集的Levitin-Polyak良定性和广义Levitin-Polyak良定性，并通过有限理性模型证明了该良定性的充分条件。此外，借助非线性分析的方法给出了集合优化问题(广义) Levitin-Polyak良定性的特征刻画。这些结果为电子商务在实际生活中的应用打下了夯实的理论基础。

关键词

电子商务，有限理性，集合优化问题，Levitin-Polyak良定性

Levitin-Polyak Well-Posedness of Set Optimization Problems from the Perspective of E-Commerce

Linyan Xie[1,2]

[1]School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou
[2]Guizhou Provincial Key Laboratory of Game, Decision and Control System, Guiyang Guizhou

Received: Jun. 9th, 2024; accepted: Jul. 4th, 2024; published: Aug. 19th, 2024

Abstract

In many economic models, decision-makers need to measure expenditures by comparing the ob-

文章引用: 谢林燕. 电子商务视角下集合优化问题的 Levitin-Polyak 良定性[J]. 电子商务评论, 2024, 13(3): 7660-7668.
DOI: 10.12677/ecl.2024.133941

jective functions of set-valued optimization problems in order to achieve maximum benefit. Under the perspective of E-commerce, this paper studies the Levitin-Polyak well-posedness and generalized Levitin-Polyak well-posedness of ***E*-*u***-minimal solution of set optimization problems under bounded rationality via improvement set. Furthermore, the sufficient condition of well-posedness is given by using a bounded rationality model. Besides, we obtain the characterization of (generalized) Levitin-Polyak well-posedness for the problem by utilizing nonlinear analysis method. These results have laid a solid theoretical foundation for the application of E-commerce in practical life.

Keywords

E-Commerce, Bounded Rationality, Set Optimization Problems, Levitin-Polyak Well-Posedness

1. 引言

随着互联网的逐渐普及和信息技术的持续发展，以互联网知识经济为核心的网络技术逐渐成为二十一世纪经济发展的主要动力，这也标志着全球经济的发展从此迈入了全新的电子商务时代[1]。电子商务是基于计算机技术和互联网技术，依托通信和互联网终端，为消费者提供的新型便利的交易或商务模式，这汇总模式节约了交易的中间环节，将不透明的商务操作变得清晰公开，大大缩减了交易花费的时间，使得交易双方的来往更高效便捷。电子商务的发展和崛起，是经济发展的必然结果，也是人们和企业的需求带来的产物，促进了整个社会的发展和进步，提高了人们的生活水平。

在电子商务的实际应用中，一些必要的数据往往是无法全部准确获得的，原因在于这些数据的多样性以及在测量或计算中产生的误差。由于不精确的数据对模型甚至计算结果有严重的影响，因此建立优化问题的模型时把不确定性纳入考虑的范围是非常有必要的。当不确定性在优化模型中被考虑时，目标函数值不止一个，有可能是多个值组成的集合，从而衍生出了集值优化问题。近年来，集值优化问题被广泛应用于经济学和金融学领域[2]。

众所周知，良定性是优化领域相关问题研究的一个重要课题，它被分为 Hadamard 良定性和 Tykhonov 良定性两种类型，其中 Levitin-Polyak 良定性针对的是渐近序列不一定在可行域内的优化问题。Levitin-Polyak 良定性的研究不仅在电子商务的理论方面有重要的意义，而且在实际应用中的作用也不容忽视，有时微小的扰动可能导致原问题的最优解发生很大的变化。在 1966 年，Tikhonov [3]首次在标量优化问题中引入良定性的概念。随后，Levitin 和 Polyak [4]提出了 Levitin-Polyak 良定性，它是 Tikhonov 良定性的一种拓展。之后，学者们将良定性相继推广到向量优化问题和集值优化问题中。集值优化问题由于解的两种不同定义准则：向量准则和集合准则，被分为两类问题。第一种准则是寻找目标集值映射的图像并集的最小解，其对应于集值向量优化问题；集合准则是以目标函数的每个像集作为对象，通过建立对象间的优劣比较关系(序关系)来定义最优解，其对应于集合优化问题。然而，向量准则并不适用于所有的集值优化问题，因此在过去的二十年里，集合优化问题成为了热点并引起了大量学者的关注。进而，Zhang 等[5]首次研究了集合优化问题的良定性，建立了基于下集序关系的集合优化问题三种良定性的充要条件，并利用标量化方法得到了这些问题的特征刻画。随后，Gutiérrez 等[6]在锥恰当假设条件下

推广了文献[5]的结果。

近年来，集合优化问题的 LP 良定性的研究也吸引了大量的学者。Khoshkhabar-Amiranloo 和 Khorram [7]引入了一类全局 LP 良定性和三类逐点 LP 良定性概念。Khoshkhabar-Amiranloo [8]介绍了[5]中良定性的拓展形式，并且利用 Berge 上半连续性和近似解的闭性，获得了广义 LP 良定性的相关性质。Vui 等[9]建立了集合优化问题 LP 良定性的充分必要条件，同时运用 Kuratowski 非紧测度的方法得到了该概念的特征刻画。Gupta 等[10]引入了集合优化问题 LP 良定性的概念，并根据 Hausdorff 上半连续性和近似解映射的紧性建立了该良定性的刻画。在 Berge 连续性假设下，Duy [11]获得了集合优化问题广义 LP 良定性的充分条件。不同于上述方法和模型，伍等[12]研究了集值向量优化问题弱极小解集的 LP 良定性和广义 LP 良定性，并通过有限理性模型得到了(广义) LP 良定性的充分条件。

