

具有模糊支付的混合更新演化博弈动态分析

鄢迪, 丘小玲*

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2024年8月21日; 录用日期: 2024年9月14日; 发布日期: 2024年11月6日

摘要

文章利用模糊数来表征演化博弈中的不确定性, 建立了具有模糊支付的混合更新随机演化博弈动力学系统。首先, 利用模糊数的运算分析了模糊支付下的混合更新演化博弈过程, 推导了基于混合更新规则下的模糊固定概率。其次, 分析了成为模糊演化稳定策略的存在性条件, 并得到弱选择下博弈支付以梯形模糊数、正态模糊数表示时的模糊固定概率。最后, 利用具有模糊支付的混合更新演化博弈模型研究了矿工行为选择策略的博弈问题, 并通过数值仿真分析了参数对模糊固定概率的影响, 验证了理论结果。

关键词

模糊数, 演化博弈, 模糊固定概率, 混合更新规则

Evolutionary Game Dynamics Analysis of Hybrid Updated Process with Fuzzy Payoffs

Di Yan, Xiaoling Qiu*

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Aug. 21st, 2024; accepted: Sep. 14th, 2024; published: Nov. 6th, 2024

Abstract

In this paper, the uncertainty in evolutionary game is characterized by fuzzy numbers, and a hybrid updated stochastic evolutionary game dynamic system with fuzzy payoffs is established. Firstly, the process of hybrid update evolutionary game under fuzzy payoffs is analyzed by fuzzy number operation, and the fuzzy fixed probability based on hybrid update rule is derived. Secondly, the existence condition of the fuzzy evolutionarily stable strategy is analyzed, and the fuzzy fixed probability is obtained when the game payoffs are represented by trapezoidal fuzzy number and normal fuzzy number under weak selection. Finally, the game problem of miners' behavior selection strategy is studied by using hybrid updated evolutionary game model with fuzzy payoffs, and the influence of

*通讯作者。

parameters on fuzzy fixed probability is analyzed by numerical simulation, and the theoretical results are verified.

Keywords

Fuzzy Numbers, Evolutionary Game, Fuzzy Fixed Probability, Hybrid Update Rule

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在实际中由于受到环境的不确定性、人类思维及个体心理等因素的影响, 博弈参与者的策略集以及参与者的收益往往不能确定或者只能大致估计。此时, 博弈参与者所获得的收益不能再用一个精确的数值来表示, 而需要用一个模糊数[1]来表示。如果参与博弈的生物个体所获得的支付矩阵中不是确定的数值, 而是一个模糊数, 则称这样的博弈为模糊博弈[2]。在博弈问题中, 客观环境的复杂多变以及人类思维的不确定性, 导致决策信息的不确定性。

目前, 大部分关于模糊博弈的研究多数集中于利用模糊数学的理论分析模糊零和博弈[3]、模糊合作博弈[4]或者研究无限种群的模糊演化博弈动态[5], 而采用模糊数学对有限种群随机演化博弈动态的研究却不多。因此, 可以利用模糊数学的相关理论分析有限种群的演化博弈动态。标准 Moran 和模仿过程是描述有限种群中进化动态的两种最流行的更新规则。Taylor 等人[6]和 Nowak 等人[7]对标准 Moran 过程进行了研究。在 Moran 过程中, 参与者按照其适合度的比例被选择, 繁殖, 随机选择的参与者随后被其后代取代。模仿过程是由 Szabó 和 Töke [8]引入的。在模仿过程中, 参与者关注其他个体的收益, 以收益的高低来评估他们是否应该模仿另一个参与者的策略。如果他们自己的回报较小, 他们更有可能成功地模仿策略。

Liu 等[9]在分组人群中将这两种过程合并为混合过程。Zhang 等[10]将种群分为快慢两类, 研究了相互作用个体更新过程的时间尺度不同时的种群动态。Wang 等[11]将 Moran 过程和模仿过程结合起来, 建立新的动态模型, 求解注视概率和注视时间。Gu 等[12]在模糊环境下研究基于 Moran 过程的随机演化博弈动态。在本研究中, 我们基于模糊数通过结合 Moran 过程和模仿过程, 在有限的、混合良好的群体中建立了具有 A (合作) 和 B (背叛) 两种策略的混合随机演化博弈动力学, 其中每个个体基于概率为 γ ($0 \leq \gamma \leq 1$) 的模仿过程和概率为 $1-\gamma$ 的 Moran 过程更新策略。

本文结构如下: 第 2 节, 给出了模糊数的相关理论以及不同模糊数的排序规则。第 3 节, 建立了基于模糊支付下的混合演化博弈模型——Moran 和模仿更新, 并分析了模糊环境下的转移概率与选择强度和种群数量之间的关系。第 4 节, 求解出弱选择下不同模糊数的模糊固定概率, 并分析出模糊固定概率的自然选择性质。第 5 节, 将基于模糊支付下的混合演化博弈模型应用到煤矿生产过程中矿工生产行为策略的选择问题上。最后是本文的总结。

