

# 跨境电商快速发展背景下一类线性 经济发展系统解的方法研究

班良雪

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2024年9月19日; 录用日期: 2024年10月9日; 发布日期: 2024年11月27日

## 摘要

经济增长问题在宏观经济理论研究中占有重要地位, 是国家经济繁荣昌盛的一个前提。经济增长能推动跨境电商的发展且有效激发市场主体, 跨境电商的发展同样为经济的增长做出了很大贡献, 由此产生了各种经济增长模型和理论。在当今跨境电商快速发展的背景下, 研究线性经济发展系统的解的方法尤为重要。故研究了混合Filon渐近方法, 该方法旨在解决一类经济系统模型的求解问题。最后通过实验验证了该方法的有效性, 为经济决策提供了有效的帮助。

## 关键词

经济增长, 跨境电商, 线性经济发展系统, 混合Filon渐近方法

# Research on the Method of Solving a Class of Linear Economic Development Systems in the Context of Rapid Cross-Border E-Commerce Development

Liangxue Ban

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Sep. 19<sup>th</sup>, 2024; accepted: Oct. 9<sup>th</sup>, 2024; published: Nov. 27<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

The issue of economic growth holds a significant position in macroeconomic theory research and serves as a prerequisite for a country's economic prosperity. Economic growth not only propels the

development of cross-border e-commerce but also effectively stimulates market entities. Conversely, the development of cross-border e-commerce has made substantial contributions to economic growth. This interplay has led to the emergence of various economic growth models and theories. In the context of the rapid development of cross-border e-commerce today, it is particularly important to study the solutions for linear economic development systems. Therefore, the hybrid Filon asymptotic method has been researched, which addresses the issue of how to solve a class of economic system models. Finally, experimental results have verified the effectiveness of this method, providing valuable assistance for economic decision-making.

## Keywords

Economic Growth, Cross-Border E-Commerce, Linear Economic Development Systems, The Hybrid Filon Asymptotic Method

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

随着居民收入的不断提升，经济增长问题一直以来被视为一个非常重要的研究话题。并且随着云计算、大数据、互联网的日益成熟，跨境电商得到了快速发展。关于经济增长与跨境电商之间的关系已存在许多研究。跨境电商的发展不但推动了我国的进出口贸易、降低了国际贸易成本、缩短了国家之间的文化差距，而且提升了我国与其他国家的进出口贸易效率、有效地促进经济的稳步增长、实现更高效的且有利于双方的资源配置、还推动了双方经济的共同繁荣[1] [2]。可见，跨境电商快速发展促进了经济的增长。然而，经济增长与否也同样影响着跨境电商的发展。据统计，2016至2018年间，我国跨境电商零售进出口总额同比增长38.7%、80.6%、50%，直到2019年我国跨境电商一直呈现出良好的发展形势。但是在2020年初，由于公共卫生事件的发生一定程度地影响了经济全球化进程，因此我国跨境电商遇到了一定的挑战与困难。对于这次全球经济的下行，我国跨境电商产业经历了优胜劣汰，一批能适应时代发展的电商企业脱颖而出[3]。因此，在跨境电商的背景下对经济增长问题的研究成为了重要课题，其对于促进我国电商稳定持续发展具有重要的意义。而经济模型是研究经济增长的关键，由此将考虑如下经济模型[4]：

$$\begin{cases} \frac{\partial p(a,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a,t)}{\partial a} = -\mu(a,t)p(a,t), & (a,t) \in Q \\ p(a,0) = p_0(a), & a \in \Omega \\ p(0,t) = \varphi(t), & t \in (0,T) \end{cases} \quad (1)$$

将资产积累率引入边界条件

$$p(0,t) = \varphi(t) = r(t) \int_0^{a_m} b(a,t) p(a,t) da$$

于是得到如下模型：

$$\begin{cases} \frac{\partial p(a,t)}{\partial t} + \frac{\partial p(a,t)}{\partial a} = -\mu(a,t)p(a,t) & (a,t) \in Q \\ p(a,0) = p_0(a) & a \in \Omega \\ p(0,t) = r(t) \int_0^{a_m} b(a,t) p(a,t) da & t \in (0,T) \end{cases} \quad (2)$$