值得关注的是，集序关系下的集合优化问题的 LP 良定性的研究越来越活跃，但是对于有限理性模型下的 LP 良定性的探索相对较少。因此，受上述文献的启发，在改进集诱导的上集序关系下，本文考虑了集合优化问题的 *E*-*u*-最小解集的 LP 良定性和广义 LP 良定性。本文所研究的结果以及方法是在电子商务视角下对集值优化问题 Levitin-Polyak 良定性的一种新的探索，不仅在优化理论方面扮演着重要的角色，而且在逼近算法的收敛性分析中也有不容忽视的作用，更进一步为电子商务的应用提供夯实的理论基础。

2. 预备知识

设 $\mathcal{Y}$ 是实线性赋范空间，$\mathcal{F}:\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 是一个集值映射。其中，$\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 为 $\mathcal{Y}$ 中所有非空子集的集合。$C\subseteq\mathcal{Y}$ 是闭凸尖锥且 $\operatorname{int}C\neq\varnothing$。记 $\left(\mathcal{F}(x)\right)^{\mathcal{Y}}$ 为 $\mathcal{F}(x)$ 在 $\mathcal{Y}$ 中的补集，即 $\left(\mathcal{F}(x)\right)^{\mathcal{Y}}=\left\{y\in\mathcal{Y}:y\notin\mathcal{F}(x)\right\}$。

定义 2.1 [13]令 $E\subseteq Y$ 是一个非空集合，称 E 相对于 C 是一个改进集当且仅当 $0\notin E$ 且 $E+C=E$。

令 $P_1,P_2\in\mathcal{P}(\mathcal{Y})$。2001 年，Kuroiwa [14]提出了上集序关系“$\leq_C^u$”的概念；在 2019 年，Mao 等[15]提出了由改进集诱导的上集序关系“$\leq_E^u$”的概念，其定义如下：

$$P_1\leq_C^u P_2\Leftrightarrow P_1\subseteq P_2-C\,;$$

$$P_1\leq_E^u P_2\Leftrightarrow P_1\subseteq P_2-E\,.$$

定义 2.2 [16]设 $Q\in\mathcal{Y}$ 的所有最大点的集合为：

$$MaxQ=\left\{q\in Q:(Q-q)\cap\left(C\setminus\{0\}\right)=\varnothing\right\}.$$

令 $\mathcal{F}:M\subseteq\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 是一个集值映射，其中 $M\neq\varnothing$。集合优化问题(*SOP*)的模型如下：

$$(SOP)\quad\begin{cases}\min\mathcal{F}(x)\\ \text{s.t. } x\in M.\end{cases}$$

定义 2.3 [14] (1) 若对于任意的 $y\in M$，$\mathcal{F}(y)\leq_C^u\mathcal{F}(x_0)\Rightarrow\mathcal{F}(x_0)\leq_C^u\mathcal{F}(y)$，则称 $x_0\in M$ 是(*SOP*)的 *C*-*u*-最小解，记所有(*SOP*)的 *C*-*u*-最小解的集合为 $C_u(M)$。

(2) 若对于任意的 $y\in M$，$\mathcal{F}(y)\leq_E^u\mathcal{F}(x_0)\Rightarrow\mathcal{F}(x_0)\leq_E^u\mathcal{F}(y)$，则称 $x_0\in M$ 是(*SOP*)的 *E*-*u*-最小解，记所有(*SOP*)的 *E*-*u*-最小解的集合为 $E_u(M)$。

引理 2.1 [15]对于任意的 $x_0\in M$，如果 $\mathcal{F}(x_0)$ 是紧集，那么称 x_0 是(*SOP*)的 *E*-*u*-最小解当且仅当不存在 $y\in M$ 使得 $\mathcal{F}(y)\leq_E^u\mathcal{F}(x_0)$。

引理 2.2 [16]若 $\mathcal{F}(x)\in\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 是一个紧集，那么 $Max\mathcal{F}(x)\neq\varnothing$，此外，$\mathcal{F}(x)\not\subset\mathcal{F}(x)-C\setminus\{0\}$。

引理 2.3 [17]令 $M\subseteq\mathcal{X}$ 是非空紧集，若 $\mathcal{F}$ 在 M 是下半连续的且是紧值的，那么 $C_u(M)\neq\varnothing$。

定义 2.4 [2]设 $\mathcal{T}:\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 是一个集值映射，令 $x_0\in\mathcal{X}$，称

(1) $\mathcal{T}$ 在 x_0 处是上半连续的，如果对于 $\mathcal{Y}$ 中满足 $\mathcal{T}(x_0)\subseteq W$ 的开集 W，存在 x_0 的邻域 $N(x_0)$，$\forall x_n\in N(x_0)$，使得 $\mathcal{T}(x_n)\subseteq W$ 成立。

(2) $\mathcal{T}$ 在 x_0 处是下半连续的，如果对于 $\mathcal{Y}$ 中满足 $\mathcal{T}(x_0)\cap W\neq\varnothing$ 的开集 W，存在 x_0 的邻域 $N(x_0)$，使得 $\mathcal{T}(x_n)\cap W\neq\varnothing$ 成立。

(3) $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 是上半连续或下半连续的，$\mathcal{T}$ 在 x 处是上半连续或下半连续的，$\forall x\in\mathcal{X}$；如果 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 既是上半连续的又是下半连续的，则称 $\mathcal{T}$ 在 $\mathcal{X}$ 是连续的。

