

寡头垄断市场下非对称信息对企业决策的影响研究

——基于Stackelberg博弈模型

王雪婧

贵州大学数学与统计学院, 贵州 贵阳

收稿日期: 2025年3月10日; 录用日期: 2025年3月28日; 发布日期: 2025年4月29日

摘要

本文首先假定寡头垄断市场中的企业之间进行决策时, 会通过影响市场价格进而影响对手企业的决策行为。在此基础上, 利用推测变差方法构建了一个动态Stackelberg博弈模型。并假设市场中处于垄断主体的企业掌握了进入者企业的部分产量决策信息。在此基础上, 对模型均衡点的稳定性与存在性进行了理论分析, 并通过数值模拟, 分析了推测变差和非对称信息对系统稳定性的影响。得到以下结论: 第一, 随着推测变差增大(或减小)到某个值, 系统会失去稳定性, 这说明市场竞争激烈程度过大或过小都会使得系统失稳。但引入非对称信息后, 随着外推精度增大, 推测变差减小, 系统稳定性反而得到增强, 此时激烈的市场竞争有利于系统稳定。第二, 对比不存在非对称信息的经典情形, 引入非对称信息后的系统稳定区域更大, 抗初始值扰动能力更强。并且在完全不对称信息的情形下, 系统的稳定区域达到最大。

关键词

Stackelberg博弈, 推测变差, 非对称信息, 非线性动力系统

Research on the Impact of Asymmetric Information on Enterprise Decision-Making in an Oligopolistic Market

—Based on the Stackelberg Game Model

Xuejing Wang

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang Guizhou

Received: Mar. 10th, 2025; accepted: Mar. 28th, 2025; published: Apr. 29th, 2025

Abstract

This paper first assumes that when enterprises in an oligopolistic market make decisions, they will influence the decision-making behavior of rival enterprises by affecting the market price. On this basis, a dynamic Stackelberg game model is constructed by using the conjectural variation method. It is assumed that the enterprises in the dominant position of the monopoly in the market have mastered part of the output decision-making information of the entrant enterprises. On this basis, a theoretical analysis is carried out on the stability and existence of the equilibrium point of the model, and through numerical simulation, the impacts of conjectural variation and asymmetric information on the stability of the system are analyzed. The following conclusions are obtained: First, as the conjectural variation increases (or decreases) to a certain value, the system will lose its stability, which indicates that either excessive or insufficient intensity of market competition will lead to the instability of the system. However, after introducing asymmetric information, as the extrapolation accuracy increases and the conjectural variation decreases, the stability of the system is instead enhanced. At this time, intense market competition is conducive to the stability of the system. Second, compared with the classical situation without asymmetric information, the system with asymmetric information has a larger stable region and stronger ability to resist the disturbance of the initial value. And in the case of completely asymmetric information, the stable region of the system reaches the maximum.

Keywords

Stackelberg Game, Conjectural Variation, Asymmetric Information, Nonlinear Dynamical System

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

寡头垄断市场是指由少数几家厂商(企业)控制大部分市场份额的市场结构。它已成为经济学领域中一种普遍存在的重要市场形态。寡头垄断市场最常见的博弈模型有 Cournot 博弈, Stackelberg 博弈与 Bertrand 博弈。其中 Stackelberg 博弈反映了企业间的非对称竞争, 在这种竞争中, 企业被分为领导者和追随者, 他们的决策顺序不同。这种决策的先后顺序模拟了现实中企业之间决策的差异, 有助于学者了解不同企业在市场中的角色和竞争态势。因此, 许多学者研究了这样的博弈[1]-[3]。

在实际寡头市场中, 参与人很难拥有完全理性, 其常见的理性类型参见文献[4], 包括基本有限理性, 延迟有限理性, 适应性有限理性, 天真预期等。由于参与人具有有限理性, 所以博弈最优的结果无法一次达到, 而是通过一个动态过程最终实现。[5]首先采用一个离散动力系统描述了 Cournot 博弈的演化, 并结合混沌理论分析了系统的稳定性。此后越来越多的学者采用这种方法研究寡头博弈[6]-[8]。对于 Stackelberg 博弈, 文献[9]分析了动态 Stackelberg 博弈的复杂动力学, 并且研究了该模型平衡点的存在性与稳定性。在这个动态博弈中, 两名参与者均采用基于边际利润的梯度调整机制。在参与人具有不同有限理性水平的假定下, 文献[10]分析了一个动态 Stackelberg 博弈模型, 其中领导者具有有限理性, 而追随者采用局部近似预期。文献[11]分析了不同参数取值下, 动态 Stackelberg 博弈模型均衡点的稳定性, 其中领导者采用梯度调整机制, 而追随者采用自适应机制。

由于实际市场中企业获取信息的能力不同,学者们进一步放宽了完全市场信息的假设。文献[12]假定企业的成本函数为私有信息,并且通过引入一个概率参数来区分企业的高成本和低成本类型。文献[13]假设参与人对竞争对手下一阶段的产量信息完全掌握,并构建了一个动态双寡头博弈模型,发现对于此模型,完美的预测并不能达到 Nash 均衡。文献[14]基于外推机制建立了两个存在信息不对称的动态古诺博弈模型,得到以下结论:采用自适应调整机制的企业,最优结果并不存在于最完美的预测下。而采用梯度调整机制的企业可以通过提高预测精度促进系统的稳定性。

在信息不对称条件下,上述研究工作采用了不同的调整机制研究动态博弈模型。但他们没有考虑到公司之间的交互影响,每个参与企业对其竞争对手的推测能力。文献[15]提出的推测变差模型为研究寡头博弈提供了一种新方法。在实际寡头市场中,企业会推测自身产量引起的竞争对手产量决策的变化。文献[16]指出通过引入不同形式,推测变差方法可以融入所有经典的寡头博弈模型中。文献[17]假设两个参与者具有延迟有限理性,利用推测变差方法建立了动态 Bertrand 寡头模型,并且分析了该模型均衡点的稳定性。文献[18]建立了一个动态 Stackelberg 推测变差博弈模型,其推测变差形式区别于文献[17],即领导者推测追随者企业会最优地回应它的产量决策变化,而追随者企业对领导者企业的推测变差为 0。[19]采用常数推测变差方法,对一个动态 Cournot 博弈展开了研究。并且进一步得出结论:当该模型处于竞争状态,即当推测变差的值小于 0 且达到-1 时,均衡的稳定区域能达到最大范围。

在具有非对称信息的不完全竞争的寡头垄断市场中,推测变差模型相比古诺模型更具普遍性和现实性[20],它广泛用于研究电力、天然气、碳排放等寡头垄断市场。但通过梳理文献,我们发现这样的研究并不多见。于是本文基于非对称信息,利用推测变差方法研究了一个产品具有差异的动态 Stackelberg 博弈。我们的研究与以往文献的研究具有两方面的不同。首先我们采用了能够深刻体现 Stackelberg 博弈中参与人有限理性的推测变差方法;其次我们在此基础上引入了非对称信息,比以往文献所建立的基于完美信息的模型更加贴合实际。最后得到以下结论,在不存在非对称信息的情形下,当推测变差为负值时,随着它值的增大或者减小,系统会失去稳定性。而在引入非对称信息后,随着外推精度增大,推测变差减小有利于系统的稳定性。同时采用梯度调整机制的领导者公司掌握的信息越准确,平衡点的稳定区域越大,系统的抗混沌能力越强。

本文的结构安排如下。第 2 部分利用推测变差方法建立了一个静态 Stackelberg 博弈模型,并给出了该模型唯一的推测变差平衡。在第 3 部分,我们基于非对称信息,构造了一个异质预期下的非线性动力系统。并研究了该系统推测变差平衡点的局部稳定性。第 4 部分通过数值模拟验证了理论结果。第 5 部分给出了模型的实际应用价值。最后,第 6 部分对本文进行了总结。