2. 模糊集理论

模糊集和模糊数

定义 1 [13] 若对论域 X 上的任意一个元素 $x \in X$, 都有闭区间 $[0,1]$ 上的一个数 $\mu_A(x) \in [0,1]$ 与之相对应, 即 $A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}$, 则 A 为一个模糊集, 其中 $\mu_A(x)$ 称为 A 的隶属函数。

定义 2 [2] 若 A 具有下列形式的隶属函数 μ_A

$$\mu_A = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则 A 是一个梯形模糊数, 记作 $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 。

定义 3 [2] 若 A 具有下列形式的隶属函数 μ_A

$$\mu_A = \begin{cases} \frac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1, & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \frac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

且 $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$, 则 A 是一个梯形模糊数, 记作 $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 。

设梯形模糊数 $A=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ 和 $B=(b_1, b_2, b_3, b_4)$, 则有下列运算成立[2]:

- (1) $A+B=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3, a_4+b_4)$;
- (2) $A-B=(a_1-b_4, a_2-b_3, a_3-b_2, a_4-b_1)$;
- (3) $A \times B=(a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, a_4 b_4)$;
- (4) $\lambda A=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4), \lambda > 0$;
 $\lambda A=(\lambda a_4, \lambda a_3, \lambda a_2, \lambda a_1), \lambda < 0$;

$$\frac{1}{A} = \left(\frac{1}{a_4}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_1} \right), a_1, a_2, a_3, a_4 \neq 0。$$

定义 4 [12] 若 \tilde{A} 具有下列形式的隶属函数 $\mu_{\tilde{A}}$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{\sigma_a^2} \right\}, x \in X, a \in R, \sigma_a > 0,$$

且 $a, \sigma_a \in R$, 则称模糊数 \tilde{A} 为正态模糊数, 记为 $\tilde{A}=(a, \sigma_a^2)$ 。

设正态模糊数 $\tilde{A}=(a, \sigma_a^2)$ 和 $\tilde{B}=(b, \sigma_b^2)$, 则有下列运算成立[12]

- (1) $\tilde{A} \pm \tilde{B}=(a \pm b, \sigma_a^2 + \sigma_b^2)$,
- (2) $\lambda \tilde{A}=(\lambda a, \lambda^2 \sigma_a^2)$,
- (3) $\frac{1}{\tilde{A}} = \left\{ \frac{1}{a}, \frac{1}{\sigma_a^2} \right\}$,
- (4) $\tilde{A} \otimes \tilde{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{B}(y) dy = \sqrt{\pi} \sigma_a \cdot \sqrt{\pi} \sigma_b = \pi \sigma_a \sigma_b$, 其中 $a \neq 0$ 和 $\sigma_a \neq 0$ 。

特别地, 当 $\tilde{A} = \tilde{B}$ 时, 有 $\tilde{A} \otimes \tilde{A} = \|\tilde{A}\|^2 = \pi \sigma_a^2$ 。

3. 具有模糊支付的混合演化博弈动力学——Moran 和模仿过程模型

我们假设一个单一的、混合良好的且恒定规模为 N 的群体, 并考虑两种策略, 我们称为 A 策略(合作)

和 B 策略(背叛)。博弈的收益可以写成下面的矩阵:

$$\begin{matrix} & A & B \\ A & \tilde{A} & \tilde{B} \\ B & \tilde{C} & \tilde{D} \end{matrix} \tag{1}$$

其中字符 $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ 和 \tilde{D} 都是模糊数。

混合良好的种群允许所有个体之间进行交流, 从而产生平均收益, 在随机配对下, 排除自交互作用, A 、 B 策略参与者的预期收益为

$$\begin{aligned}
 \pi_A &= \frac{\tilde{A}(i-1) + \tilde{B}(N-i)}{N-1}, \\
 \pi_B &= \frac{i\tilde{C} + \tilde{D}(N-i-1)}{N-1},
 \end{aligned}$$

其中 i 为采取策略 A 的个体数量。

从遗传的角度看, 个体繁殖率都正比于与之相对应的博弈支付, 故引入选择强度 $\omega (\omega \in [0, 1])$ [14]。选择策略 A 和 B 的个体适应度 \tilde{f}_A 和 \tilde{f}_B 定义为期望支付的指数函数

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_A &= e^{\omega \pi_A} \\
 \tilde{f}_B &= e^{\omega \pi_B}
 \end{aligned}$$

其中, 当 ω 很小时 ($0 < \omega \ll 1$), 博弈支付对适应度的影响不大, 则为弱选择[15]的情况。

由于个体所处环境和自身知识的复杂性, 我们不再假设个体依靠单一更新规则来更新他们的策略, 而是使用两个更新规则[11] (Moran 过程和模仿过程) 来更改策略, 如图 1 所示。为了方便起见, 我们将混合更新演化博弈过程中由 i 到 $i+1$ 和 i 到 $i-1$ 的转移概率记为 $p_{i,i\pm 1}$, 则过程中保持状态 i 不变的概率为 $p_{i,i} = 1 - p_{i,i+1} - p_{i,i-1}$ 。