考虑有限理性模型 $\mathcal{M}=\{\Gamma,\mathcal{X},g,\Psi\}$，其中 Γ 是博弈空间，每个 $\gamma\in\Gamma$ 表示一个博弈；$\mathcal{X}$ 是行为空间，任意的 $x\in\mathcal{X}$ 表示一个策略；集值映射 $g:\Gamma\to\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 是一个行为映射，$\forall\gamma\in\Gamma$，$g(\gamma)$ 表示博弈 γ 的可行策略；$\Psi:Graph(g)\to\mathbb{R}$ 是理性函数，其中 $Graph(g)=\{(\gamma,x)\in\Gamma\times\mathcal{X}:x\in g(\gamma)\}$。$\forall\gamma\in\Gamma$，$\forall\epsilon\geq 0$，定义 $E(\gamma,\epsilon)=\{x\in g(\gamma):\Psi(\gamma,x)\leq\epsilon\}$ 为博弈 γ 的 ϵ-平衡点集，$E(\gamma,0)=E(\gamma)=\{x\in g(\gamma):\Psi(\gamma,x)=0\}$ 为博弈 γ 的平衡点集。

定义 2.5 [18]设 Γ 和 $\mathcal{X}$ 是两个度量空间，$\gamma\in\Gamma$。

(1) 如果 $E(\gamma)=\{x\}$ (单点集)，$\forall x_n\in\mathcal{X}$，$|\Psi(\gamma,x_n)|\leq\epsilon_n$，其中 $\epsilon_n\to 0$，且 $\mathcal{X}$ 中的距离 $d(x_n,g(\gamma))\to 0$，必有 $x_n\to x$，则称博弈 γ 是 Levitin-Polyak 良定的，简记为 LP-wp。

(2) 如果 $\forall x_n\in\mathcal{X}$，$|\Psi(\gamma,x_n)|\leq\epsilon_n$，其中 $\epsilon_n\to 0$，且 $\mathcal{X}$ 中的距离 $d(x_n,g(\gamma))\to 0$，必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\to x\in E(\gamma)$，则称博弈 γ 是广义 Levitin-Polyak 良定的，简记为 GLP-wp。

引理 2.4 [19]设 $\mathcal{X}$ 是 Hausdorff 拓扑空间，$\mathcal{Y}$ 是度量空间，集值映射 $\mathcal{T}:\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 满足对任意的 $x\in\mathcal{X}$，$\mathcal{T}(x)$ 是紧的，则

(1) $\mathcal{T}$ 在 $x\in\mathcal{X}$ 是上半连续的当且仅当 $\forall\epsilon>0$，存在 x 的开邻域 $\mathcal{O}(x)$，$\forall x'\in\mathcal{O}(x)$，有 $\mathcal{T}(x')\subset\cup(\epsilon,\mathcal{T}(x))$。

(2) $\mathcal{T}$ 在 $x\in\mathcal{X}$ 是下半连续的当且仅当 $\forall\epsilon>0$，存在 x 的开邻域 $\mathcal{O}(x)$，$\forall x'\in\mathcal{O}(x)$，有 $\mathcal{T}(x)\subset\cup(\epsilon,\mathcal{T}(x'))$。

(3) $\mathcal{T}$ 在 $x\in\mathcal{X}$ 是连续的当且仅当 $\forall\epsilon>0$，存在 x 的开邻域 $\mathcal{O}(x)$，$\forall x'\in\mathcal{O}(x)$，有 $\mathcal{H}(\mathcal{T}(x'),\mathcal{T}(x))<\epsilon$，其中 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{Y}$ 中的 Hausdorff 距离。

引理 2.5 [19]设 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ 是两个 Hausdorff 拓扑空间，如果 $\mathcal{G}:\mathcal{Y}\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}$ 是下半连续的，$\mathcal{F}:\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 在 $x_0\in\mathcal{X}$ 是上半连续的，且 $\mathcal{F}(x_0)$ 是紧集，则 $D(x)=\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\mathcal{G}(y,x_0)$ 在 x_0 是下半连续的。

定义 2.6 [20]设 $\mathcal{X}$ 是完备度量空间，$G\subset\mathcal{X}$ 是有界集。集合 G 的直径表示为：$diam(G)=\sup\limits_{x,y\in G}d(x,y)$，$G$ 的非紧测度表示为

$$\mu(G)=\inf\left\{\sigma>0:\text{存在 }\mathcal{X}\text{ 的有限个集}\{G_n\},n=1,2,\cdots,N,\text{ 使得 }G\subset\bigcup_n G_n\text{ 且 }diam(G_n)\leq\sigma\right\}。$$

引理 2.6 [20]设 $G\subset\mathcal{X}$ 是有界集，$\mu(G)=0$ 当且仅当 $\bar{G}$ (G 的闭包)是紧集。

引理 2.7 [21]设 $(\mathcal{X},d)$ 是一个完备度量空间，$\{F_n\}$ 是 $\mathcal{X}$ 中的一列非空闭集，满足 $F_1\supset F_2\supset F_3\supset\cdots$，且直径 $diam(F_n)\to 0$，则 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\{x\}$ (单点集)，其中 $x\in\mathcal{X}$。