其中(1)为开环模型, (2)为闭环模型。  $Q = (0, a_m) \times [0, T]$ ,  $\Omega = (0, a_m)$ ,  $\mu(a, t)$  是资产相对折旧率,  $p_0(a)$  是原始时刻的分布密度函数,  $p(a, t)$  是分布密度函数,  $r(t)$  是资产的积累率,  $b(a, t)$  是资产产出率。在  $b(a, t) \in C^1(Q)$ ,  $\varphi(t) \in C^1(0, T)$ ,  $p_0(a) \in C^1(\Omega)$ ,  $r(t) \in C^1(0, T)$  的条件下, 如果 Volterra 积分方程

$$N(t) = f(t) + \int_0^t r(a)b(\xi, a)N(a)\exp\left(-\int_0^{t-a}\mu(s, s+a)ds\right)da \quad (3)$$

其中,  $f(t) = \int_0^{a_m-t} p_0(a)\exp\left(-\int_a^{a+t}\mu(s, s-a)ds\right)da$  的解在  $C^1(0, T)$  上存在且唯一, 则方程(2)的解在  $C^1(Q)$  上也存在且唯一。如何求该 Volterra 积分方程的解就成了关键, 并且当该 Volterra 积分方程具有振荡特性时, 采用传统的办法去解 Volterra 积分方程会存在很多困难, 且计算成本高, 因此需要提出新的数值方法。

围绕 Volterra 积分方程数值解问题, 国内外的学者展开了大量的研究, 提出了诸多有效的数值方法。1930 年, Filon 首先提出了 Filon 方法来计算一个特殊的高振荡积分问题[5]。2004 年, Iserles 和 Nørsett 将 Fourier 型高振荡积分的 Filon 方法推广至 Filon 型方法[6]-[8]。2011 年, Wang 和 Xiang 使用渐近展开与 Filon 型方法求解 Volterra 积分方程[9], 之后 Ma 和 Xiang 研究了它的收敛性[10]。2013 年, Xiang 和 Brunner 分别使用直接 Filon 方法、分段常数配置法以及线性配置法求解了含 Bessel 核的 Volterra 积分方程[11]。2013 年, Xiang 和 Wu 进一步使用分段常数配置法以及线性配置法求解含三角核的第二类高振荡 Volterra 积分方程[12]。2015 年, Fang 和 Ma 基于解的渐近展开式与误差方程分析了直接 Filon 方法、分段常数配置法以及线性配置法的收敛性[13]。

由于构造数值格式时使用方法的限制, 很多学者开始关注高振荡积分方程解的性质。2014 年, 在一定条件下, Brunner 研究了含振荡核的 Volterra 积分方程解的振荡性[14]。之后, Ma、Brunner 在定义了振荡函数的基础上分析了积分方程解的振荡结构[15] [16]。

2019 年, Fang 和 He 构造了 Hermite 配置方法和分段配置方法, 并研究其收敛性[17]。2022 年, Zhao 和 Wang 通过高效地计算高振荡积分方程研究了高振荡 Volterra 积分方程分段 Hermite 配置方法的收敛性[18]。同年, Zhao 和 Huang 提出了具有高振荡核的 Volterra 积分方程的广义求积方法[19]。

近年来, Fang 在求解高振荡 Volterra 积分方程上做出了很多贡献。2018 年, 针对瞬态声散射问题中的第一类含 Bessel 核的 Volterra 积分方程, 给出了 Hermite 配置方法[20]。2023 年, Fang 和 Wang 研究了带 Fourier 核的第二类 Volterra 积分方程的数值解[21]。利用直接插值和直接 Hermite 插值两种配置方法, 研究了具有弱奇异核高振荡 Bessel 核的第二类 Volterra 积分方程[22]。

随着学者们对数值求解 Volterra 积分方程深入的研究, 已经探索出了很多高效的数值方法。对于 Filon 配置法, 在函数逼近时只用到了起始点的函数值, 而 Hermite 插值不仅用到到节点处的函数值, 而且还用到了节点处的导数值, 信息量大。因此, 基于 Hermite 配置法研究了一类高振荡 Volterra 积分方程的混合 Filon 渐近方法以求该经济模型的解, 为企业决策和政策制定等提供参考。

## 2. 混合 Filon 渐近方法的构造

本节我们将构造高振荡 Volterra 积分方程

$$N(t) = f(t) + \int_0^t r(a)b(\xi, a)N(a)\exp\left(-\int_0^{t-a}\mu(s, s+a)ds\right)da \quad (4)$$