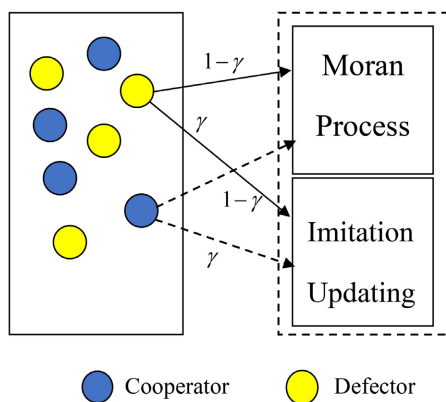


Figure 1. Hybrid update rule
图 1. 混合更新规则

平均收益 π_A 与 π_B 之差定义如下:

$$\pi_A - \pi_B = \frac{(\tilde{B} - \tilde{D})N - (\tilde{A} - \tilde{D}) - i(\tilde{C} - \tilde{D} - \tilde{A} + \tilde{B})}{N-1} = ui + v,$$

其中 $u = \frac{\tilde{A} - \tilde{B} - \tilde{C} + \tilde{D}}{N-1}$, $v = \frac{(\tilde{B} - \tilde{D})N + \tilde{D} - \tilde{A}}{N-1}$ 。我们可以得到该混合更新随机演化博弈的模糊转移概率:

$$\begin{aligned}
 p_{i,i+1} &= (1-\gamma) \frac{N-i}{N} \frac{ie^{\frac{\omega(a_k(i-1)+b_k(N-i))}{N-1}}}{ie^{\frac{\omega(a_k(i-1)+b_k(N-i))}{N-1}} + (N-i)e^{\frac{\omega(c_k i+d_k(N-i-1))}{N-1}}} + \gamma \frac{N-i}{N} \frac{i}{N} \frac{1}{1+e^{-\omega(ui+v)}}, \\
 p_{i,i-1} &= (1-\gamma) \frac{i}{N} \frac{(N-i)e^{\frac{\omega(c_k i+d_k(N-i-1))}{N-1}}}{ie^{\frac{\omega(a_k(i-1)+b_k(N-i))}{N-1}} + (N-i)e^{\frac{\omega(c_k i+d_k(N-i-1))}{N-1}}} + \gamma \frac{N-i}{N} \frac{i}{N} \frac{1}{1+e^{\omega(ui+v)}}, \\
 p_{i,i} &= 1 - p_{i,i+1} - p_{i,i-1},
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

其中 $u = \frac{a_k - b_k - c_k + d_k}{N-1}$, $v = \frac{(b_k - d_k)N + d_k - a_k}{N-1}$, $k = 1, 2, 3, 4$ 。

在无变异的情况下, 任何由策略 A 和 B 个体构成的混合种群最终达到全 A 或全 B 的状态, 因而可以计算模糊支付下结合 Moran 和模仿过程中策略的固定概率。

例 1: 以表 1 中模糊囚徒困境博弈为例给出 $\gamma = 0.5$ 、 $\gamma = 0.8$ 时混合更新演化博弈模型中策略 A 的转移概率 $p_{i,i+1}$ 和 $p_{i,i-1}$ 。假设种群规模为 $N = 100$, 选择强度 $\omega = 0.005$, 那么有如下:

Table 1. Game payoff matrix under trapezoidal fuzzy number

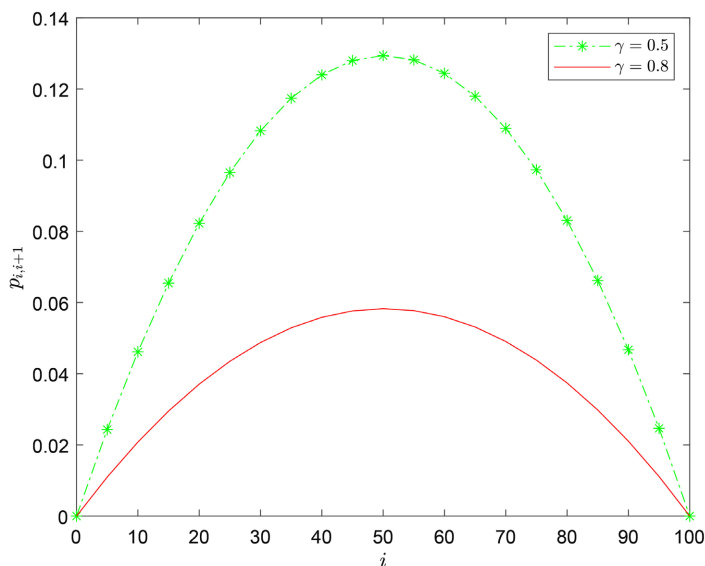
表 1. 梯形模糊数下的博弈收益矩阵

	A	B
A	(3, 5, 8, 9)	(2, 3, 5, 8)
B	(5, 8, 10, 15)	(2, 6, 9, 14)

其对应的模糊数的质心 (\bar{x}, \bar{y}) :

