

时间分数阶 CIR 模型下回望期权的定价问题

杜云康, 许作良*

中国人民大学数学学院, 北京

收稿日期: 2024 年 6 月 3 日; 录用日期: 2024 年 6 月 21 日; 发布日期: 2024 年 7 月 26 日

摘要

本文主要研究了时间分数阶 CIR (Cox-Ingersoll-Ross) 模型下回望期权的定价问题。传统的 CIR 模型由于其对长期记忆效应的忽视, 已无法充分描述金融市场中的一些复杂现象。因此, 本文引入了时间分数阶导数, 以捕捉金融市场中更为复杂的动态特性。在研究过程中, 本文首先利用 Itô 引理和 Δ -对冲原理对时间分数阶 CIR 模型进行了数学推导, 建立了回望期权定价的理论框架。然后, 本文在时间方向与空间方向上使用了有限差分方法对定价公式进行了数值离散处理。最后, 本文进行了数值实验, 数值实验的结果验证了所提出方法的有效性。

关键词

CIR 模型, 时间分数阶, 期权定价, 数值方法

Pricing of Lookback Options under the Time-Fractional CIR Model

Yunkang Du, Zuoliang Xu*

School of Mathematics, Renmin University of China, Beijing

Received: Jun. 3rd, 2024; accepted: Jun. 21st, 2024; published: Jul. 26th, 2024

* 通讯作者。

Abstract

This paper primarily studies the pricing problem of lookback options under the time-fractional CIR (Cox-Ingersoll-Ross) model. The traditional CIR model, due to its neglect of long-term memory effects, can no longer fully describe some complex phenomena in financial markets. Therefore, this paper introduces the time-fractional derivative to capture more complex dynamic characteristics in financial markets. In the research process, this paper first uses Ito's lemma and the Delta-hedging principle to mathematically derive the time-fractional CIR model, establishing the theoretical framework for lookback option pricing. Then, the paper uses the finite difference method in both the time and space directions to numerically discretize the pricing formula. Finally, numerical experiments are conducted, and the results of these experiments validate the effectiveness of the proposed method.

Keywords

CIR Model, Time-Fractional, Option Pricing, Numerical Methods

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在国际金融市场中, 金融衍生产品空前发展, 跨国衍生交易逐年上升, 日益成为投资者多样化投资策略的有力工具。金融衍生品是一种基于基础金融工具的金融合约, 其价值取决于一种或多种基础资产或指数, 合约的基本种类包括远期合约、期货、掉期 (互换) 和期权。期权作为金融衍生品的一种, 可以使投资者获益, 规避风险。期权赋予持有者一种权利 (而非义务), 在特定日期或之前以固定价格购买或出售相应的资产。期权按照到期日的不同可分为欧式期权 (只可以在到期日执行) 和美式期权 (到期日前任意时间可执行)。期权定价是金融市场中一个热门的问题, 但由于大多期权没有显式解, 因此数值求解期权定价问题就显得极为重要了。

期权定价理论起源于法国数学家 Bachelier [1] 在 1900 年的博士论文《投机理论》, 他提出用布朗运动来描述股票价格, 通过推导给出期权定价公式。但是, 股票价格满足布朗运动可能导致

股票价格为负, 这并不符合实际。Samuelson [2] 于 1965 年对此进行了修正, 假设股票价格服从几何布朗运动。1973 年 Black 和 Scholes [3] 基于一系列假设提出经典的 B-S 公式, 至此奠定了期权定价问题的基础。但是由于假设过于苛刻, 因此, 许多学者考虑弱化模型中的假设条件, 提出了新的模型, 主要有随机波动率模型, 随机利率模型, 跳扩散模型, 分数阶模型, 不确定波动率模型等。