的混合 Filon 渐近方法。

令  $K(t, s) = r(a)b(\xi, a)$ ,  $g(t) = -\frac{1}{i\omega} \int_0^{t-a} \mu(s, s+a)ds$ , 令  $u(t) = N(t)$ 。则(4)式可表示为

$$u(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)u(s)e^{i\omega g(s)} ds \quad (5)$$

具体构造方法如下:

首先, 根据 Ma 在 2017 年提出的 Volterra 积分方程的弱振荡解[15], 对方程(5)运用分部积分, 再对得到的积分运用渐近展开  $k-1$  次, 可以将方程(5)渐近展开为两项, 记为  $u(t) = u_l(t) + u_r(t)$ ,

其中

$$u_l(t) = \sum_{\alpha \in \phi_n} \frac{(-1)^{|\alpha|_0} \gamma'_\alpha(t)}{(-i\omega)^{\sum_{j=1}^n \alpha_j}} e^{i\omega g(t)}, \quad (6)$$

$$\gamma'_\alpha(s) = \frac{\sigma_{\alpha_1, g}[f \cdot K_t](s)}{g'(s)}, \alpha \in \phi_n, \alpha_2 = 0,$$

$$\gamma'_\alpha(s) = \frac{\sigma_{\alpha_j, g}[\gamma_{\alpha'}^s \cdot K_t](s)}{g'(s)}, \text{ if } \alpha \in \phi_n, \alpha_j \neq 0, \alpha_{j+1} = 0,$$

$$\alpha' \in \phi_n, \alpha'_k = \alpha_k, k = 1, 2, \dots, j-1, \alpha'_j = 0,$$

$\alpha = (\alpha_{1 \leq j \leq n}) \in \phi_n$ ,  $\phi_n$  是  $n$  维向量,  $0 \leq \alpha_k \leq n$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ 。若  $\alpha_i = 0$ , 则  $\alpha_{i+1} = 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ 。

$\sigma_{k, g}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) 是一个线性算子, 并且满足当  $g(\cdot) \in C^n(I)$  时, 对任意  $f(\cdot) \in C^n(I)$  有:

$$\sigma_{0, g}[f](t) = f(t),$$

$$\sigma_{k, g}[f](t) = \frac{d(\sigma_{k-1, g}[f](t))}{g'(t) dt}, k = 1, 2, \dots, n$$

将  $u(t) = u_l(t) + u_r(t)$  代入方程(5)得

$$u_l(t) + u_r(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)u_l(t)e^{i\omega g(s)} ds + \int_0^t K(t,s)u_r(t)e^{i\omega g(s)} ds \quad (7)$$

对方程(7)移项可得

$$u_r(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)u_l(t)e^{i\omega g(s)} ds + \int_0^t K(t,s)u_r(t)e^{i\omega g(s)} ds - u_l(t) \quad (8)$$

对方程(8)求导可得

$$u'_r(t) = f'(t) + \int_0^t K_t(t,s)u_r(s)e^{i\omega g(s)} ds + \int_0^t K_t(t,s)u_l(s)e^{i\omega g(s)} ds + K(t,t)u_r(t)e^{i\omega g(t)} + K(t,t)u_l(t)e^{i\omega g(t)} - u'_l(t) \quad (9)$$

其次, 将方程(1)的区间  $[0, T]$  均匀网格划分为  $n$  个子区间, 步长为  $h = \frac{T}{n}$ , 节点为  $t_i = ih (i = 0, 1, \dots, n)$ , 每个子区间为  $[t_i, t_{i+1}]$ 。接着在节点  $t_i = ih (i = 0, 1, \dots, n)$  上计算函数值  $u_r(t_j)$  的近似值  $u_r^d(t_j)$ , 选取节点为配置点, 使用分段 Hermite 配置方法, 在节点  $t_{j-1}$  和  $t_j$  上构造函数  $u_r(t_j)$  的两个节点的三次 Hermite 插值多项式, 记该插值多项式为

$$u_h(t) = u_r(t_{j-1})\alpha_{0j}(t) + u_r(t_j)\alpha_{1j}(t) + u'_r(t_{j-1})\beta_{0j}(t) + u'_r(t_j)\beta_{1j}(t) \quad (10)$$