3. LP-wp 和 GLP-wp 的充分条件

设 $\mathcal{X}$ 是 Hausdorff 线性拓扑空间 E 中的非空紧集，$\mathcal{Y}$ 是紧赋范线性空间，令 $C\subseteq\mathcal{Y}$ 是一个闭凸尖锥且 $intC\neq\varnothing$。

$$\Gamma=\left\{\gamma=(\mathcal{F}):\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\mathcal{Y})\text{满足：}\begin{array}{c}\mathcal{F}\text{ 在 }\mathcal{X}\text{ 是连续的；}\\ \text{对任意的 }x\in\mathcal{X},\mathcal{F}(x)\text{都是非空紧集；}\\ \overline{x}\in\mathcal{X},\text{不存在 }y\in\mathcal{X}\text{ 使得 }\mathcal{F}(y)\leq_E^u\mathcal{F}(\overline{x})\end{array}\right\}.$$

$\forall\gamma_1=\mathcal{F}_1,\gamma_2=\mathcal{F}_2\in\Gamma$，定义距离：

$$\rho(\gamma_1,\gamma_2)=\sup_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{H}\left(\mathcal{F}_1(x),\mathcal{F}_2(x)\right),$$

其中 $\mathcal{H}$ 是 $\mathcal{Y}$ 上的 Hausdorff 距离。

引理 3.1 (Γ,ρ) 是一个完备度量空间。

证显然 (Γ,ρ) 是一个度量空间，故只需证明其是完备的。设 $\{\gamma_n=\mathcal{F}_n\}$ 是 Γ 中任意一个 Cauchy 序列，即：对任意的 $\epsilon>0$，存在正整数 $N(\epsilon)$，当 $m,n\geq N(\epsilon)$ 时，有 $\rho(\gamma_m,\gamma_n)=\sup_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{H}\left(\mathcal{F}_m(x),\mathcal{F}_n(x)\right)\leq\epsilon$。易知存在一个集值映射 $\mathcal{F}:\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\mathcal{Y})$ 使得 $\lim_{m\to\infty}\mathcal{F}_m(x)=\mathcal{F}(x)$，且当 $n\geq N(\epsilon)$ 时，有 $\sup_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{H}\left(\mathcal{F}(x),\mathcal{F}_n(x)\right)\leq\epsilon$。易证：$\mathcal{F}$ 是连续的，且对任意的 $x\in\mathcal{X}$，$\mathcal{F}(x)$ 都是非空紧集。由引理 2.3 可知集值映射 $\mathcal{F}$ 所对应的(*SOP*)的解集非空，假设 $\overline{x}$ 是 $\mathcal{F}$ 所对应的(*SOP*)的一个解。

下面证明集值映射 $\mathcal{F}$ 满足第三个条件，用反证法，假设存在 $y\in\mathcal{X}$，使得 $\mathcal{F}(y)\leq_E^u\mathcal{F}(\overline{x})$，即：$\mathcal{F}(y)\subset\mathcal{F}(\overline{x})-E$。由 $\overline{x}$ 是 $\mathcal{F}$ 所对应的(*SOP*)的一个解，有 $\mathcal{F}(\overline{x})\leq_E^u\mathcal{F}(y)$。因此得到

$$\mathcal{F}(\overline{x})\subseteq\mathcal{F}(y)-E\subseteq\mathcal{F}(\overline{x})-E-C\subseteq\mathcal{F}(\overline{x})-E. \tag{3.1}$$

由引理 2.2 可知 $Max\mathcal{F}(\overline{x})\neq\varnothing$，令 $\overline{y}\in Max\mathcal{F}(\overline{x})$，有

$$\left(\mathcal{F}(\overline{x})-\overline{y}\right)\cap C\setminus\{0\}=\varnothing. \tag{3.2}$$

由式(3.1)可知，存在 $y_0\in\mathcal{F}(\overline{x})$ 以及 $c\in C\setminus\{0\}$ 使得 $\overline{y}=y_0-c$，因此 $c=y_0-\overline{y}$，与(3.2)式矛盾。

综上所述，$\mathcal{F}:\mathcal{X}\to\mathcal{P}(\mathcal{Y})\in\Gamma$，即 (Γ,ρ) 是一个完备度量空间。证毕。

对每一个集值映射 $\gamma=\mathcal{F}\in\Gamma$，它都对应一个集合优化问题，定义其基于改进集的解集映射 $S:\Gamma\to\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 如下：

$$S(\gamma)=\left\{x\in\mathcal{X}:\forall\, y\in\mathcal{X},\mathcal{F}(y)\leq_E^u\mathcal{F}(x)\text{不成立}\right\},$$

由 Γ 的定义可知 $S(\gamma)\neq\varnothing$。

下面是对集合优化问题建立的有限理性模型 $\mathcal{M}=\{\Gamma,\mathcal{X},g,\Psi\}$。

$\forall\gamma\in\Gamma$，定义：$g(\gamma)=\mathcal{X}$，则 $g:\Gamma\to\mathcal{P}(\mathcal{X})$ 是连续的，且对任意的 $\gamma\in\Gamma$，$g(\gamma)$ 是非空紧集。$\forall\,\overline{x}\in g(\gamma)$，定义理性函数如下：

$$\Psi(\gamma,\overline{x})=\inf_{b\in\left(\mathcal{F}(\overline{x})-E\right)^{\mathcal{Y}}}\inf_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|.$$

引理 3.2 对任意的 $\gamma\in\Gamma$ 和 $\overline{x}\in g(\gamma)$，都有 $\Psi(\gamma,\overline{x})\geq0$；特别地，$\overline{x}\in S(\gamma)$ 当且仅当 $\Psi(\gamma,\overline{x})=0$。