Y. d'Halluin(2004) [4] 提出了一种隐式离散化的期权定价方法。采用迭代法结合快速傅里叶变换计算得到跳跃扩散相关积分项, 给出了离散后的惩罚方程在每个时间步上全局收敛的充分条件。Khabir 和 Patidar(2012) [5] 构造了一种基于样条近似的数值方法来求解单资产欧式期权定价问题的非线性 Black-Scholes 偏微分方程。时间离散采用经典的欧拉隐式方法, 空间离散采用 B 样条配点法。结果表明, 该方法是无条件稳定的。

自 1973 年 Black 和 Scholes 提出经典的 B-S 公式以来, 该公式已被广泛应用于金融市场。为了便于计算, B-S 模型假设期权市场波动率与无风险利率均为常数, 但是在实际的金融市场中, 波动率与利率并不是一成不变的, 因此有许多学者对短期利率模型下的期权定价问题进行了研究。常见的利率模型有 CIR 模型 [6], Vasicek 模型 [7], CEV 模型 [8] 等。

Park 等 (2020) [9] 采用了基础资产价格过程及其集成过程的特征函数计算得到了跳跃扩散 CIR 过程下亚洲期权定价算法的解析公式。该函数不需要进行傅里叶反变换或拉普拉斯变换来还原特征函数。Carr 等 (2020) [10] 将热方程的热势法和广义积分变换法推广到贝塞尔过程, 通过数值求解第二类线性 Volterra 方程得到时变 CEV 和 CIR 模型下障碍期权价格的半封闭形式解。计算结果表明, 该方法比前向有限差分法和后向有限差分法更有效。Lv 等 (2023) [11] 基于不确定性理论给出了不确定 CIR 利率模型的分布解。其次, 利用不确定 CIR 利率模型, 得到了脆弱期权的定价公式。最后, 设计了数值算法, 并验证了算法的有效性。

1976 年, Goldman 等 [12] 对欧式回望期权定价问题进行了研究, 得到了具有浮动行权价格的欧式回望期权的价格, 奠定了回望期权定价问题研究的基础。姜礼尚 [13] 对回望期权满足的偏微分方程进行求解, 得到回望期权的定价公式。袁国军和杜雪樵 [14] 考虑了交易成本对期权定价结果的影响, 研究了跳-扩散模型下欧式回望期权的定价问题, 得到了期权所满足的偏微分方程。张艳秋和杜雪樵 [15] 讨论了随机利率下的回望期权定价公式, 使用 Gisanov 定理和伊藤公式, 推导出简便的回望期权定价公式。冯德育 [16] 构建了分数布朗运动下回望期权的定价模型, 对分数布朗运动进行模拟并利用 Monte Carlo 方法求出期权的数值解。黄东南和周圣武 [17] 使用最小二乘蒙特卡洛模拟法研究了标的资产服从跳-扩散过程的美式回望期权定价问题, 进行了数值实验, 得到了期权价格的数值解。顾哲煜 [18] 考虑了标的资产的价格由混合双分数布朗运动驱动, 且期权交易过程支付红利的情况, 使用伊藤公式得到回望期权价格满足的偏微分方程, 采用边界条件和变量替换的方法进行求解, 得到了回望看涨期权定价公式的显式解。

分数阶导数主要有两种形式: Riemann-Liouville 导数 [19] 和 Caputo 导数 [20]。在我们的讨论中, 我们主要关注 Caputo 意义下的分数阶导数。

由于大多数偏微分方程缺乏解析解, 因此需要将方程在时间和空间上离散化。离散 Caputo 时间分数阶导数的常用方法有 Grünwald-Letnikov (GL) 公式和 L1 公式。其中, 离散化后的 GL 公式在时间方向上具有一阶精度, 而 L1 公式在时间方向上具有 $(2-\alpha)$ 阶精度。随后, Gao 等 [21]

引入了具有 $(3-\alpha)$ 阶精度的 L1-2 公式, Alikhanov [22] 提出了具有 $(3-\alpha)$ 阶精度的 L2-1 $_{\sigma}$ 公式, Cao 等 [23] 也将 Caputo 导数的离散化精度提高到了 $(3-\alpha)$ 阶。在最近的研究中, Cao 等 [24] 以及 Mokhtari 和 Mostajeran [25] 将准确率提高到 $(4-\alpha)$ 阶。值得注意的是, 提高精度的过程涉及在 Caputo 导数的积分下对函数进行高阶插值, 使用不同的插值函数可以得到不同的精度。