其中

$$\alpha_{0j}(t) = \left(1 + 2\frac{t-t_{j-1}}{h}\right) \left(\frac{t-t_j}{h}\right)^2, \quad \alpha_{1j}(t) = \left(1 + 2\frac{t_j-t}{h}\right) \left(\frac{t-t_{j-1}}{h}\right)^2,$$

$$\beta_{0j}(t) = (t - t_{j-1}) \left( \frac{t - t_j}{h} \right)^2, \quad \beta_{1j}(t) = (t - t_j) \left( \frac{t - t_{j-1}}{h} \right)^2$$

为插值基函数。

再次，将插值多项式

$$u_r^d(t) = u_r^d(t_{j-1})\alpha_{0j}(t) + u_r^d(t_j)\alpha_{1j}(t) + (u_r^d(t_{j-1}))' \beta_{0j}(t) + (u_r^d(t_j))' \beta_{1j}(t)$$

分别代入到方程(8)和方程(9)中，得到配置系统

$$\begin{aligned} u_r^d(t_j) = & \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \left[ u_r^d(t_{i-1})\alpha_{0i}(s) + u_r^d(t_i)\alpha_{1i}(s) + (u_r^d(t_{i-1}))' \beta_{0i}(s) + (u_r^d(t_i))' \beta_{1i}(s) \right] ds \\ & + \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \left[ u_r^d(t_{j-1})\alpha_{0j}(s) + u_r^d(t_j)\alpha_{1j}(s) + (u_r^d(t_{j-1}))' \beta_{0j}(s) + (u_r^d(t_j))' \beta_{1j}(s) \right] ds \quad (11) \\ & + \int_0^{t_j} K(t_j, s) u_l(s) e^{i\omega g(s)} ds + f(t_j) - u_l(t_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [u_r^d(t_j)]' = & \sum_{i=1}^{j-1} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \left[ u_r^d(t_{i-1})\alpha_{0i}(s) + u_r^d(t_i)\alpha_{1i}(s) + (u_r^d(t_{i-1}))' \beta_{0i}(s) + (u_r^d(t_i))' \beta_{1i}(s) \right] ds \\ & + \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \left[ u_r^d(t_{j-1})\alpha_{0j}(s) + u_r^d(t_j)\alpha_{1j}(s) + (u_r^d(t_{j-1}))' \beta_{0j}(s) + (u_r^d(t_j))' \beta_{1j}(s) \right] ds \quad (12) \\ & + \int_0^{t_j} K_t(t_j, s) u_l(s) e^{i\omega g(s)} ds + K(t_j, t_j) u_r^d(t_j) e^{i\omega g(t_j)} + K(t_j, t_j) u_l(t_j) e^{i\omega g(t_j)} + f'(t_j) - u_l'(t_j) \end{aligned}$$

整理方程(11)和方程(12)，从而得到混合 Filon 渐近方法

$$(A_{2 \times 2} - B_{2 \times 2} - C_{2 \times 2}) \begin{bmatrix} u_r^d(t_j) \\ (u_r^d(t_j))' \end{bmatrix} = (D_{2 \times 1} + E_{2 \times 1} + F_{2 \times 1} + G_{2 \times 1} + H_{2 \times 1} - I_{2 \times 1})$$

其中，

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \alpha_{1j}(s) ds & \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \beta_{1j}(s) ds \\ \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \alpha_{1j}(s) ds & \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \beta_{1j}(s) ds \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K(t_j, t_j) & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \alpha_{0j}(s) ds & \int_{t_{j-1}}^{t_j} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \beta_{0j}(s) ds \\ \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \alpha_{0j}(s) ds & \int_{t_{j-1}}^{t_j} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \beta_{0j}(s) ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r^d(t_{j-1}) \\ (u_r^d(t_{j-1}))' \end{bmatrix},$$

$E = \sum_{i=1}^{j-1} (E_1 + E_2)$ ，(  $E_1$  和  $E_2$  均为  $2 \times 2$  的矩阵)

$$E_1 = \begin{bmatrix} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \alpha_{0i}(s) ds & \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \beta_{0i}(s) ds \\ \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \alpha_{0i}(s) ds & \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \beta_{0i}(s) ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r^d(t_{i-1}) \\ (u_r^d(t_{i-1}))' \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \alpha_{li}(s) ds & \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \beta_{li}(s) ds \\ \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \alpha_{li}(s) ds & \int_{t_{i-1}}^{t_i} K_t(t_j, s) e^{i\omega g(s)} \beta_{li}(s) ds \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r^d(t_i) \\ (u_r^d(t_i))' \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} \int_0^{t_j} K(t_j, s) u_l(s) e^{i\omega g(s)} ds \\ \int_0^{t_j} K_t(t_j, s) u_l(s) e^{i\omega g(s)} ds \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} f(t_j) \\ f'(t_j) \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K(t_j, t_j) e^{i\omega g(t_j)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_l(t_j) \\ u_l'(t_j) \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} u_l(t_j) \\ u_l'(t_j) \end{bmatrix}.$$