证显然，对任意的 $\gamma\in\Gamma$ 和 $\overline{x}\in g(\gamma)$，$\Psi(\gamma,\overline{x})\geq0$ 都成立。

若 $\overline{x}\in S(\gamma)$，那么对所有的 $x\in\mathcal{X}$，$\mathcal{F}(x)\leq_E^u\mathcal{F}(\overline{x})$ 不成立，即 $\mathcal{F}(x)\not\subset\mathcal{F}(\overline{x})-E$，则 $\exists\,\overline{y}\in\mathcal{F}(x)$，$\overline{b}\in\left(\mathcal{F}(\overline{x})-E\right)^{\mathcal{Y}}$，使得 $\overline{y}=\overline{b}$，即 $\|\overline{b}-\overline{y}\|=0$。因此有：$0=\|\overline{b}-\overline{y}\|\geq\inf_{y\in\mathcal{F}(x)}\|\overline{b}-y\|\geq\inf_{b\in\left(\mathcal{F}(\overline{x})-E\right)^{\mathcal{Y}}}\inf_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|\geq0$，所以 $\inf_{b\in\left(\mathcal{F}(\overline{x})-E\right)^{\mathcal{Y}}}\inf_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|=0$，即 $\Psi(\gamma,\overline{x})=0$。

若 $\Psi(\gamma,\overline{x})=0$，即：$\inf_{b\in\left(\mathcal{F}(\overline{x})-E\right)^{\mathcal{Y}}}\inf_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|=0$。由下确界的定义：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\overline{b}\in\left(\mathcal{F}(\overline{x})-E\right)^{\mathcal{Y}}$，

使得 $\inf\limits_{b\in(\mathcal{F}(\bar{x})-E)^{\mathcal{Y}}}\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|>\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|\bar{b}-y\|-\varepsilon$，由 ε 的任意性可知 $\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|\bar{b}-y\|=0$。根据范数的连续性以及 $\mathcal{F}(x)$ 的紧性，必存在一个 $\bar{y}\in\mathcal{F}(x)$，使得 $\|\bar{b}-\bar{y}\|=0$，即 $\bar{y}=\bar{b}$。由 $\bar{b}\in(\mathcal{F}(\bar{x})-E)^{\mathcal{Y}}$ 可知 $\bar{y}\notin(\mathcal{F}(\bar{x})-E)$，故 $\mathcal{F}(x)\not\subset\mathcal{F}(\bar{x})-E$，即：$\forall x\in\mathcal{X}$，$\mathcal{F}(x)\le_E^u\mathcal{F}(\bar{x})$ 不成立，因此 $\bar{x}\in S(\gamma)$。证毕。

引理 3.3 $\Psi(\gamma,x)$ 在 (γ,x) 是下半连续的。

证要证 $\Psi(\gamma,x)$ 在 (γ,x) 是下半连续的，只需证 $\forall\epsilon>0$，$\forall\gamma_n=\mathcal{F}_n\in\Gamma$，$\gamma_n\to\gamma=\mathcal{F}$，$x_n\to x$，存在正整数 N，使得 $\forall n\ge N$，有 $\Psi(\gamma_n,x_n)>\Psi(\gamma,x)-\epsilon$，即

$$\inf_{b\in(\mathcal{F}_n(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}}\inf_{y\in\mathcal{F}_n(x_n)}\|b-y\|>\inf_{b\in(\mathcal{F}(x)-E)^{\mathcal{Y}}}\inf_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|-\epsilon .$$

由下确界的定义可知：存在 $\bar{b}\in(\mathcal{F}_n(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}$ 使得 $\inf\limits_{b\in(\mathcal{F}_n(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}}\inf\limits_{y\in\mathcal{F}_n(x_n)}\|b-y\|>\inf\limits_{y\in\mathcal{F}_n(x_n)}\|\bar{b}-y\|-\frac{\epsilon}{3}$。

由于 $\mathcal{F}_n(x_n)$ 是紧集，则存在 $\bar{y}\in\mathcal{F}_n(x_n)$，使 $\|\bar{b}-\bar{y}\|=\inf\limits_{y\in\mathcal{F}_n(x_n)}\|\bar{b}-y\|$ 成立。由 $\mathcal{H}(\mathcal{F}_n(x_n),\mathcal{F}(x_n))<\epsilon$ 可得 $\bar{y}\in\mathcal{F}(x_n)$，故有 $\|\bar{b}-\bar{y}\|\ge\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x_n)}\|\bar{b}-y\|$。由引理 2.5 可得 $\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x_n)}\|\bar{b}-y\|$ 是下半连续的，且 $x_n\to x$，则存在正整数 N，当 $n\ge N$ 时，有 $\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x_n)}\|\bar{b}-y\|>\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|\bar{b}-y\|-\frac{\epsilon}{3}$。

由于 $\bar{b}\in(\mathcal{F}_n(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}$ 以及 $\mathcal{H}(\mathcal{F}_n(x_n),\mathcal{F}(x_n))<\epsilon$ 可得 $\bar{b}\in(\mathcal{F}(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}$，故 $\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|\bar{b}-y\|\ge\inf\limits_{b\in(\mathcal{F}(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}}\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|$。根据下确界的定义可知：存在 $b_0\in(\mathcal{F}(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}$ 使得 $\inf\limits_{b\in(\mathcal{F}(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}}\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|>\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b_0-y\|-\frac{\epsilon}{3}$。再由 $\mathcal{F}$ 的连续性和引理 2.4 可得 $b_0\in(\mathcal{F}(x)-E)^{\mathcal{Y}}$，从而有 $\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b_0-y\|\ge\inf\limits_{b\in(\mathcal{F}(x)-E)^{\mathcal{Y}}}\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|$。