分数阶导数具有非局部性的特点, 也就是说当前状态不仅受到过去瞬时状态的影响, 还会受到过去一段时间内的状态的影响, 该特点比较符合期权市场。所以, 时间分数阶模型下的期权定价问题是值得探讨的。

Wyss [26] 于 2000 年首次将分形的思想运用到金融领域, 假设原生资产满足分数阶布朗运动, 提出了时间分数阶 Black-Scholes 期权定价模型, 用格林函数求解并给出了欧式期权价格的闭式解。Jumaire(2008) [27] 在经典时间分数阶 Black-Scholes 模型的推导的基础上, 使用 Taylor 公式, 得到了时空分数阶 Black-Scholes 模型。Zhang 等 (2016) [28] 讨论了欧式期权时间分数阶 Black-Scholes 模型 (TFBSM) 的数值模拟。构造了具有空间二阶精度和时间 $2-\alpha$ 阶精度的离散隐式数值格式。Nourian 等 (2022) [29] 通过引入一组新的小波函数来求解时间分数阶 Black-Scholes 方程, 提出了误差估计方法同时给出了数值实验。Taghipour 和 Aminikhah(2022) [30] 提出了一种基于分数阶 Pell 函数的高效谱配置方法, 用于求解时间分数阶 Black-Scholes 方程。在 Pell 多项式的基础上进行变换引入分数阶 Pell 函数, 并寻找这些函数的线性组合的模型解, 给出了数值方法在 Sobolev 空间中的收敛性分析。

在实证分析中, 时间分数阶 Black-Scholes 模型比经典的 Black-Scholes 计算结果更精确, 得到的期权价格更贴合实际。

本文研究了时间分数阶 CIR 模型下回望期权的定价问题, 研究了时间分数阶 CIR 模型下回望期权的定价问题, 使用 Itô 引理和 Δ -对冲原理, 通过一系列推导得到回望期权的定价公式, 接着分别在时间与空间方向用 L1 公式和有限差分方法对方程进行离散, 最后进行数值求解, 数值结果验证了所提出的方法是有效的。

2. 时间分数阶 CIR 模型下回望期权的定价公式

本节给出了时间分数阶 CIR 模型下回望期权的定价公式, 即利率 r 满足

$$dr = a(b - r)dt + \sigma\sqrt{r}dW_t^r, \quad (1)$$

其中 a 为均值回归速度, b 为长期均值水平, $\sigma\sqrt{r}$ 为利率的波动率, 以及 W_t^r 是布朗运动。

2.1. CIR 模型下零息票债券定价模型

利率是不可交换资产。作为利率的载体, 零息票债券在衍生品定价中起到了重要的作用。零息票债券是不支付利息的债券, 通常在到期日按面值支付给债券持有人。因此我们首先给出零息票债券的定价公式, 令 $P(r, t, T)$ 表示 CIR 利率模型下 t 时刻的零息票债券的价格, 由 Kolmogorov

定理与 Feynman-Kac 定理, 可以得到 CIR 模型下零息票债券价格满足以下倒向抛物方程

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + a(b-r) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0, \quad (r \in \mathbb{R}, t \in [0, T]), \quad (2)$$

$$P(r, T) = 1.$$

2.2. 时间分数阶 CIR 模型回望期权定价模型

首先给出以下假设:

- (1) 市场无摩擦, 即没有交易费用与税收;
- (2) 期权有效期内标的资产没有分红;
- (3) 不存在套利机会;
- (4) 允许卖空股票;
- (5) 标的资产价格满足随机过程:

$$dS = rSdt + \sigma_1 S dW_t^S, \quad (3)$$

- (6) 无风险利率满足随机过程:

$$dr = a(b-r)dt + \sigma_2 \sqrt{r} dW_t^r, \quad (4)$$

其中 W_t^S 和 W_t^r 为布朗运动, 且 $Cov(dW_t^S, dW_t^r) = \rho dt$, $\rho \in (-1, 1)$, a, b 为常数。