通过上述过程将高振荡 Volterra 积分方程离散为一个线性系统, 从而通过求解该线性系统可得节点处的配置解, 即可以计算出函数值  $u_r(t_j)$  的近似值  $u_r^d(t_j)$ 。

最后, 将计算出的近似值  $u_r^d(t_j)$  代入  $u(t_j) = u_l(t_j) + u_r(t_j)$ , 可算出方程(1)的解  $u(t_j)$  的近似值  $u^d(t_j)$ , 即  $u^d(t_j) = u_l(t_j) + u_r^d(t_j)$ 。从而通过这一方法该经济模型的解得以求出。

### 3. 数值实验

本节我们将对数值算例进行测试, 从而验证高振荡 Volterra 积分方程的混合 Filon 渐近方法在解决模型(1)时是否有效。我们将考虑随着渐近展开的项数以及  $N$  增加时该方法的误差及收敛阶的变化情况。其中误差用绝对误差的无穷大范数来表示, 收敛阶用

$$\log_2 \frac{\text{error}_{N_{p_1}}}{\text{error}_{N_{p_2}}} / \log_2 \frac{N_{p_2}}{N_{p_1}}$$

来计算。本文的数值实验均在 MATLAB 上进行。

考虑如下高振荡 Volterra 积分方程

$$u(t) = e^{i\omega t} + \int_0^t u(s) ds$$

该方程的准确解为:

$$u(t) = e^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega - 1} (e^{i\omega t} - e^t)$$

对区间[0, 1]进行等距划分, 取不同的  $N$  及  $\omega$ 。当  $\omega$  取值为 50 时混合 Filon 渐近方法求解该方程的绝对误差和收敛阶由表 1 所示。

由表 1 可知: 当  $N$  不变时, 随着渐近展开项的增加混合 Filon 渐近方法的误差在逐渐减小; 在同一个渐近展开项之下随着  $N$  的增大, 该方法的误差也在减小; 收敛阶在 4 附近波动。(注: 渐近展开 1 项即取方程(6)取第一项, 渐近展开 2 项即取方程(6)中第一项与第二项的和, 以此类推)

对于例子渐近展开的 1~3 项如下:

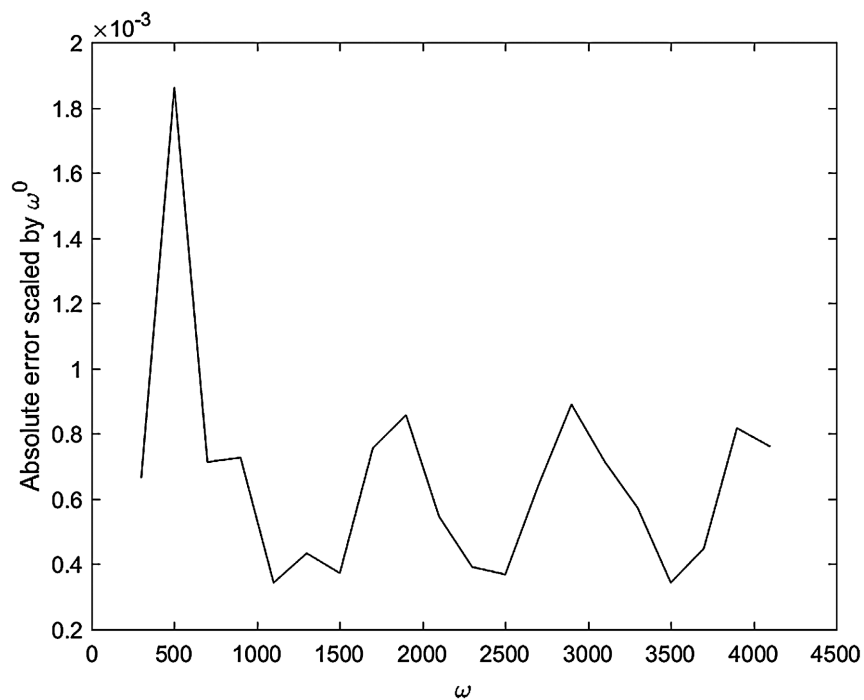
$$u_{11}(t) = e^{i\omega t},$$

$$u_{11}(t) = e^{i\omega t} + \frac{e^{i\omega t}}{i\omega},$$

$$u_{11}(t) = e^{i\omega t} + \frac{e^{i\omega t}}{i\omega} + \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega)^2}.$$