因此，得到 $\inf\limits_{b\in(\mathcal{F}_n(x_n)-E)^{\mathcal{Y}}}\inf\limits_{y\in\mathcal{F}_n(x)}\|b-y\|>\inf\limits_{b\in(\mathcal{F}(x)-E)^{\mathcal{Y}}}\inf\limits_{y\in\mathcal{F}(x)}\|b-y\|-\epsilon$，即：$\Psi(\gamma,x)$ 在 (γ,x) 是下半连续的。证毕。

定理 3.1 (1) $\forall\gamma\in\Gamma$，γ 是 GLP-wp 的；

(2) 如果 $E(\gamma)=\{x\}$ (单点集)，那么 γ 是 LP-wp 的。

证 (1) 对任意的 $x_n\in\mathcal{X}$，若 $|\Psi(\gamma,x_n)|\le\epsilon_n$，其中 $\epsilon_n\to0$，且 $\mathcal{X}$ 中的距离 $d(x_n,g(\gamma))\to0$，则存在 $x_n'\in g(\gamma)$，使得 $d(x_n,x_n')\to0$。因为 $g(\gamma)$ 是紧集，所以必存在 $\{x_n'\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}'\}$，使 $x_{n_k}'\to x\in g(\gamma)$。由 $d(x_{n_k},x)\le d(x_{n_k},x_{n_k}')+d(x_{n_k}',x)\to0$ 可得 $x_{n_k}\to x\in g(\gamma)$。再根据 $\Psi(\gamma,x)\ge0$ 以及 Ψ 在 x 是下半连续的可得：

$$0\le\Psi(\gamma,x)\le\varliminf_{n_k\to\infty}\Psi(\gamma,x_{n_k})\le\varliminf_{n_k\to\infty}\epsilon_{n_k}=0 .$$

从而 $\Psi(\gamma,x)=0, x\in S(\gamma)$，因此问题 γ 必是 GLP-wp 的。

(2) 反证法，如果 $\{x_n\}$ 不收敛于 x，则存在 x 的开邻域 $\mathcal{O}(x)$ 及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $x_{n_k}\notin\mathcal{O}$。因 $E(\gamma)=\{x\}$ (单点集)，由(1)可推出存在 $\{x_{n_k}\}$ 的子序列收敛于 x，这与 $\mathcal{O}(x)$ 是开集且 $x_{n_k}\notin\mathcal{O}$ 矛盾。故 γ 是 LP-wp 的。证毕。

4. GLP-wp 和 LP-wp 的特征刻画

本节给出集合优化问题 γ 是 GLP-wp 和 LP-wp 的特征刻画。

给定有限理性模型 $\mathcal{M}=\{\Gamma,\mathcal{X},g,\Psi\}$，其中 Γ 是度量空间，$\mathcal{X}$ 是完备度量空间，$g:\Gamma\to\mathcal{P}(\mathcal{X})$，$\Psi:\Gamma\times\mathcal{X}\to\mathbb{R}$，且对任意的 $\gamma\in\Gamma$ 和 $x\in g(\gamma)$，满足 $\Psi(\gamma,x)$ 在 x 是下半连续的且 $\Psi(\gamma,x)\geq 0$。

$\forall\epsilon>0$，记

$$L(\gamma,\epsilon)=\left\{x\in X: d\left(x,g(\gamma)\right)\leq\epsilon,\left|\Psi(\gamma,x)\right|\leq\epsilon\right\}.$$

定理 4.1 (1) 若问题 γ 是 GLP-wp 的，则当 $\epsilon\to 0$ 时，非紧测度 $\mu\left(L(\gamma,\epsilon)\right)\to 0$；

(2) 若 $g(\gamma)$ 是非空闭集且当 $\epsilon\to 0$ 时，非紧测度 $\mu\left(L(\gamma,\epsilon)\right)\to 0$，则问题 γ 是 GLP-wp 的。

证 (1) 对 $\mathcal{X}$ 中任意序列 $\{x_n\}\subset E(\gamma)$，则 $x_n\in L(\gamma,\epsilon_n)$，其中 $\epsilon_n\to 0$。因问题 γ 是 GLP-wp 的，必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\left\{x_{n_k}\right\}$，使得 $x_{n_k}\to x\in E(\gamma)$，因此 $E(\gamma)$ 必是紧集。$\forall\sigma>0$，存在 $E(\gamma)$ 的开覆盖 G_σ，其中 G_σ 由有限个直径小于或等于 σ 的开集组成。接下来证明当 $\epsilon>0$ 充分小时，必有 $\mu\left(L(\gamma,\epsilon)\right)\leq\sigma$，从而必有 $\mu\left(L(\gamma,\epsilon)\right)\to 0\,(\epsilon\to 0)$。

用反证法，如果以上结论不成立，那么存在 $\epsilon_n>0$，$\epsilon_n\to 0$ 及序列 $\{x_n\}$，$x_n\in L(\gamma,\epsilon_n)$，而 $x_n\notin G_\sigma$。因问题 γ 是 GLP-wp 的，必存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\left\{x_{n_k}\right\}$，使得 $x_{n_k}\to x\in E(\gamma)\subset G_\sigma\left\{x_{n_k}\right\}$，这与 G_σ 是开集而 $x_{n_k}\notin G_\sigma$ 矛盾。