2. 静态 Stackelberg 博弈模型

推测变差的值可以表征市场竞争的水平[12],古诺竞争模型可被视为推测变差模型的特殊情形。在本文中,我们不考虑古诺竞争,而是采用推测变差方法构建一个产品具有差异的不完全竞争的双寡头 Stackelberg 模型,其中企业 1 为领导者,企业 2 为跟随者。我们假设领导者企业推测追随者企业会最优地调整自身策略去应对领导者产量策略的变化,而追随者企业的推测变差为 0,这样的假定凸显了参与人之间地位的不平等。我们用 $q_i (i=1,2)$ 来表示企业 i 的决策变量。由于该博弈中两个参与者地位不平等,行动顺序存在差异。在计划阶段,领导企业首先宣布其计划产量(Q_1),然后追随者根据领导者的策略做出产量决策(Q_2)。接下来,在生产阶段,两家企业同时选择实际产量决策($q_i (i=1,2)$),并且它们的目的都是最大化自身的利润函数。

对于这两家企业,它们的成本函数记为:

$$C_i(q_i) = c_i(q_i - Q_i)^2 + k_i q_i, \quad i=1,2. \quad (1)$$

其中, $k_i (i=1,2)$ 代表边际成本, 而成本函数的正向偏移参数 $c_i > 0 (i=1,2)$ 概括了由计划产量与实际产量之间的差异所导致成本增加的各种抽象因素。

企业 i 的产品价格如下:

$$p_i = \alpha_i - \beta_i q_i - \gamma q_j, \quad i, j=1,2, \quad i \neq j. \quad (2)$$

其中, $\beta_i (i=1,2)$ 表示因企业 i 在市场内每增加一单位产出而导致其产品价格下降的幅度 ($\beta_i = -\frac{\partial p_i}{\partial q_i} > 0$), γ 可以衡量两家企业产品之间的替代或差异化程度。 γ 的值越大, 两家企业产品之间的替代性就越强, 相应地, 市场竞争也会变得越激烈。特别地, 当 $\alpha_1 = \alpha_2$, $\beta_1 = \beta_2 = \gamma$ 时, 两家企业的产品是完全可替代的。

企业 i 的利润函数可表示为 $\pi_i = q_i p_i - C_i(q_i)$, $i, j=1,2$, 即

$$\pi_i = q_i (\alpha_i - \beta_i q_i - \gamma q_j) - c_i (q_i - Q_i)^2 - k_i q_i, \quad i, j=1,2 \quad (3)$$

接下来, 企业会根据一阶最优性条件最大化自身利润, 在此过程中, 它们会考虑对竞争对手生产决策的推测, 即它们的推测变差。一阶最优性条件如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1(q_1, q_2, \phi_1)}{\partial q_1} = 0 \\ \frac{\partial \pi_2(q_1, q_2, \phi_2)}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

其中 $\phi_i (i=1,2)$ 代表公司 i 的推测变差。

我们假设领导企业推测追随者企业会依据其最佳反应函数, 对领导者的产量变动做出最优反应。然而, 追随者企业对领导者的推测变差为 0。因此, $\phi_1 = \left(\frac{dR_2(q_1)}{dq_1} \right)_{1cv}$ 且 $\phi_2 = 0$, 其中 $R_2(q_1)$ 表示追随者的最佳反应函数, 下标 “1cv” 代表企业 1 的推测变差。通过令 $\frac{\partial \pi_2(q_1, q_2)}{\partial q_2} = 0$, 我们得到

$$R_2(q_1) = q_2 = \frac{\alpha_2 + 2c_2 Q_2 - k_2 - \gamma q_1}{2\beta_2 + 2c_2}。于是$$

$$\phi_1 = -\frac{\gamma}{2\beta_2 + 2c_2} \quad (4)$$

从这个式子中我们得到 $\phi_1 < 0$ 。从式(4)可以看出, γ 的值越大 ϕ_1 的值就越小, 市场竞争越激烈。由(4), 一阶最优性条件转化为如下形式

$$\begin{cases} \frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = \alpha_1 + 2c_1 Q_1 - L_1 q_1 - \gamma q_2 - k_1 = 0 \\ \frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = \alpha_2 + 2c_2 Q_2 - L_2 q_2 - \gamma q_1 - k_2 = 0 \end{cases} \quad (5)$$

此处 $L_1 = 2\beta_1 + 2c_1 - \frac{\gamma^2}{L_2}$, $L_2 = 2\beta_2 + 2c_2$ 。我们进一步得到

$$\begin{cases} q_1 = \frac{\alpha_1 + 2c_1 Q_1 - \gamma q_2 - k_1}{L_1} \\ q_2 = \frac{\alpha_2 + 2c_2 Q_2 - \gamma q_1 - k_2}{L_2} \end{cases} \quad (6)$$

于是该博弈的推测变差均衡如下:

$$\begin{cases} q_1 = \frac{L_2(\alpha_1 + 2c_1Q_1 - k_1) - \gamma(\alpha_2 + 2c_2Q_2 - k_2)}{L_1L_2 - \gamma^2} \\ q_2 = \frac{L_1(\alpha_2 + 2c_2Q_2 - k_2) - \gamma(\alpha_1 + 2c_1Q_1 - k_1)}{L_1L_2 - \gamma^2} \end{cases} \quad (7)$$

由于平衡解为正值, 因此下列条件成立:

$$\begin{aligned} L_1L_2 - \gamma^2 > 0, \quad L_2(\alpha_1 + 2c_1Q_1 - k_1) - \gamma(\alpha_2 + 2c_2Q_2 - k_2) > 0, \\ L_1(\alpha_2 + 2c_2Q_2 - k_2) - \gamma(\alpha_1 + 2c_1Q_1 - k_1) > 0. \end{aligned}$$

根据式(7), 我们接下来利用逆向归纳法推导出两家企业的计划产量。具体如下, 首先将式(7)代入 π_2 ,

并令 $\frac{\partial \pi_2}{\partial Q_2} = 0$, 我们可以得到 Q_2 关于 Q_1 的最优解:

$$Q_2 = \frac{c_2\Delta_2 - 4c_1c_2L_1\gamma(\beta_2\Delta + L_2)Q_1}{c_2\Delta_1} \quad (8)$$

随后, 将式(7)和式(8)代入 π_1 , 并令 $\frac{\partial \pi_1}{\partial Q_1} = 0$, 我们进一步得到

$$Q_1 = \frac{\Delta_1(\alpha_1\Delta - \beta_1F_1 - \gamma F_2) + 2\gamma c_2\Delta_2\beta_1 - c_2\Delta_6}{2c_2\Delta_5} \quad (9)$$

其中 $\Delta = L_1L_2 - \gamma^2$, $\Delta_1 = 22c_2L_1 - \Delta^2 - 8c_2L_1(\gamma^2 - \beta_2L_1)$,

$$\Delta_2 = 2F_2(\gamma^2 - \beta_2L_1) + 2L_1(\alpha_2\Delta - \beta_2F_2 - \gamma F_1) - 2F_2(2c_2L_1 - \Delta) + 4c_1L_1\beta_2\gamma - 2k_2L_1\Delta,$$

$$\Delta_3 = 4c_1\gamma\Delta(2c_2L_1 - \Delta) - 4c_1L_1L_2\gamma, \quad \Delta_4 = 2c_1L_2\Delta_1 + 8\gamma^2c_1c_2L_1(2L_2 - 2c_2 - \beta_2),$$

$$\Delta_5 = 2\gamma\Delta_4(c_2L_1\Delta_3 - c_1\gamma\Delta_1) + c_1c_2\Delta_4 - \Delta_1\Delta^2,$$

$$\Delta_6 = (F_1\Delta_1 - 2c_2\gamma\Delta_2)(\beta_1\Delta_4 + 2c_2L_1\gamma\Delta_3 - 2c_1\gamma^2\Delta_1) + \Delta_4(k_1\Delta\Delta_1 + 2\beta_1\Delta_4) + 2c_1(F_1\Delta_1 - 2\gamma c_2\Delta_2)(\Delta_4 - \Delta\Delta_1),$$

$$F_1 = L_2(\alpha_1 - k_1) - \gamma(\alpha_2 - k_2), \quad F_2 = L_1(\alpha_2 - k_2) - \gamma(\alpha_1 - k_1)。$$