**Table 1.** Absolute errors and convergence orders of the hybrid Filon asymptotic method for example  
**表 1.** 混合 Filon 渐近方法求解例子时所产生的绝对误差和收敛阶

$N$	渐近展开 1 项		渐近展开 2 项		渐近展开 3 项	
	误差	收敛阶	误差	收敛阶	误差	收敛阶
8	0.03		$6.77 \times 10^{-4}$		$1.35 \times 10^{-5}$	
16	$2.44 \times 10^{-4}$	7.11	$4.89 \times 10^{-6}$	7.11	$9.79 \times 10^{-8}$	7.11
32	$1.24 \times 10^{-5}$	4.30	$2.48 \times 10^{-7}$	4.30	$4.97 \times 10^{-9}$	4.3
48	$2.37 \times 10^{-6}$	4.08	$4.74 \times 10^{-8}$	4.08	$9.49 \times 10^{-10}$	4.08
64	$7.41 \times 10^{-7}$	4.04	$1.48 \times 10^{-8}$	4.04	$2.97 \times 10^{-10}$	4.04
80	$3.02 \times 10^{-7}$	4.02	$6.05 \times 10^{-9}$	4.02	$1.21 \times 10^{-10}$	4.02
96	$1.46 \times 10^{-7}$	3.99	$2.92 \times 10^{-9}$	3.99	$5.84 \times 10^{-11}$	3.99
112	$7.90 \times 10^{-8}$	4.00	$1.28 \times 10^{-9}$	4.00	$3.16 \times 10^{-11}$	3.99
128	$4.63 \times 10^{-8}$	4.00	$9.25 \times 10^{-10}$	4.00	$1.85 \times 10^{-11}$	4.00
收敛阶		4.00		4.00		4.00

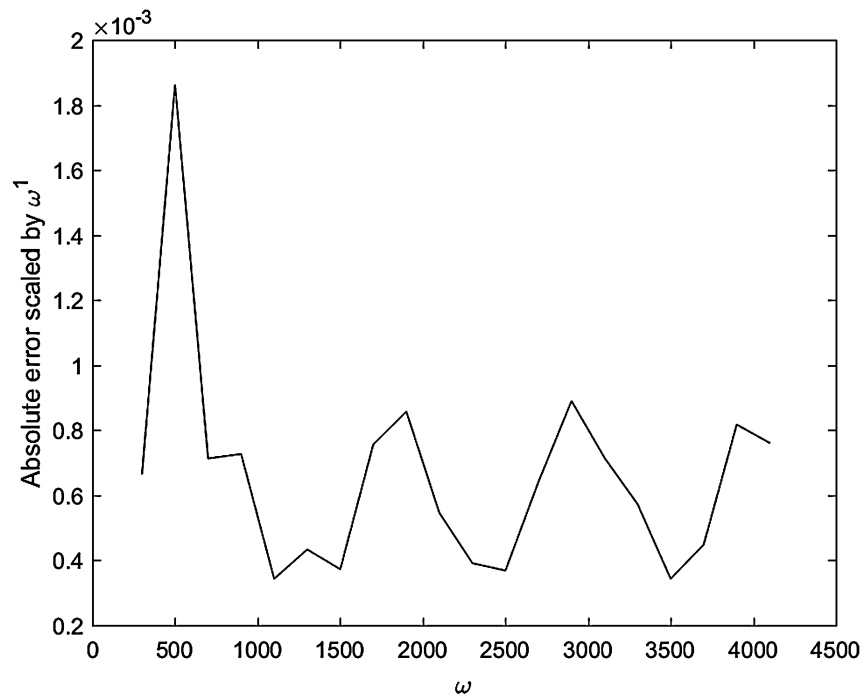


**Figure 1.** Diagram of the variation of the error when asymptotically expanded into one term  
**图 1.** 渐近展开为 1 项时误差的变化图