(2) 对任意的 $x_n\in L(\gamma,\epsilon_n), n=1,2,3,\cdots$，其中 $\epsilon_n\to 0$，不妨设 $\epsilon_{n+1}\leq\epsilon_n$，故 $L(\gamma,\epsilon_n)\supset L(\gamma,\epsilon_{n+1})$。记 $G_n=\{x_i: i\geq n\}$，则 $G_n\subset L(\gamma,\epsilon_n)$。由 $\mu(G_1)=\mu(G_n)$（因为它们只相差有限个点），$n=2,3,4,\cdots$，$\mu(G_n)\leq\mu\left(L(\gamma,\epsilon_n)\right)$ 以及 $\mu\left(L(\gamma,\epsilon_n)\right)\to 0$ 可得 $\mu(G_1)=0$。又根据 $\mathcal{X}$ 完备和引理 2.6 可知 $\overline{G_1}$ 是紧集。由于 $\{x_n\}\subset\overline{G_1}$，则 $\{x_n\}$ 必有收敛子序列 $\left\{x_{n_k}\right\}$，使 $x_{n_k}\to x$ 成立。因 $\left\{x_{n_k}\right\}\subseteq L\left(\gamma,\epsilon_{n_k}\right)$，故 $d\left(x_{n_k},g(\gamma)\right)\leq\epsilon_{n_k}$，令 $n_k\to\infty$ 可得 $x\in g(\gamma)$。

下证 $x\in E(\gamma)$。用反证法，如果 $x\notin E(\gamma)$，则 $\Psi(\gamma,x)>0$。因 $E(\gamma)\neq\varnothing$，则存在 $x_0\in E(\gamma)$，进而有 $\Psi(\gamma,x_0)=0<\Psi(\gamma,x)$。根据 Ψ 在 x 是下半连续的，从而有

$$0=\Psi(\gamma,x_0)<\varliminf_{n_k\to\infty}\Psi\left(\gamma,x_{n_k}\right)\leq\varliminf_{n_k\to\infty}\epsilon_{n_k}=0,$$

矛盾。因此，$x\in E(\gamma)$，问题 γ 必是 GLP-wp 的。证毕。

定理 4.2 (1) 如果问题 γ 是 LP-wp 的，那么当 $\epsilon\to 0$ 时，直径 $diam\left(L(\gamma,\epsilon)\right)\to 0$；

(2) 若 $g(\gamma)$ 是非空闭集且当 $\epsilon\to 0$ 时，直径 $diam\left(L(\gamma,\epsilon)\right)\to 0$，则问题 γ 是 LP-wp 的。

证 (1) 用反证法，若结论不成立，则存在 $\sigma>0$ 及序列 $\{\epsilon_n\}$，使得 $diam\left(L(\gamma,\epsilon_n)\right)\geq\sigma$，其中 $\epsilon_n>0$ 且 $\epsilon_n\to 0$。于是存在两个序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$，使 $a_n,b_n\in L(\gamma,\epsilon_n)$ 且满足 $d(a_n,b_n)>\dfrac{\sigma}{2}$。因问题 γ 是 LP-wp 的，则 $E(\gamma)=\{x\}$（单点集），且 $a_n\to x, b_n\to x$，故 $d(a_n,b_n)\to 0$，这与 $d(a_n,b_n)>\dfrac{\sigma}{2}$ 矛盾。

(2) 首先证明 $L(\gamma,\epsilon)$ 是闭集。对任意的 $y_n\in L(\gamma,\epsilon)$ 及 $\epsilon>0$，假设 $y_n\to y$，则 $y_n\in g(\gamma)$。由于 $g(\gamma)$ 是闭集，则 $y\in g(\gamma)$。再根据 $\left|\Psi(\gamma,y_n)\right|\leq\epsilon$ 及 Ψ 在 y 是下半连续的可得 $\left|\Psi(\gamma,y)\right|\leq\epsilon$，即 $y\in L(\gamma,\epsilon)$。因此 $L(\gamma,\epsilon)$ 是闭集。

$\forall x_n\in L(\gamma,\epsilon_n), n=1,2,3,\cdots$，其中 $\epsilon_n>0$ 且 $\epsilon_n\to 0$。不妨设 $\epsilon_{n+1}\leq\epsilon_n$，故 $L(\gamma,\epsilon_n)\supset L(\gamma,\epsilon_{n+1})$，从而有 $\overline{L(\gamma,\epsilon_n)}\supset\overline{L(\gamma,\epsilon_{n+1})}, n=1,2,3,\cdots$。因 $\mathcal{X}$ 是完备度量空间，故有 $\overline{L(\gamma,\epsilon_1)}\supset\overline{L(\gamma,\epsilon_2)}\supset\overline{L(\gamma,\epsilon_3)}\supset\cdots$，且当 $n\to\infty$ 时，直径 $diam\left(\overline{L(\gamma,\epsilon_n)}\right)\to 0$，由引理 2.7，存在唯一的 $x\in\mathcal{X}$，使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{L(\gamma,\epsilon_n)}=\{x\}$。从而有

$x_n \in \overline{L(\gamma,\epsilon_n)}$ 及 $x_n \to x$。又 $x_n \in L(\gamma,\epsilon_n)$，故 $d(x_n,g(\gamma)) \le \epsilon_n$，令 $n \to \infty$ 可得 $d(x,g(\gamma)) = 0$。再根据 $g(\gamma)$ 是非空闭集可知 $x \in g(\gamma)$。