由式(9), 我们得到:

$$Q_2 = \frac{2c_2\Delta_2\Delta_5 - 4c_1L_1\gamma(\beta_2\Delta + L_2)[\Delta_1(\alpha_1\Delta - \beta_1F_1 - \gamma F_2) + 2\gamma c_2\beta_1\Delta_2 - c_2\Delta_6]}{2c_2\Delta_5\Delta_1} \quad (10)$$

最后将 Q_1 与 Q_2 代入式(7), 推测变差平衡解如下:

$$\begin{cases} q_1^* = \frac{2c_1F_6F_4 + 2c_2\Delta_1\Delta_5(F_1 - 1)}{F_5} \\ q_2^* = \frac{2c_1\gamma F_6[4L_1^2c_2(\Delta\beta_2 + L_2) - \Delta_1]}{F_5} \end{cases} \quad (11)$$

其中 $F_3 = \alpha_1\Delta - \beta_1F_1 - \gamma F_2$, $F_4 = L_2\Delta_1 + 2L_1\gamma(\beta_2\Delta + L_2)$, $F_5 = 2c_2\Delta_1\Delta_5\Delta$, $F_6 = F_3\Delta_1 + 2c_2\gamma\beta_1\Delta_2 - c_2\Delta_6$ 。

3. 动态 Stackelberg 博弈模型

3.1. 调节机制

由于企业具有有限理性, 因此博弈不会一次达到最优, 相反, 在每个离散时间 t ($t = 0, 1, 2, \dots$), 参

与人会采用调整机制不断调整策略,最终达到最优解。根据文献[11],我们假定企业具有不同的理性水平。其中,企业1采用基于边际利润的梯度调整方法,如下所示:如果在 t 时刻, $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} > 0 (< 0)$, 企业1会在 $t+1$ 时期增加(减少)产量; 如果 $\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0$, 企业1则在下一时期维持相同产量不变, 具体可用下式表示:

$$q_1(t+1) = q_1(t) + v q_1(t) \frac{\partial \pi_1(t)}{\partial q_1(t)}$$

其中 $v > 0$ 表示企业1的调整速度。

我们假定企业2使用自适应调整机制, 具体如下所示: $q_2(t+1) = u R_2(q_1(t)) + (1-u) q_2(t)$, 其中 $u \in [0, 1]$ 表示赋予企业2最优回应 $R_2(q_1(t))$ 的权重因子。

3.2. 基于非对称信息的动力系统

在实际市场中, 企业间常常存在非对称信息的情况, 比如成本信息不对称、市场需求信息不对称等等。在本文中, 非对称信息表现为领导企业能获取追随者企业下一时期的部分决策信息。我们引入外推精度参数 θ 去衡量领导者所掌握信息的准确性。 θ 值越大, 表明领导者对跟随者下一时期的产量预测越准确。结合2.1中的调整机制, 我们建立了一个基于非对称信息的非线性动力系统:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + v q_1(t) \frac{\partial \pi_1(q_1(t), \theta q_2(t+1) + (1-\theta) q_2(t))}{\partial q_1} \\ q_2(t+1) = u R_2(q_1(t)) + (1-u) q_2(t) \end{cases}$$

具体形式如下:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) \left\{ 1 + v \left[\alpha_1 + 2c_1 Q_1 - k_1 - \frac{r\theta u (\alpha_2 + 2c_2 Q_2 - k_2)}{L_2} + q_1(t) D_1 - F_3 q_2(t) \right] \right\} \\ q_2(t+1) = \frac{u (\alpha_2 + 2c_2 Q_2 - k_2)}{L_2} - \frac{u\gamma}{L_2} q_1(t) + (1-u) q_2(t) \end{cases} \quad (12)$$

其中 $D_1 = \gamma^2 + \frac{\gamma^2 \theta u}{L_2} - 2\beta_1 - 2c_1$, $F_3 = \gamma - \gamma \theta u$ 。

3.3. 不动点稳定性分析

随着演化进行, 当市场结构在时刻 t 足够稳定时, $q_1(t+1)$ 将近似等于 $q_1(t)$ 。令 $q_1(t+1) = q_1(t) = q_1$ 且 $q_2(t+1) = q_2(t) = q_2$, 式(12)转变为:

$$\begin{cases} v \left[\alpha_1 + 2c_1 Q_1 - k_1 - \frac{r\theta u (\alpha_2 + 2c_2 Q_2 - k_2)}{L_2} + q_1 D_3 - (\gamma - \gamma \theta u) q_2 \right] = 0 \\ \frac{u (\alpha_2 + 2c_2 Q_2 - k_2)}{L_2} - \frac{u\gamma}{L_2} q_1 - u q_2 = 0 \end{cases} \quad (13)$$

因此, 系统(12)的两个不动点为 $E_0 = \left(0, \frac{\alpha_2 + 2c_2 Q_2 - k_2}{L_2} \right)$ 以及 $E_1 = (q_1^*, q_2^*)$, 其中 q_1^* 和 q_2^* 参考(11)

如果一个动力系统中存在稳定的不动点, 那么无论系统从何种初始状态出发, 最终都会演变为该不动点所代表的稳定状态。这使我们能够预测系统的长期行为。因此, 接下来我们将分析上述两个不动点

的稳定性。

我们基于系统(12)的 Jacobian 矩阵 J 来分析上述不动点 E_0 和 E_1 的稳定性, 以下是 J 的一般形式:

$$J = \begin{pmatrix} 1+v \left(D_2 + u\theta\gamma \frac{D_3}{L_2} + \frac{u\theta\gamma^2 q_1}{L_2} - L_1 q_1 \right) & -vq_1\gamma(1-u\theta) \\ -\frac{u\gamma}{L_2} & 1-u \end{pmatrix}$$

其中

$$D_2 = \alpha_1 + 2c_1 Q_1 - k_1 - L_1 q_1 - \gamma q_2, \quad D_3 = \alpha_2 + 2c_2 Q_2 - k_2 - L_2 q_2 - \gamma q_1.$$

参考文献[7], 我们得到了关于系统(12)不动点稳定性的如下引理:

引理 1: 假设 $\lambda_i (i=1,2)$ 是系统(12)的不动点 $E = (q_1, q_2)$ 的特征值,

- (1) 若 $|\lambda_i| < 1, i=1,2$, 那么 (q_1, q_2) 局部渐进稳定;
- (2) 若 $|\lambda_i| > 1, i=1,2$, 那么 (q_1, q_2) 是一个不稳定的排斥节点;
- (3) 若 $|\lambda_1| < 1$ 且 $|\lambda_2| > 1$ (或者 $|\lambda_1| > 1$ 并且 $|\lambda_2| < 1$), 则 (q_1, q_2) 是一个不稳定的鞍点;
- (4) 若 $|\lambda_1| = 1$ 且 $|\lambda_2| \neq 1$ (或者 $|\lambda_1| \neq 1$ 且 $|\lambda_2| = 1$), (q_1, q_2) 的稳定性无法判断。

根据引理 1, 系统(12)的不动点 E_0 和 E_1 的稳定性如下。

定理 1: E_0 是一个鞍点。

证明: E_0 的 Jacobian 矩阵 $J(E_0)$ 如下:

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} 1+v \left(\alpha_1 + 2c_1 Q_1 - k_1 - \gamma \frac{\alpha_2 + 2c_2 Q_2 - k_2}{L_2} \right) & 0 \\ -\frac{u\gamma}{L_2} & 1-u \end{pmatrix}$$

它的特征值为: $\lambda_1 = 1-u$, $\lambda_2 = 1+v(\alpha_1 + 2c_1 Q_1 - k_1 - \gamma q_2)$ 。显然, 由于 $u \in [0,1]$, $\lambda_1 < 1$ 。

此外, 由(6), $\alpha_i + 2c_i Q_i - k_i > \gamma q_j (t) > 0$ 成立, 所以 $\lambda_2 > 1$ 。因此 E_0 是一个鞍点。

定理 2: 若满足 $v < \frac{L_2(4-2u)}{2q_1^* L_1 L_2 - q_1^* (2\gamma^2 \theta + L_1 L_2 - \gamma^2) u}$, 则 E_1 局部渐进稳定。

证明: E_1 的 Jacobian 矩阵 $J(E_1)$ 如下:

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1+vq_1^* \left(\frac{\gamma^2 u \theta}{L_2} - L_1 \right) & -vq_1^* \gamma (1-u\theta) \\ -\frac{u\gamma}{L_2} & 1-u \end{pmatrix}$$

$J(E_1)$ 的特征多项式为: $f(\lambda) = \lambda^2 - A\lambda + B$, 其中

$A = 2-u+v\gamma q_1^*$, $B = 1-u + \frac{q_1^* v}{L_2} [L_1 L_2 (u-1) + u\gamma^2 (\theta-1)]$ 。该特征多项式的判别式如下:

$$\Delta = A^2 - 4B = u^2 + (q_1^* v \gamma)^2 + 2(2-u)q_1^* v \gamma - \frac{4q_1^* v}{L_2} [L_1 L_2 (u-1) + u\gamma^2 (\theta-1)],$$

由于 $u \in [0,1]$, $\theta \in [0,1]$, 所以 $\Delta > 0$, $f(\lambda)$ 有两个不同的实数根, 记为 λ_1 和 λ_2 。根据 Jury 条件, 若

$$\begin{cases} \text{(i)} & 1 - A + B = \frac{q_1^* v u}{L_2} (L_1 L_2 - \gamma^2) > 0, \\ \text{(ii)} & 1 + A + B = 4 - 2u + \frac{q_1^*}{L^2} u v (2\gamma^2 \theta + L_1 L_2 - \gamma^2) - 2q_1^* L_1 v > 0, \\ \text{(iii)} & B - 1 = -u + \frac{q_1^* v}{L_2} [L_1 L_2 (u - 1) + \gamma^2 u (\theta - 1)] < 0, \end{cases}$$

成立, 则 $|\lambda_i| < 1$ ($i=1, 2$)。由于 $L_1 L_2 - \gamma^2 > 0$, 条件(i)与(iii)显然成立。并且若 $v < \frac{L_2 (4 - 2u)}{2q_1^* L_1 L_2 - q_1^* (2\gamma^2 \theta + L_1 L_2 - \gamma^2) u}$ 成立, 则条件(ii)成立, 即 E_1 局部渐进稳定。

当参数取值为如下时:

$$\alpha_1 = 7.8, \alpha_2 = 7, \beta_1 = 2, \beta_2 = 2, c_1 = 0.55, c_2 = 1, k_1 = 1.5, k_2 = 0.5, v = 0.26, \theta = 0.6, \gamma = 0.7.$$

系统在平面 (u, v) 内的稳定区域如下图 1:

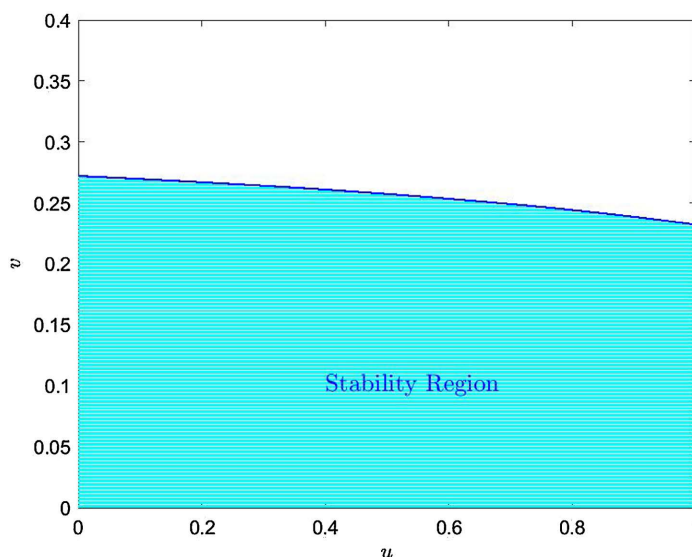


Figure 1. Stability region of E_1 in the plane (u, v)

图 1. E_1 在 (u, v) 平面内的稳定区域

4. 数值模拟

在本节中, 我们通过数值模拟来分析系统的复杂动力学行为。图 2 首先展示了在不同外推精度参数 θ 取值下, 关于产品差异化参数 γ 的分岔图。其中参数取值为:

$$\alpha_1 = 7.8, \alpha_2 = 7, \beta_1 = 2, \beta_2 = 2, c_1 = 0.55, c_2 = 1, k_1 = 1.5, k_2 = 0.5, v = 0.26, u = 0.7.$$

由式(4)可知, 当 β_2 与 c_2 固定取值时, γ 的值越大, 推测变差 ϕ 越小, 这代表市场竞争越激烈。图 2 中, $\theta = 0$ 即不存在非对称信息, 此时动力系统退化为经典情形。在此情形下, 当 $0.322 < \gamma < 0.884$ 时, 系统(12)呈现出一种平衡状态。在 $\theta = 0.6$ 时, 该动态系统在 $0.306 < \gamma < 1$ 时是稳定的。对比两幅图, 我们发现寡头垄断市场中, 产品差异化水平的降低会改变市场竞争压力并且使得系统失稳, 各方决策无法实现自身利益最大化, 但市场中龙头企业的信息优势对抑制市场失稳具有关键作用。我们采用与图 2 相同

的参数来绘制系统关于 γ 的最大李雅普诺夫指数图(图 3), 以便进一步探究系统的演化。在图 3 中, 通过扩大龙头企业的信息优势, 系统的稳定区域得到扩大。

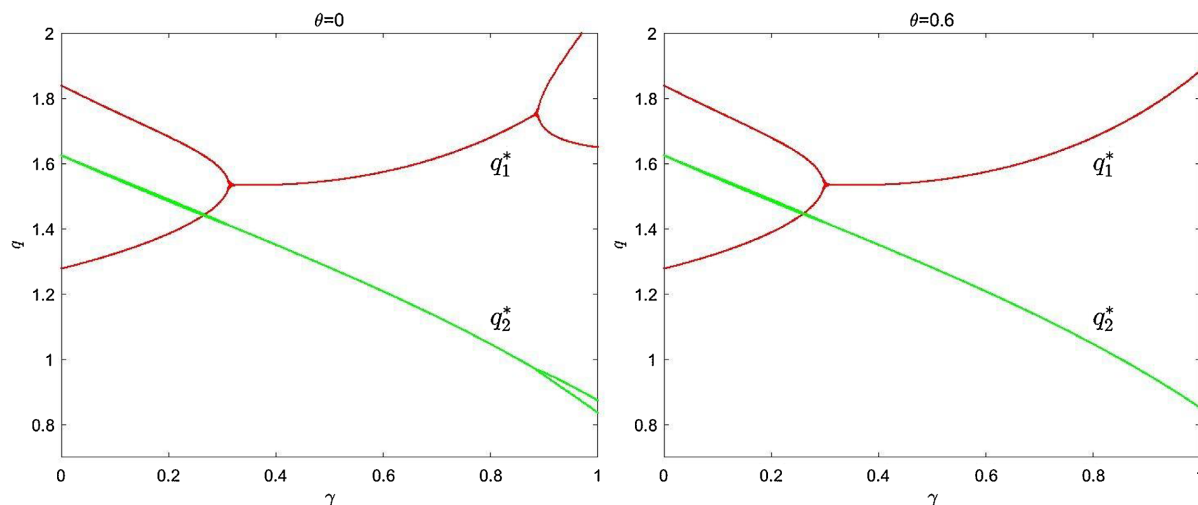


Figure 2. The bifurcation diagrams of system (12) with respect to γ at different θ levels