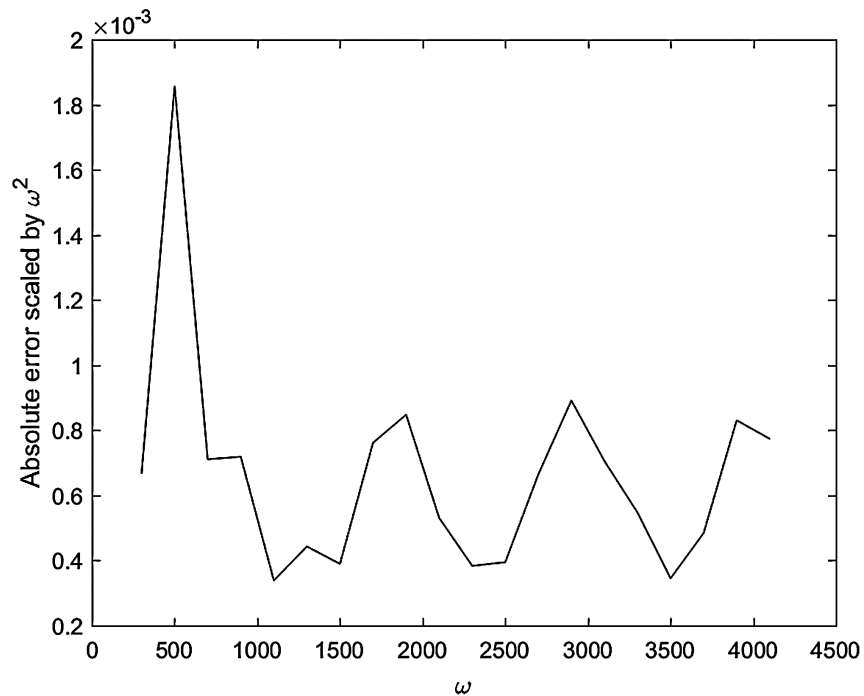
由图 1~3 的可知：该方法在取不同渐近展开项下的误差随着振荡频率  $\omega$  的增加而趋于平缓，当渐近展开项取一项、两项和三项时该方法的渐近阶分别为 0 阶、1 阶和 2 阶。

#### 4. 总结与展望

经济系统是一个复杂的系统，运用数理经济学，建立经济增长问题的模型，同时借助数学工具对该模型进行分析与研究。对于求该经济模型的解，借助分段两点三次 Hermite 配置方法，再结合渐近展开，



**Figure 2.** Diagram of the variation of the error when asymptotically expanded into two term  
**图 2.** 渐近展开为 2 项时误差的变化图



**Figure 3.** Diagram of the variation of the error when asymptotically expanded into three term  
**图 3.** 渐近展开为 3 项时误差的变化图

将高振荡 Volterra 积分方程离散成一个线性配置系统，通过求解线性系统得到配置解。最后通过数值实验，证明了该方法求解该经济系统是有效的。由于该闭环控制系统，能够实现对经济系统的调控，达到



经济稳定、持续增长的目的，所以研究求解该系统的方法是有意义的。

随着跨境电商领域的拓展，线性经济发展系统解的研究方法的不断更新，再加上随着未来政策环境的优化，互联网技术的飞速发展以及全球经济一体化趋势步伐的加快，跨境电商在全球将会愈发重要。从而经济发展模型解的问题，可能会因为实际系统的多变性和复杂性，即将面临着更多的机遇与困难。因此交叉学科的研究需要加强也需要创新，以形成更加综合全面的经济研究框架，从而得到更准确和更高效的求解方法，为跨境电商和经济发展提供更有力的支持。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(11901133)。