下证 $x \in E(\gamma)$。用反证法，如果 $x \notin E(\gamma)$，则 $\Psi(\gamma,x) > 0$。因 $E(\gamma) \ne \varnothing$，则存在 $x_0 \in E(\gamma)$，进而有 $\Psi(\gamma,x_0) = 0 < \Psi(\gamma,x)$。根据 Ψ 在 x 是下半连续的，从而有

$$0 = \Psi(\gamma,x_0) < \varliminf_{n\to\infty} \Psi(\gamma,x_n) = 0,$$

矛盾。因此， $x \in E(\gamma)$，问题 γ 必是 LP-wp 的。证毕。

注 4.1：由定理 4.1 和定理 4.2，通过构造具有抽象理性函数的有限理性模型，得到集合优化问题的 GLP-wp 和 LP-wp 的特征刻画，本质上是得到了该问题 GLP-wp 和 LP-wp 的充分必要条件。这为电子商务机制设计提供了一定的理论支撑。

5. 结论

本文在理论意义上，考虑了电子商务视角下集合优化问题的 LP 良定性。在有限理性模型下，通过构建完备的集合优化问题度量空间以及适当的理性函数得到了该问题的 *E*-*u*-最小解集 LP 良定性和广义 LP 良定性的充分条件，并从非紧测度和距离两个不同的角度分别对该优化问题的广义 LP 良定性和 LP 良定性进行特征刻画。通过研究集合优化问题解序列的 LP 良定性，为电子商务背景下的许多应用模型(如物流运输问题，企业经营管理问题，市场营销问题等)考虑了最优策略的稳定性以及抗扰动性，提高了资源的整体利用率，对促进我国电商平台等众多领域的发展具有重要的作用。

参考文献

[1] 聂林海. “互联网+”时代的电子商务[J]. 中国流通经济, 2015(6): 53-57.

[2] Aubin, J.P. and Ekeland, I. (1984) Applied Nonlinear Analysis. Wiley.

[3] Tikhonov, A.N. (1966) On the Stability of the Functional Optimization Problem. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **6**, 28-33. https://doi.org/10.1016/0041-5553(66)90003-6

[4] Levitin, E. and Polyak, B. (1966) Convergence of Minimizing Sequences in Conditional Extremum Problems. *Soviet Mathematics—Doklady*, **7**, 764-767.

[5] Zhang, W.Y., Li, S.J. and Teo, K.L. (2009) Well-Posedness for Set Optimization Problems. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **71**, 3769-3778. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.02.036

[6] Gutiérrez, C., Miglierina, E., Molho, E. and Novo, V. (2012) Pointwise Well-Posedness in Set Optimization with Cone Proper Sets. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **75**, 1822-1833. https://doi.org/10.1016/j.na.2011.09.028

[7] Khoshkhabar-Amiranloo, S. and Khorram, E. (2016) Scalarization of Levitin-Polyak Well-Posed Set Optimization Problems. *Optimization*, **66**, 113-127. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1253086

[8] Khoshkhabar-Amiranloo, S. (2018) Characterizations of Generalized Levitin-Polyak Well-Posed Set Optimization Problems. *Optimization Letters*, **13**, 147-161. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1258-6

[9] Vui, P.T., Anh, L.Q. and Wangkeeree, R. (2018) Levitin-Polyak Well-Posedness for Set Optimization Problems Involving Set Order Relations. *Positivity*, **23**, 599-616. https://doi.org/10.1007/s11117-018-0627-9

[10] Gupta, M. and Srivastava, M. (2020) Approximate Solutions and Levitin-Polyak Well-Posedness for Set Optimization Using Weak Efficiency. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **186**, 191-208. https://doi.org/10.1007/s10957-020-01683-0

[11] Duy, T.Q. (2021) Levitin-Polyak Well-Posedness in Set Optimization Concerning Pareto Efficiency. *Positivity*, **25**, 1923-1942. https://doi.org/10.1007/s11117-021-00851-4

[12] 伍玉涛, 贾文生. 有限理性下集值优化问题的 Levitin-Polyak 良定性[J/OL]. 系统科学与数学, 2024: 1-9. https://link.cnki.net/urlid/11.2019.O1.20240228.1254.009, 2024-02-29.

[13] Chicco, M., Mignanego, F., Pusillo, L. and Tijs, S. (2011) Vector Optimization Problems via Improvement Sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **150**, 516-529. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9851-1

[14] Kuroiwa, D. (2001) On Set-Valued Optimization. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **47**, 1395-1400. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(01)00274-7

[15] Mao, J., Wang, S. and Han, Y. (2019) The Stability of the Solution Sets for Set Optimization Problems via Improvement Sets. *Optimization*, **68**, 2171-2193. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1579813

[16] Luc, D.T. (1989) Theory of Vector Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Wiley.

[17] Alonso, M. and Rodríguez-Marín, L. (2005) Set-Relations and Optimality Conditions in Set-Valued Maps. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **63**, 1167-1179. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.06.002

[18] 俞建. 关于良定问题[J]. 应用数学学报, 2011, 34(6): 1007-1022.

[19] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[20] Kuratowski, C. (1930) Sur les espaces complets. *Fundamenta Mathematicae*, **15**, 301-309. https://doi.org/10.4064/fm-15-1-301-309

[21] 俞建. 有限理性与博弈论中平衡点集的稳定性[M]. 北京: 科学出版社, 2017.