图 2. 系统(12)在不同 θ 水平下关于 γ 的分岔图

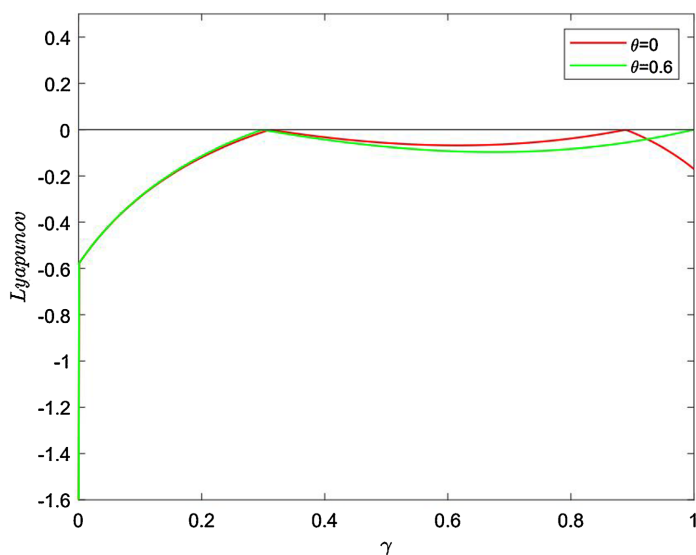


Figure 3. Maximum Lyapunov exponent diagram of system (12) with respect to γ at different θ levels

图 3. 系统(12)在不同 θ 水平下关于 γ 的最大 Lyapunov 指数图

图 4 展示了在不同外推精度参数 θ 取值下, 系统(12)相对于企业 1 调整速度参数 v 的分岔图, 其中 $\gamma = 0.7$, 其余参数取值与图 2 相同。从图 4 中我们可以看出, 在 v 达到某一特定值之前, 系统(12)呈现出平衡状态。在 $\theta = 0$ 、 $\theta = 0.2$ 、 $\theta = 0.6$ 和 $\theta = 1$ 中, 推测变差平衡点(1.7648, 1.1053)分别在 $v = 0.2808$, 0.2829, 0.2870 与 0.2911 处发生二倍周期分岔。由此我们得出, 通过调节非信息对称(如龙头企业掌握消费者偏好大数据), 可显著延缓市场进入不可预知的混沌状态, 降低市场风险。在与图 4 相同的参数取值下, 图 5 通过最大李雅普诺夫指数图更直观地展示了上述结论。

图 6 展示了针对不同的 (θ, γ) 取值, 系统相对于 v 的分岔图, 其他参数取值与图 2 一致。对比第一行

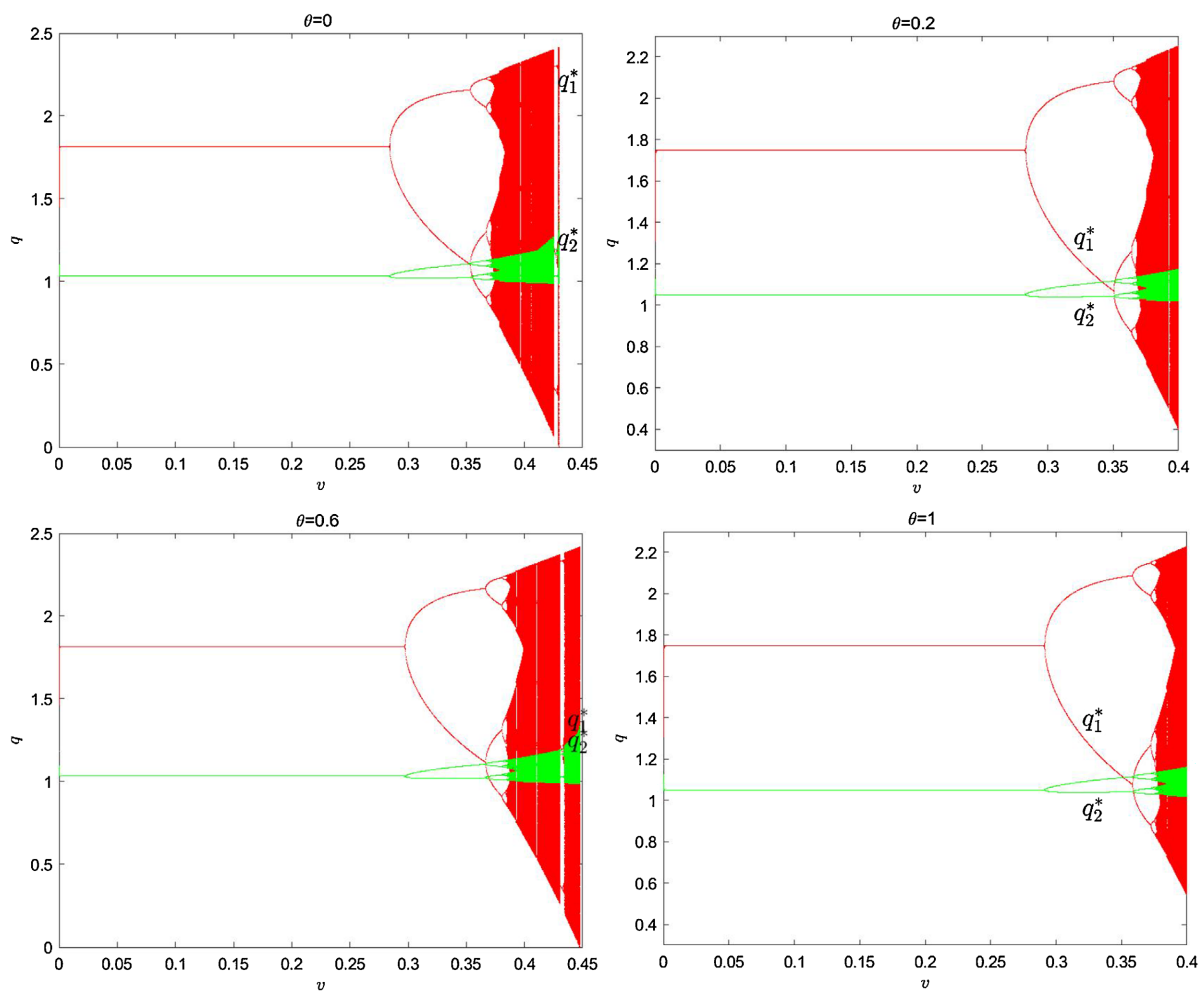


Figure 4. The bifurcation diagrams of system (12) with respect to v at different θ levels