	\tilde{A}	\tilde{B}	\tilde{C}	\tilde{D}
\bar{x}	6.2222	4.5833	9.6111	7.8000
\bar{y}	0.5067	0.4815	0.4912	0.4946

因此我们可以得到 $\gamma = 0.5$ 和 $\gamma = 0.8$ 时, 策略 A 的模糊转移概率 $p_{i,i+1}$ 和 $p_{i,i-1}$ 随着选择策略 A 的数量 i 变化的曲线图, 如图 2 所示。



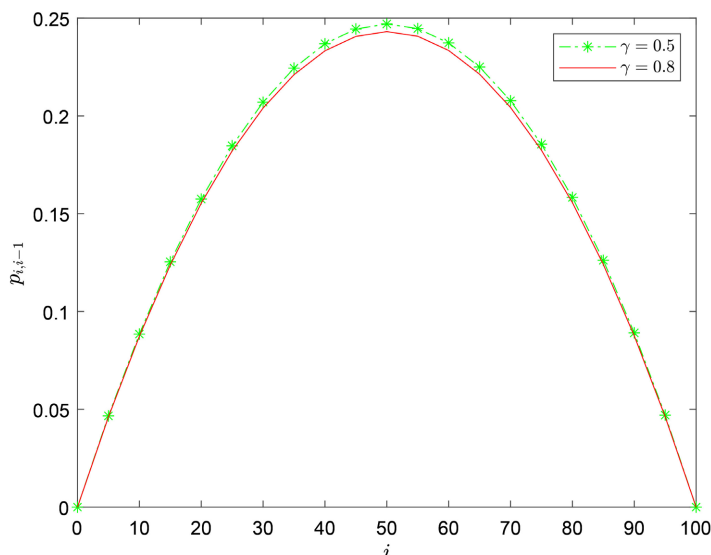


Figure 2. The relationship between $p_{i,i+1}$, $p_{i,i-1}$ and γ and i , respectively

图 2. $p_{i,i+1}$ 、 $p_{i,i-1}$ 与 γ 和 i 之间的关系

4. 模糊固定概率

定义 4 (FFP) [2] [16] 在规模为 N 的有限种群中, 个体间博弈的收益矩阵为(1)。策略 A 的模糊固定概率(FFP)是初始种群中有一个个体采用策略 A , 进化后最终所有个体均采用策略 A 的概率, 记为 ρ_A , 策略 B 的模糊固定概率记为 ρ_B 。

在有限的总体中, 采用吸收策略 A 的概率是从状态 i 开始后以状态 N 结束的概率, 这里我们用 ϕ_i 表示这个概率。由于该系统有两个吸收态, 从 i 开始后以状态 0 结束的概率为 $1 - \phi_i$ 。文献[11]的研究中将其定义为

$$\phi_i = \phi_{iN} = \frac{1 + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{m=1}^j \frac{p_{m,m-1}}{p_{m,m+1}}}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{m=1}^j \frac{p_{m,m-1}}{p_{m,m+1}}}$$

对于只有单个选择 A 策略的个体在整个群体中, 且该个体接管整个群体的概率记为固定概率 ϕ_1 :

$$\phi_1 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{N-1} \prod_{m=1}^j \frac{p_{m,m-1}}{p_{m,m+1}}} \tag{3}$$

显然有 $\rho_A = \phi_1$, $\rho_B = 1 - \phi_{N-1}$ 。

4.1. 中性选择

中性选择即 $\omega = 0$ 或对于任意状态 i 有 $\pi_A = \pi_B$ 的特殊情况, 是策略演化成功的自然基准情况。由式(2)定义的转移概率, 得到中性选择下的转移概率为

$$\begin{aligned} p_{i,i+1} &= \frac{i(N-i)}{N^2} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right) \\ p_{i,i-1} &= \frac{i(N-i)}{N^2} \left(1 - \frac{\gamma}{2}\right), \\ p_{i,i} &= 1 - p_{i,i+1} - p_{i,i-1} \end{aligned}$$

因此当 $\omega = 0$ 时, 有 $p_{i,i+1} = p_{i,i-1}$, 根据公式(3)可以得到中性选择下策略 A 的模糊固定概率为 $\phi_A = \frac{1}{N}$, 以此作为比较的标准。

4.2. 弱选择

在弱选择条件下(即当 $\omega \rightarrow 0$ 时), 将转移概率之比的泰勒展开式扩展到 ω 的一阶得:

$$\frac{p_{i,i-1}}{p_{i,i+1}} = \frac{(1-\gamma) \frac{i}{N} \frac{(N-i)e^{\omega\pi_B}}{ie^{\omega\pi_A} + (N-i)e^{\omega\pi_B}} + \gamma \frac{N-i}{N} \frac{i}{N} \frac{1}{1+e^{\omega(\pi_A-\pi_B)}}}{(1-\gamma) \frac{N-i}{N} \frac{ie^{\omega\pi_A}}{ie^{\omega\pi_A} + (N-i)e^{\omega\pi_B}} + \gamma \frac{N-i}{N} \frac{i}{N} \frac{1}{1+e^{-\omega(\pi_A-\pi_B)}}} \approx 1 - \omega(ui + v).$$