## 参考文献

- [1] 赵慧, 葛春瑞, 马婷. 电子商务环境与经济增长——基于设立跨境电商综合试验区的准自然实验[J]. 甘肃行政学院学报, 2021(5): 114-124+128.
- [2] 赵亚南, 张瑞, 赵宏伟. 跨境电商对地区经济的影响文献综述[J]. 现代营销(下旬刊), 2024(8): 96-98.
- [3] 兰天. 全球经济下行对我国跨境电商的影响[J]. 现代营销(经营版), 2020(8): 124-125.
- [4] 张红梅, 刘会茹, 蔡惠萍, 等. 线性经济发展系统解的性质研究[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40(23): 226-233.
- [5] Filon, L.N.G. (1930) On a Quadrature Formula for Trigonometric Integrals. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **49**, 38-47. <https://doi.org/10.1017/s0370164600026262>
- [6] Iserles, A. and Nørsett, S.P. (2004) On Quadrature Methods for Highly Oscillatory Integrals and Their Implementation. *BIT Numerical Mathematics*, **44**, 755-772.
- [7] Iserles, A. and Nørsett, S.P. (2005) Efficient Quadrature of Highly Oscillatory Integrals Using Derivatives. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **461**, 1383-1399.
- [8] 赵龙斌. 高振荡积分及积分方程的数值方法研究[D]: [博士学位论文]. 武汉: 华中科技大学, 2017.
- [9] Wang, H. and Xiang, S. (2010) Asymptotic Expansion and Filon-Type Methods for a Volterra Integral Equation with a Highly Oscillatory Kernel. *IMA Journal of Numerical Analysis*, **31**, 469-490. <https://doi.org/10.1093/imanum/drp048>
- [10] Ma, J., Xiang, S. and Kang, H. (2013) On the Convergence Rates of Filon Methods for the Solution of a Volterra Integral Equation with a Highly Oscillatory Bessel Kernel. *Applied Mathematics Letters*, **26**, 699-705. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.01.011>
- [11] Xiang, S. and Brunner, H. (2013) Efficient Methods for Volterra Integral Equations with Highly Oscillatory Bessel Kernels. *BIT Numerical Mathematics*, **53**, 241-263. <https://doi.org/10.1007/s10543-012-0399-8>
- [12] Xiang, S. and Wu, Q. (2013) Numerical Solutions to Volterra Integral Equations of the Second Kind with Oscillatory Trigonometric Kernels. *Applied Mathematics and Computation*, **223**, 34-44. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.07.075>
- [13] Fang, C., Ma, J. and Xiang, M. (2015) On Filon Methods for a Class of Volterra Integral Equations with Highly Oscillatory Bessel Kernels. *Applied Mathematics and Computation*, **268**, 783-792. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2015.06.111>
- [14] Brunner, H. (2014) On Volterra Integral Operators with Highly Oscillatory Kernels. *Discrete & Continuous Dynamical Systems A*, **34**, 915-929. <https://doi.org/10.3934/dcds.2014.34.915>
- [15] Ma, J. (2017) Oscillation-free Solutions to Volterra Integral and Integro-Differential Equations with Periodic Force Terms. *Applied Mathematics and Computation*, **294**, 294-298. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2016.09.008>
- [16] Brunner, H., Ma, Y. and Xu, Y. (2015) The Oscillation of Solutions of Volterra Integral and Integro-Differential Equations with Highly Oscillatory Kernels. *Journal of Integral Equations and Applications*, **27**, 455-487. <https://doi.org/10.1216/jie-2015-27-4-455>
- [17] Fang, C., He, G. and Xiang, S. (2019) Hermite-Type Collocation Methods to Solve Volterra Integral Equations with Highly Oscillatory Bessel Kernels. *Symmetry*, **11**, 232-248. <https://doi.org/10.3390/sym11020168>
- [18] Zhao, L. and Wang, P. (2022) Error Estimates of Piecewise Hermite Collocation Method for Highly Oscillatory Volterra Integral Equation with Bessel Kernel. *Mathematics and Computers in Simulation*, **196**, 137-150. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.01.015>
- [19] Zhao, L. and Huang, C. (2022) The Generalized Quadrature Method for a Class of Highly Oscillatory Volterra Integral Equations. *Numerical Algorithms*, **92**, 1503-1516. <https://doi.org/10.1007/s11075-022-01350-7>

- 
- [20] 方春华, 李明亮, 田维. Hermite 配置法求解第一类 Volterra 积分方程[J]. 湖南理工学院学报(自然科学版), 2018, 31(4): 7-10.
- [21] Wang, J., Fang, C. and Zhang, G. (2023) Effective Collocation Methods to Solve Volterra Integral Equations with Weakly Singular Highly Oscillatory Fourier or Airy Kernels. *International Journal of Computer Mathematics*, **100**, 1532-1551. <https://doi.org/10.1080/00207160.2023.2203786>
- [22] Wang, J., Fang, C., Zhang, G. and Zhang, Z. (2023) Modified Collocation Methods for Second Kind of Volterra Integral Equations with Weakly Singular Highly Oscillatory Bessel Kernels. *Journal of Applied Analysis & Computation*, **13**, 3231-3252. <https://doi.org/10.11948/20220559>