图 4. 系统(12)在不同 θ 水平下关于 v 的分岔图

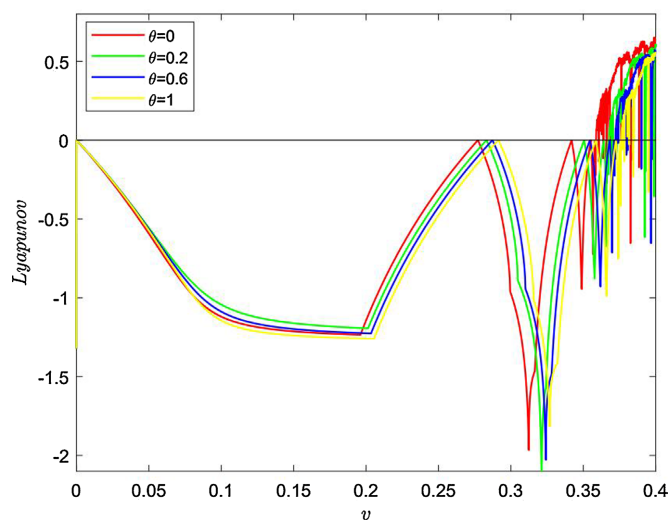


Figure 5. Maximum Lyapunov exponent diagram of system (12) with respect to v at different θ levels

图 5. 系统(12)在不同 θ 水平下关于 v 的最大 Lyapunov 指数图

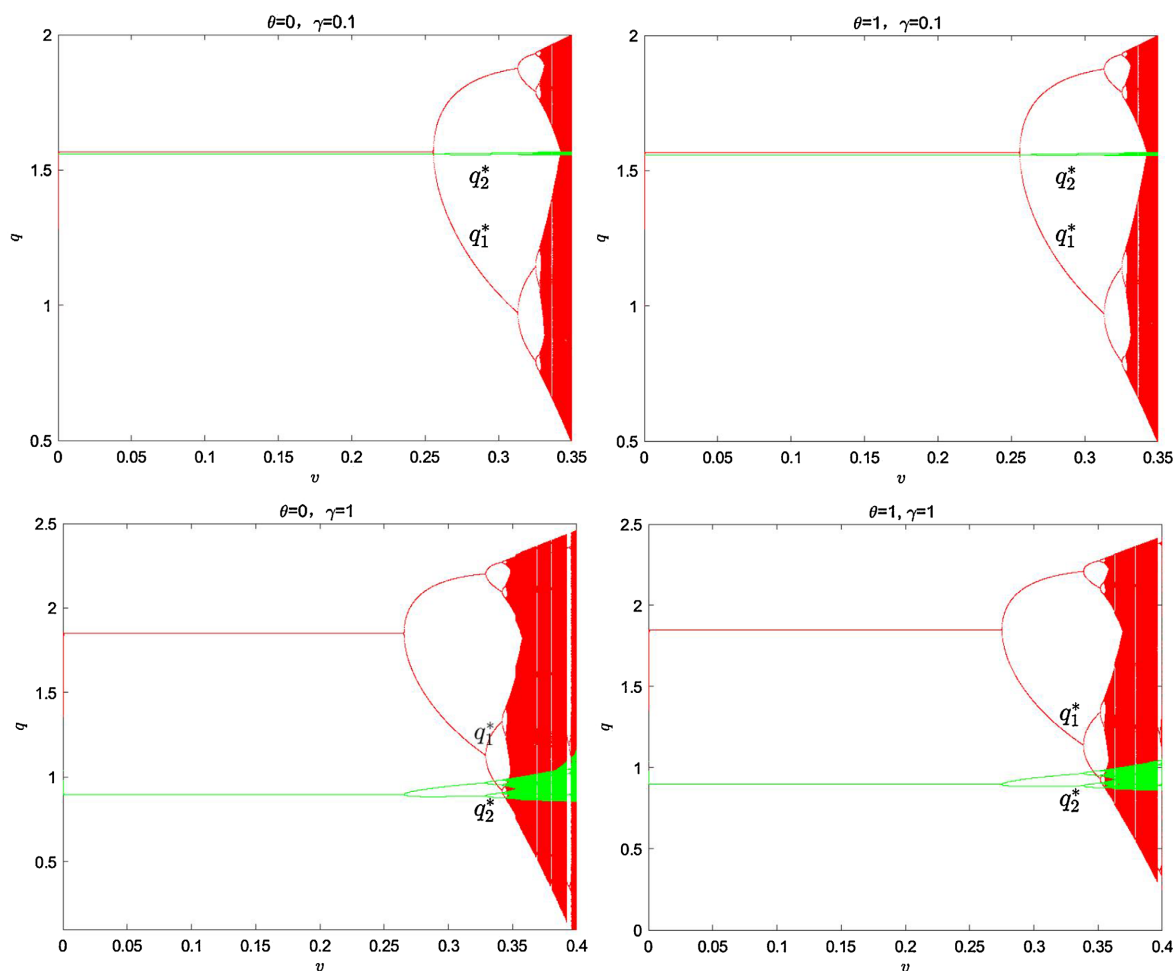


Figure 6. The bifurcation diagrams of system (12) with respect to v at different (θ, γ) levels

图 6. 系统(12)在不同 (θ, γ) 水平下关于 v 的分岔图

两幅图，系统分别在 v 达到 0.2550 和 0.2556 之前，呈现稳定状态，此时平衡点为(1.5672, 1.5581)。对比第二行两幅图，平衡点(1.8499, 0.8972)分别在 $v = 0.2652$ 和 0.2705 处发生分岔。这说明当企业调整速度增大时，市场将会陷入危害性混沌状态，但通过调节非对称信息参数，比如企业建立市场信息调研部门，增大对竞争企业下一时期产量的预测精度，就可以避免混沌发生，并且市场竞争激烈程度越大，这种积极效果越明显。在与图 6 相同的参数取值下，最大李雅普诺夫指数图(图 7)也呈现出相同的结果。

奇异吸引子反映了系统混沌行为的复杂性与内在规律性。图 8 展示了系统(12)在不同 (θ, γ) 取值时的吸引子图，其中第一行两幅图的参数取值为： $v = 0.33$ ，第二行两幅图的参数取值为： $v = 0.35$ 其余参数取值与图 6 一致。第一行两幅图呈现出相似的奇异吸引子，这说明系统处于混沌状态。对比第二行两幅图，随着 θ 取值增大，奇异吸引子转变为简单吸引子，系统脱离混沌状态，转变为四倍周期分岔。由此我们得出相同结论，调节非对称信息参数对竞争性强的市场脱离混沌状态具有重要作用。

混沌系统对初始条件极为敏感。即始初始值仅有细微的变化，它们的产量演化曲线在经过一段时间后，也会出现明显的分离。图 9 和图 10 展示了参数 (θ, γ) 对系统(12)初始条件敏感性的影响， $v = 0.35$ ，其余参数取值与图 2 一致。图 9 呈现了企业 1 在不同 (θ, γ) 取值下的产量演化曲线，两条曲线对应的初始值分别为： $(q_1^0, q_2^0) = (1, 1)$ 与 $(q_1^0, q_2^0) = (1.001, 1)$ 。在图 9 第一幅图中，两条曲线在 10 次迭代后开始分离，

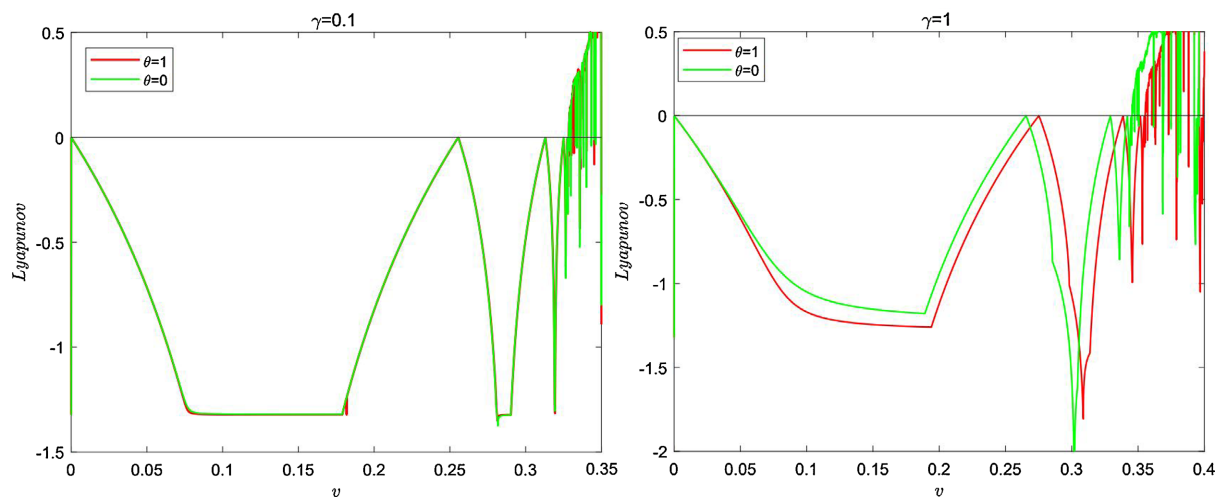


Figure 7. Maximum Lyapunov exponent diagram of system (12) with respect to v at different (θ, γ) levels