虽然描述混合更新过程的这些转移概率不同于 Moran 过程和模仿过程, 但它们在弱选择 ($\omega \ll 1$) 下, 有 $\frac{p_{i,i-1}}{p_{i,i+1}} \approx 1 - \omega(ui + v)$ 。因此, 指数适应度映射混合过程的固定概率不受参数 γ 的影响。对于很小的 ω , 混合更新演化过程中的固定概率为

$$\phi \approx \frac{1}{N} + \omega \frac{N-1}{N} \frac{(N+1)u + 3v}{6}.$$

定理 1 在规模为 N 的有限种群中, 个体采取策略 A 和 B , 个体间博弈的收益矩阵为(1), 则弱选择下基于模糊支付的混合更新随机演化博弈模型中策略 A 的模糊固定概率为

$$\phi \approx \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} (\alpha N + \beta) \right),$$

其中 $\alpha = \tilde{A} - \tilde{B} - \tilde{C} + \tilde{D} + 3\tilde{B} - 3\tilde{D}$, $\beta = \tilde{A} - \tilde{B} - \tilde{C} + 4\tilde{D} - 3\tilde{A}$ 。

4.3. 固定概率的自然选择性质

分析模糊支付下混合更新随机演化博弈模型——Moran 和模仿更新中选择有利于策略固定的条件及成为模糊演化稳定策略的条件。

定义 6 (FESS) [17] ① 选择抵制 A 入侵 B , 即 $\tilde{f}_A < \tilde{f}_B$; ② 选择抵制 A 取代 B , 即 $\phi_A < 1/N$ 。同时满足①和②成立, 则称策略 B 为模糊演化稳定策略(FESS)。

定理 2 对有限种群中模糊支付下的混合更新随机演化博弈模型——Moran 和模仿过程的策略, 如果以下两个条件成立, 则策略 B 是 FESS:

$$(\rightarrow) \tilde{B}(N-1) < \tilde{C} + \tilde{D}(N-2),$$

$$(\Leftarrow) (\tilde{A} - \tilde{B} - \tilde{C} + \tilde{D} + 3\tilde{B} - 3\tilde{D})N < -\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C} - 4\tilde{D} + 3\tilde{A}.$$

证明 首先, 选择抵制 A 入侵 B , 也就是单个 A 策略的个体在种群中适应度较低, 即当 $i=1$ 时, 有 $\tilde{f}_A < \tilde{f}_B$, 由此可以得到

$$e^{\omega\pi_A} < e^{\omega\pi_B} \Rightarrow \pi_A < \pi_B \Rightarrow \frac{\tilde{A}(i-1) + \tilde{B}(N-i)}{N-1} < \frac{i\tilde{C} + \tilde{D}(N-i-1)}{N-1},$$

当 $i=1$ 时, 有 $\tilde{B}(N-1) < \tilde{C} + \tilde{D}(N-2)$, 即得到条件(一)。

其次, 选择抵制 A 取代 B , 则由定理 1 得

$$\phi_A < \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} (\alpha N + \beta) \right) < \frac{1}{N} \Rightarrow \frac{\omega}{6} (\alpha N + \beta) < 0 \Rightarrow \alpha N + \beta < 0,$$

代入 α 和 β 可以得到

$$\alpha N + \beta < 0 \Rightarrow (\tilde{A} - \tilde{B} - \tilde{C} + \tilde{D} + 3\tilde{B} - 3\tilde{D})N < -\tilde{A} + \tilde{B} + \tilde{C} - 4\tilde{D} + 3\tilde{A}.$$

定理 3 在规模为 N 的有限种群中, 个体间博弈的收益矩阵为梯形模糊数时, 即

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1, a_2, a_3, a_4) & (b_1, b_2, b_3, b_4) \\ (c_1, c_2, c_3, c_4) & (d_1, d_2, d_3, d_4) \end{bmatrix},$$

由定理 1 可得策略 A 的模糊固定概率为

$$\rho_A = \left(\frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} z_1 \right), \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} z_2 \right), \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} z_3 \right), \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} z_4 \right) \right),$$

其中

$$\begin{aligned} z_1 &= (a_1 - b_4 - c_4 + d_1 + 2b_1 - 3d_4)N + a_1 - b_4 - c_4 + 4d_1 - 3a_4 \\ z_2 &= (a_2 - b_3 - c_3 + d_2 + 2b_2 - 3d_3)N + a_2 - b_3 - c_3 + 4d_2 - 3a_3 \\ z_3 &= (a_3 - b_2 - c_2 + d_3 + 2b_3 - 3d_2)N + a_3 - b_2 - c_2 + 4d_3 - 3a_2 \\ z_4 &= (a_4 - b_1 - c_1 + d_4 + 2b_4 - 3d_1)N + a_4 - b_1 - c_1 + 4d_4 - 3a_1 \end{aligned}$$

定理 4 在规模为 N 的有限种群中, 个体间博弈的收益矩阵为三角模糊数时, 即

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a_1, a_2, a_3) & (b_1, b_2, b_3) \\ (c_1, c_2, c_3) & (d_1, d_2, d_3) \end{bmatrix},$$

由定理 1 可得策略 A 的模糊固定概率为

$$\rho_A = \left(\frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} z_1 \right), \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} z_2 \right), \frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} z_3 \right) \right),$$

其中

$$\begin{aligned} z_1 &= (a_1 - b_3 - c_3 + d_1 + 3b_1 - 3d_3)N + a_1 - b_3 - c_3 + 4d_1 - 3a_3 \\ z_2 &= (a_2 - b_2 - c_2 + d_2 + 3b_2 - 3d_2)N + a_2 - b_2 - c_2 + 4d_2 - 3a_2 \\ z_3 &= (a_3 - b_1 - c_1 + d_3 + 3b_3 - 3d_1)N + a_3 - b_1 - c_1 + 4d_3 - 3a_1 \end{aligned}$$

定理 5 在规模为 N 的有限种群中, 个体间博弈的收益矩阵为正态模糊数时, 即

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a, \sigma_a^2) & (b, \sigma_b^2) \\ (c, \sigma_c^2) & (d, \sigma_d^2) \end{bmatrix},$$

由定理 1 可得策略 A 的模糊固定概率为

$$\rho_A = \left(\frac{1}{N} \left(1 + \frac{\omega}{6} (\alpha N + \beta) \right), \frac{\omega^2}{36N^2} (N^2 \sigma_a^2 + \sigma_\beta^2) \right),$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha &= a + 2b - c - 2d, \beta = -2a - b - c + 4d, \\ \sigma_\alpha^2 &= \sigma_a^2 + 10\sigma_b^2 + \sigma_c^2 + 10\sigma_d^2, \sigma_\beta^2 = 10\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 + 16\sigma_d^2. \end{aligned}$$

5. 应用

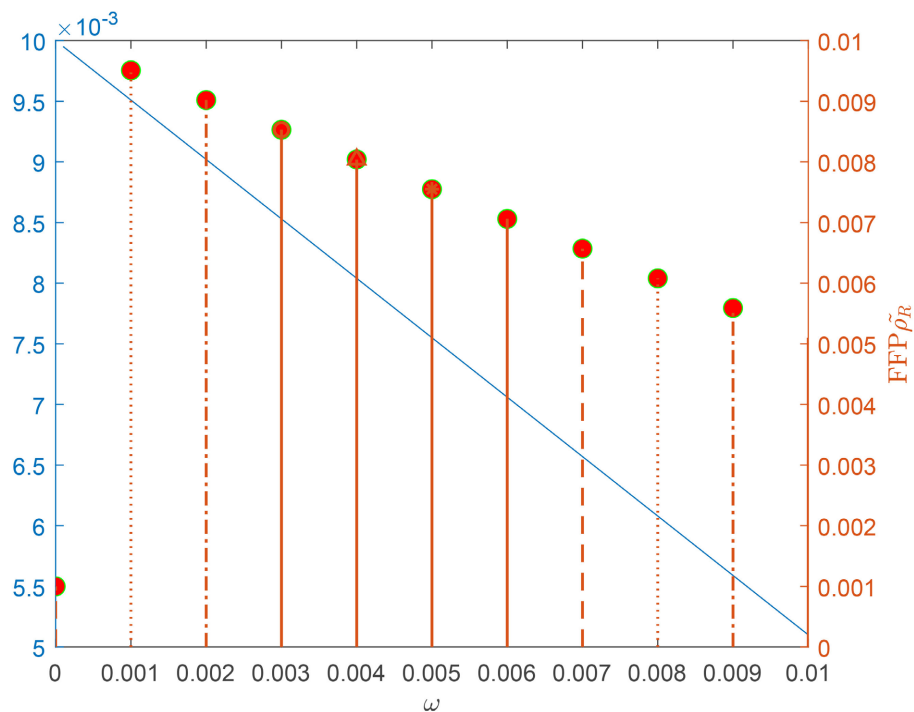
矿工的效用函数[18]不仅取决于采取不同生产行为策略的期望收益, 还受到许多不确定性的随机因素影响。外在不确定性的随机因素主要指矿工井下作业时所面临的复杂地质环境; 内在随机因素主要指矿工在危险的作业环境中所产生的消极情绪, 会对矿工行为认知判断产生极大干扰。外在环境的不确定性与内在消极情绪等随机因素的耦合, 使得矿工的行为策略选择呈现出高度不确定性。

若将单班矿工总人数记为 N , 由于每名矿工的收益除与自身行为相关外, 还受到其他矿工行为的影响, 导致矿工间存在不同行为策略的选择问题。因此, 本文主要考虑同一班组内矿工的行为选择问题, 因此构建了表 2 所示的单班矿工间的要素博弈 2×2 对称支付矩阵。假设单班矿工总人数 $N = 100$ 、选择强度为 $\omega = 0.001$, 判断同一班组内矿工的行为选择博弈的类型, 分析参与策略的固定概率并判断策略 S 及策略 C 是否为模糊演化稳定策略 FESS。