图 7. 系统(12)在不同 (θ, γ) 水平下关于 v 的最大 Lyapunov 指数图

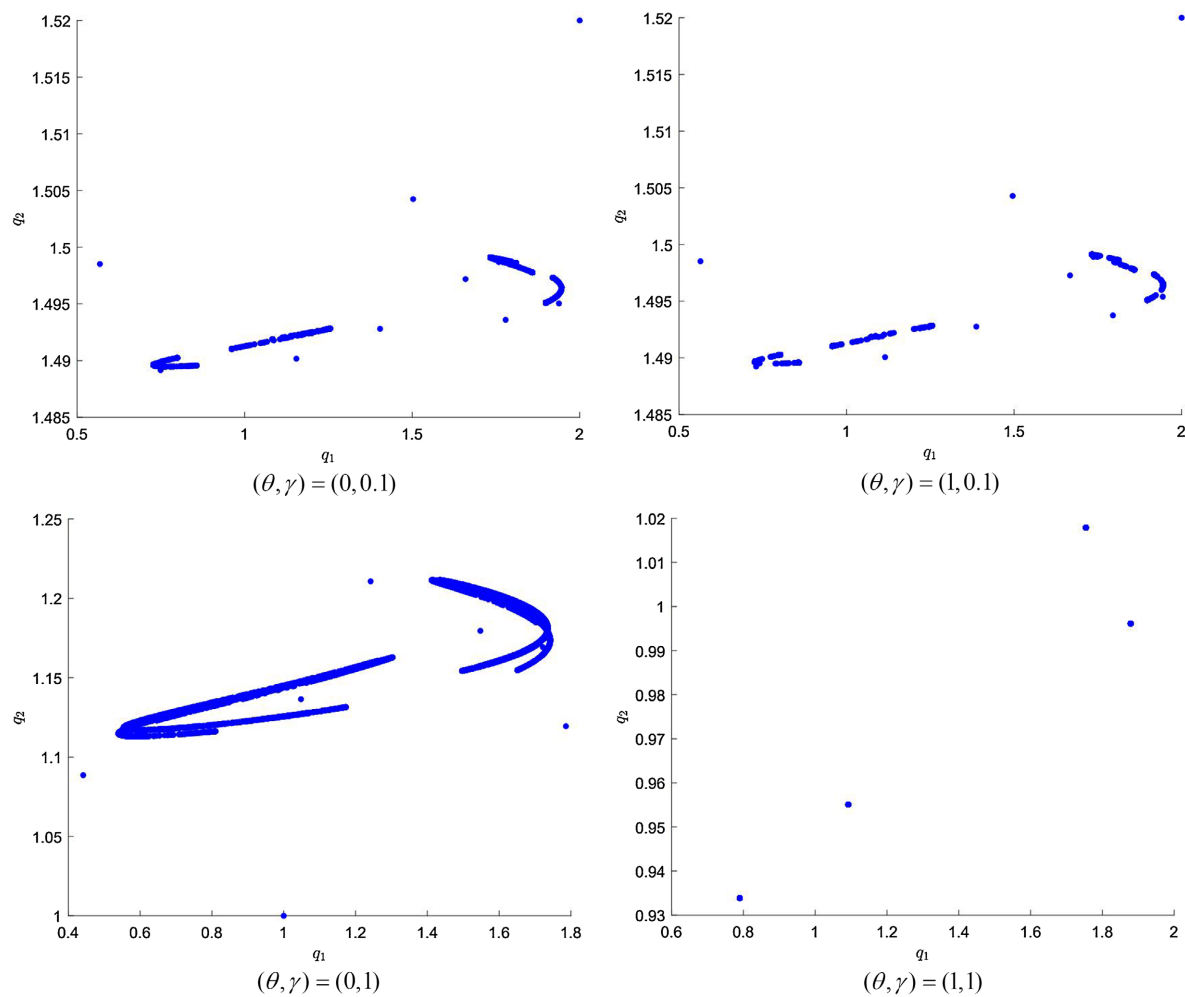


Figure 8. Strange attractor diagram

图 8. 奇怪吸引子图

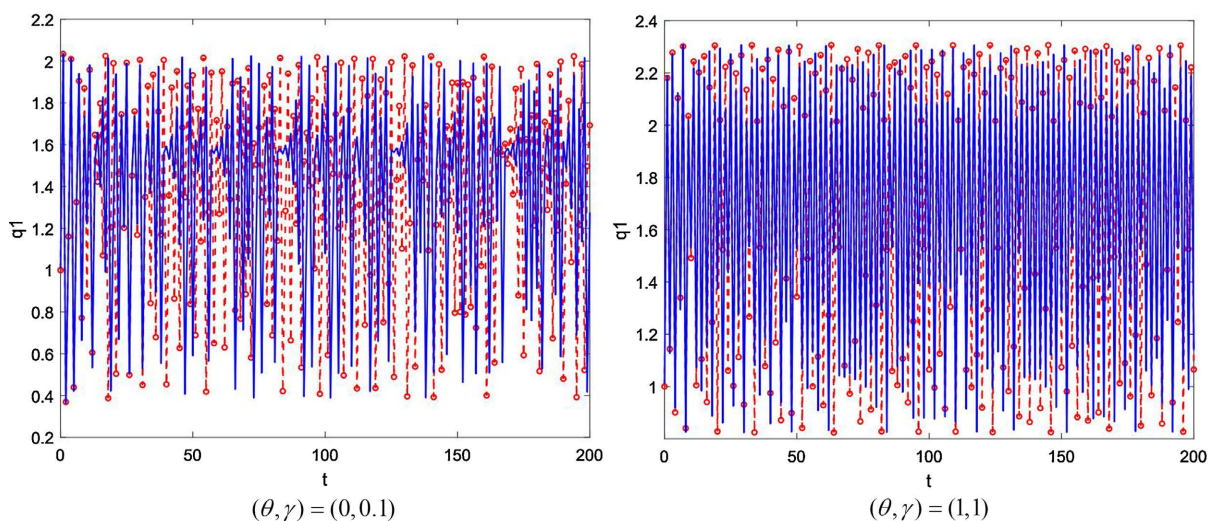


Figure 9. Sensitivity dependence on the initial conditions q_1

图 9. 初值敏感性 q_1

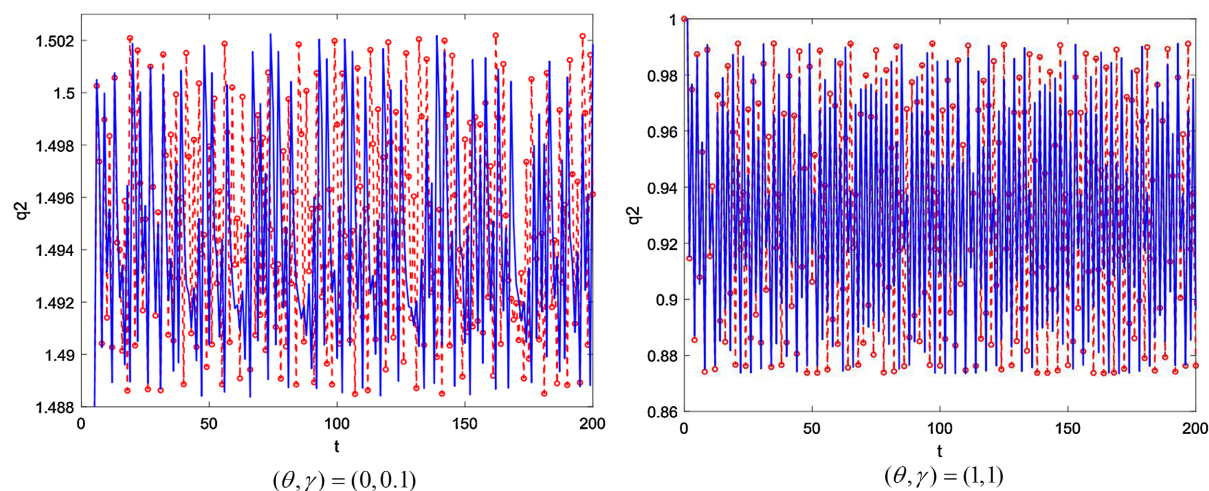


Figure 10. Sensitivity dependence on the initial conditions q_2

图 10. 初值敏感性 q_2

而在第二幅图中则是 17 次迭代后开始分离，并且两条曲线的偏离程度明显降低。这说明，提高龙头企业对追随企业下一时期产量的准确性以及市场的竞争烈度，可以提高市场的抗混沌能力，规避较大风险。

5. 实际应用

根据上述数值模拟结论，企业可通过以下策略优化市场稳定性，避免市场陷入不可预知的风险性混沌状态：第一，对于高竞争市场与低竞争市场进行不同程度的信息调节，高竞争市场对非对称信息参数精度敏感，而低竞争市场敏感度低，企业可评估当前市场竞争激烈程度，动态校准信息精度，维持市场稳定。第二，控制策略调整速度，调整速度过高会使得市场陷入混沌，同时这种风险同样可以通过条件非对称信息精度规避。第三，构建混沌预警-响应机制，监测市场关键指标，当接近分岔阈值时，及时校准信息精度规避混沌状态发生。龙头企业需将非对称信息精度作为战略资源，在竞争升级时优先投入资源获取对手决策信息，提高精度，而非盲目加速决策，抑制混沌风险。

6. 结论

本文首先引入推测变差,构建了一个动态 Stackelberg 博弈模型来模拟寡头垄断市场中企业调整产量的动态行为,并求解了模型唯一的推测变差平衡点。随后,我们通过理论分析,发现推测变差平衡点为动态模型唯一的内部不动点且是局部渐进稳定的。最后通过数值模拟,分析了推测变差和非对称信息对推测变差平衡点稳定性的影响,得到以下结论。第一,随着外推精度增大,系统关于推测变差的稳定区域明显扩大,这说明市场由于竞争激烈程度过大或过小引起的系统失稳问题,可以通过增大外推精度来解决。第二,外推精度越大,系统越稳定,在完美信息的情形下,系统的稳定性最强。这可以给实际竞争中的企业提供理论指导,避免陷入市场混沌。

基金项目

贵州省科技计划项目(黔科合基础-zk[2025]面上 676)。

参考文献

- [1] Li, C., Xu, Y., Yu, X., Ryan, C. and Huang, T. (2017) Risk-Averse Energy Trading in Multienergy Microgrids: A Two-Stage Stochastic Game Approach. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, **13**, 2620-2630. <https://doi.org/10.1109/tii.2017.2739339>
- [2] Mukhopadhyay, S.K., Yue, X. and Zhu, X. (2011) A Stackelberg Model of Pricing of Complementary Goods under Information Asymmetry. *International Journal of Production Economics*, **134**, 424-433. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2009.11.015>
- [3] 邓蔚, 钱伟中, 傅翀, 等. 敌手分类的 Stackelberg 博弈分析[J]. 电子测量与仪器学报, 2011, 25(1): 96-101.
- [4] 王国成. 西方经济学理性主义的嬗变与超越[J]. 中国社会科学, 2012, 33(7): 68-81.
- [5] Rand, D. (1978) Exotic Phenomena in Games and Duopoly Models. *Journal of Mathematical Economics*, **5**, 173-184. [https://doi.org/10.1016/0304-4068\(78\)90022-8](https://doi.org/10.1016/0304-4068(78)90022-8)
- [6] 黄开娇, 肖飞雁. 具有 Beddington-DeAngelis 型功能性反应的随机捕食—被捕食系统[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2018, 36(3): 32-40.
- [7] Askar, S.S. (2021) On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information. *Applied Mathematics and Computation*, **393**, Article 125823. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125823>
- [8] Wei, Z., Tan, W., Elsadany, A.A. and Moroz, I. (2023) Complexity and Chaos Control in a Cournot Duopoly Model Based on Bounded Rationality and Relative Profit Maximization. *Nonlinear Dynamics*, **111**, 17561-17589. <https://doi.org/10.1007/s11071-023-08782-3>