Table 2. 2×2 symmetrical stochastic evolutionary game model among single shift miners
表 2. 单班矿工间 2×2 对称随机演化博弈模型

矿工 1	矿工 2	
	安全作业 S	违章作业 C
安全作业 S	$(2, 2^2)$	$(3, 4^2)$
违章作业 C	$(3, 1^2)$	$(4, 4^2)$

则由正态模糊数排序得: $o(\tilde{A}) = 0.5$ 、 $o(\tilde{B}) = 0.1875$ 、 $o(\tilde{C}) = 3$ 、 $o(\tilde{D}) = 0.25$, 即 $\tilde{C} > \tilde{A} > \tilde{D} > \tilde{B}$, 故可以判断该博弈为模糊囚徒困境博弈。模糊固定概率随着 N 和 ω 的变化趋势如图 3 所示。由图我们可以看出随着种群数量和选择强度 ω 的增加, 策略 S 能够扎根的概率越来越小, 这也恰好符合我们现实中的情况, 种群数量越多大家的策略选择就会越复杂, 而策略的占优性就会越来越小。



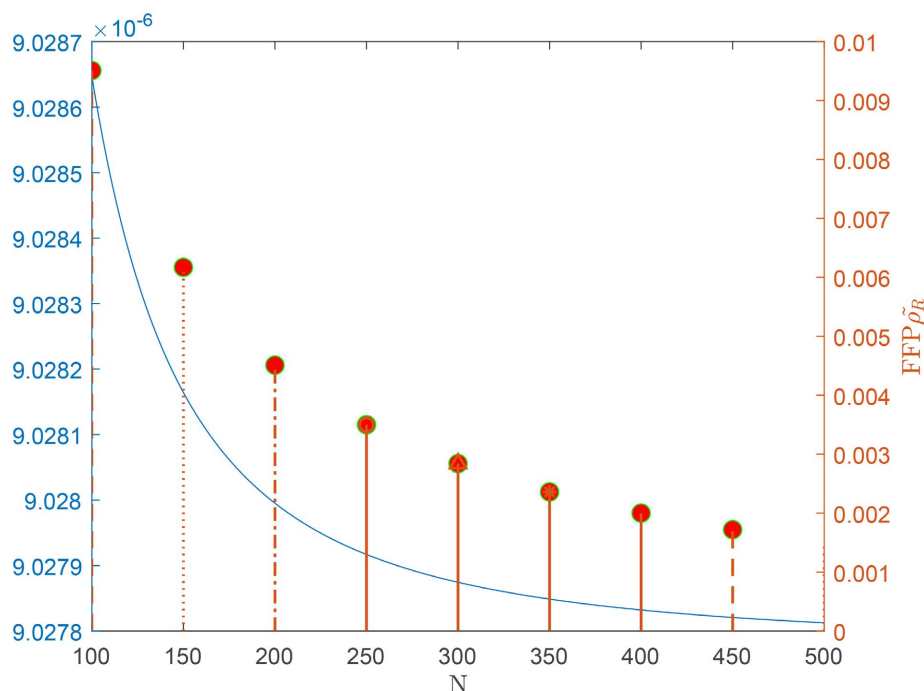


Figure 3. Fuzzy fixed probability $FFP\tilde{\rho}_A$ and the relationship between N and ω

图 3. 模糊固定概率 $FFP\tilde{\rho}_A$ 与 N 和 ω 之间的关系

根据定理 5 我们可以得到 $\alpha = -3, \beta = 6$ 和 $\sigma_\alpha^2 = 325, \sigma_\beta^2 = 313$, 则策略 S 的模糊固定概率为 $\rho_s = (0.00951, 0.00301^2)$ 。由得分函数公式可得模糊固定概率 ρ_s 的得分函数 $o(\rho_s) = 1053.31394$, 所以有 $o(\rho_s) > \frac{1}{N}$, 即 $\rho_s > \frac{1}{N}$ 。当 $i = 1$ 时, 有 $\pi_s = (3, 4^2)$ 和 $\pi_c = (3.98990, 3.98102^2)$, 并且它们的得分函数分别为 $o(\pi_s) = 0.1875$ 和 $o(\pi_c) = 0.25175$, 所以 $o(\pi_s) < o(\pi_c)$, 有 $\pi_s < \pi_c$, 即 $\tilde{f}_s < \tilde{f}_c$ 。那么, 根据定义 6 有: 策略 C 不是模糊演化稳定策略 FESS。同理, 可以判段策略 S 也不是模糊演化稳定策略 FESS。因此, 表 2 所决定的博弈问题中策略 S 和策略 C 共存。

6. 总结

首先在结合 Moran 更新和模仿更新的演化博弈模型中加入了模糊数和模糊数排序, 运用主方程推导出弱选择下模糊固定概率的具体表达式, 并分析了梯形模糊数、三角模糊数以及正态模糊数所对应的模糊固定概率。其次, 分析了在种群演化过程中模糊固定概率的自然选择性质, 给出合作策略为模糊演化稳定策略的条件, 促进合作行为的产生。最后, 将具有模糊支付的混合更新演化博弈模型应用到煤矿生产过程中员工的行为策略选择问题上, 并通过数值仿真说明了模型的合理性。不同模糊数之间也存在较大的差异, 无论运算法则还是排序规则都存在不同, 可以引入区间模糊数、指数型模糊数和直觉模糊数等; 此外, 还可以用 Fokker-Planck 随机微分方程的形式来推导出模糊固定概率的具体表达式。

基金项目

国家自然科学基金项目(12061020); 贵州省科技厅科学基金(黔科合基础[2019]1123 号; 黔科合 ZK[2021]一般 331); 贵州省教育厅科学基金(黔科合 KY 字[2021]088 号, 黔科合 KY 字[2022]301); 贵州省师范学院博士基金(No. 2021BS005)。

参考文献

- [1] Zadeh, L.A. (1965) Fuzzy sets. *Information and Control*, **8**, 338-353. [https://doi.org/10.1016/s0019-9958\(65\)90241-x](https://doi.org/10.1016/s0019-9958(65)90241-x)
- [2] 王先甲, 顾翠伶, 赵金华, 等. 具有模糊支付的 Moran 过程演化博弈动态[J]. 运筹与管理, 2021, 30(7): 71-76.
- [3] Sakawa, M. and Nishizaki, I. (1994) Max-Min Solutions for Fuzzy Multiobjective Matrix Games. *Fuzzy Sets and Systems*, **67**, 53-69. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(94\)90208-9](https://doi.org/10.1016/0165-0114(94)90208-9)
- [4] Monroy, L., Hinojosa, M.A., Mármol, A.M. and Fernández, F.R. (2013) Set-Valued Cooperative Games with Fuzzy Payoffs. the Fuzzy Assignment Game. *European Journal of Operational Research*, **225**, 85-90. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.08.024>
- [5] 杨德艳, 柳键. 基于模糊数的政府与绿色制造商博弈分析[J]. 运筹与管理, 2016, 25(1): 85-92.
- [6] Taylor, C., Fudenberg, D., Sasaki, A. and Nowak, M. (2004) Evolutionary Game Dynamics in Finite Populations. *Bulletin of Mathematical Biology*, **66**, 1621-1644. <https://doi.org/10.1016/j.bulm.2004.03.004>
- [7] Nowak, M.A., Sasaki, A., Taylor, C. and Fudenberg, D. (2004) Emergence of Cooperation and Evolutionary Stability in Finite Populations. *Nature*, **428**, 646-650. <https://doi.org/10.1038/nature02414>
- [8] Szabó, G. and Tóke, C. (1998) Evolutionary Prisoner's Dilemma Game on a Square Lattice. *Physical Review E*, **58**, 69-73. <https://doi.org/10.1103/physreve.58.69>
- [9] Liu, X., Pan, Q., Kang, Y. and He, M. (2015) Fixation Probabilities in Evolutionary Games with the Moran and Fermi Processes. *Journal of Theoretical Biology*, **364**, 242-248. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2014.08.047>
- [10] Zhang, J., Weissing, F.J. and Cao, M. (2016) Fixation of Competing Strategies When Interacting Agents Differ in the Time Scale of Strategy Updating. *Physical Review E*, **94**, 2-7. <https://doi.org/10.1103/physreve.94.032407>
- [11] Wang, X., Gu, C., Lv, S. and Quan, J. (2019) Evolutionary Game Dynamics of Combining the Moran and Imitation Processes. *Chinese Physics B*, **28**, Article ID: 020203. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/28/2/020203>
- [12] Gu, C., Wang, X., Zhao, J., Ding, R. and He, Q. (2020) Evolutionary Game Dynamics of Moran Process with Fuzzy Payoffs and Its Application. *Applied Mathematics and Computation*, **378**, Article ID: 125227. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125227>
- [13] Wang, Y. and Lee, H. (2008) The Revised Method of Ranking Fuzzy Numbers with an Area between the Centroid and Original Points. *Computers & Mathematics with Applications*, **55**, 2033-2042. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2007.07.015>
- [14] Nowak, M.A., Sasaki, A., Taylor, C. and Fudenberg, D. (2004) Emergence of Cooperation and Evolutionary Stability in Finite Populations. *Nature*, **428**, 646-650. <https://doi.org/10.1038/nature02414>
- [15] Traulsen, A., Pacheco, J.M. and Nowak, M.A. (2007) Pairwise Comparison and Selection Temperature in Evolutionary Game Dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, **246**, 522-529. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2007.01.002>
- [16] 高雷卓, 毕玲玲. 具有选择差异的随机博弈进化动力系统[J]. 生物数学学报, 2015, 30(1): 161-167.
- [17] 王先甲, 顾翠伶, 赵金华, 等. 选择差异下 Moran 过程的随机博弈模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 2020, 40(5): 1193-1209.
- [18] 杨雪, 田阳, 柴瑞瑞, 等. 基于 Moran 过程的矿工违章行为惩罚机制分析[J]. 系统工程学报, 2023, 38(4): 474-486.