- [9] Yang, X., Peng, Y., Xiao, Y. and Wu, X. (2019) Nonlinear Dynamics of a Duopoly Stackelberg Game with Marginal Costs. *Chaos, Solitons & Fractals*, **123**, 185-191. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.04.007>
- [10] Peng, Y., Lu, Q. and Xiao, Y. (2016) A Dynamic Stackelberg Duopoly Model with Different Strategies. *Chaos, Solitons & Fractals*, **85**, 128-134. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2016.01.024>
- [11] Xiao, Y., Peng, Y., Lu, Q. and Wu, X. (2018) Chaotic Dynamics in Nonlinear Duopoly Stackelberg Game with Heterogeneous Players. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **492**, 1980-1987. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.11.112>
- [12] Wang, C., Pi, J., Zhou, D., Tang, W. and Yang, G. (2023) Dynamics of N-Person Cournot Games with Asymmetric Information and Heterogeneous Expectations. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **618**, Article 128691. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2023.128691>
- [13] Gao, X., Zhong, W. and Mei, S. (2012) Equilibrium Stability of a Nonlinear Heterogeneous Duopoly Game with Extrapolative Foresight. *Mathematics and Computers in Simulation*, **82**, 2069-2078. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2012.04.006>
- [14] Yuan, J. and Zhu, J. (2023) Analysis of Heterogeneous Duopoly Game with Information Asymmetry Based on Extrapolative Mechanism. *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, **27**, 635-648. <https://doi.org/10.1515/snde-2022-0052>
- [15] Frisch, R. (1951) Monopoly, Polypoly: The Concept of Force in the Economy. *International Economic Papers*, **1**, 23-36.

-
- [16] Cable, J. (1994) *Current Issues in Industrial Economics*. Macmillan.
 - [17] 于维生, 于羽. 基于伯川德推测变差的有限理性动态寡头博弈的复杂性[J]. 数量经济技术经济研究, 2013, 30(2): 126-137.
 - [18] 董瑞. 不同理性预期下 Stackelberg 模型的动态复杂性[J]. 系统工程理论与实践, 2017, 37(7): 1761-1767.
 - [19] Li, H., He, R. and Zhou, W. (2022) Dynamic Behaviors in a Cournot Duopoly Model with Knowledge Spillover Effect Based on Constant Conjectural Variation. *Mathematics and Computers in Simulation*, **201**, 305-323. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2022.05.006>
 - [20] Cunningham, L.B., Baldick, R. and Baughman, M.L. (2002) An Empirical Study of Applied Game Theory: Transmission Constrained Cournot Behavior. *IEEE Transactions on Power Systems*, **17**, 166-172. <https://doi.org/10.1109/59.982209>