回望期权为强路径依赖期权, 其收益与路径有关, 假设路径变量为 J , 给出回望期权价格 $V(S, J, r, t)$ 所满足的定价方程。考虑一个投资组合 Π , 其中包含一份衍生证券 $V(S, J, r, t)$, Δ_1 份标的资产 $S(t)$ 和 Δ_2 份零息票债券 $P(r, t)$, 则 t 时刻投资组合 Π 的值为

$$\Pi = V - \Delta_1 S - \Delta_2 P.$$

由 Itô 引理, 可以得到

$$\begin{aligned} d\Pi &= dV - \Delta_1 dS - \Delta_2 dP \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + S \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r} \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} \right) dt \\ &\quad + \left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta_1 \right) dS + \left(\frac{\partial V}{\partial r} - \Delta_2 \frac{\partial P}{\partial r} \right) dr + \Delta_2 \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} \right) dt. \end{aligned} \quad (5)$$

为了消除上式中的随机项, 分别取

$$\Delta_1 = \frac{\partial V}{\partial S}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial V / \partial r}{\partial P / \partial r},$$

代入式 (5), 结合 (2) 式有

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + S \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r} \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} \right) dt - \frac{\partial V / \partial r}{\partial P / \partial r} \left[rP - a(b-r) \frac{\partial P}{\partial r} \right] dt. \quad (6)$$

由无套利原理可知

$$\mathbb{E}(d\Pi) = r\Pi dt,$$

于是, 就得到在 CIR 模型下回望期权满足如下偏微分方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r} \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} \\ + a(b-r) \frac{\partial V}{\partial r} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

由于路径变量 J 对 t 不是可微函数, 因此我们对其进行逼近, 定义

$$J_n(t) = \left[\int_0^t (S_\tau)^n d\tau \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (8)$$

$J_n(t)$ 对 t 是可微的, 满足 $dJ_n(t) = \frac{1}{n} J_n^{1-n}(t) S_t^n dt$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $J = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n(t) = \max_{0 \leq \tau \leq t} S_\tau$, 由 J 的定义可知, $S_\tau \leq J = \max_{0 \leq \tau \leq t} S_\tau$, 当 $S < J$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} J_n^{1-n}(t) S_t^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{J_n}{n} \left(\frac{S}{J_n} \right)^n = 0$; 由于 $\{S = J, 0 \leq J < \infty, 0 \leq t \leq T\}$ 是定解区域的边界, 需要加入一个边界条件

$$\frac{\partial V}{\partial J} \Big|_{S=J} = 0, \quad (9)$$

它的金融意义为期权定价在原生资产价格达到极大值的水平上对极大值的变化是不敏感的。

综上, 我们得到了 CIR 模型下回望看跌期权的定价模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r} \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + a(b-r) \frac{\partial V}{\partial r} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \\ V(S, J, r, T) = J - S, \\ \frac{\partial V}{\partial J} \Big|_{S=J} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

将上式中对时间的整数阶求导替换为时间分数阶导数, 定义为 $\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha}$, 其中, $\alpha \in (0, 1)$, 则有

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha} + \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + S \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r} \rho \frac{\partial^2 V}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + a(b-r) \frac{\partial V}{\partial r} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (11)$$

其中分数阶导数 $\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha}$ 定义为右修正的 Riemann-Liouville 导数

$$\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_t^T \frac{V(S, t') - V(S, T)}{(t' - t)^\alpha} dt', \quad 0 < \alpha < 1.$$

定义时间参数 $t = T - \tau$, $V(t) = U(T - \tau)$, 又由 Caputo 导数 ${}_0^c D_\tau^\alpha V$ 与时间分数阶导数 $\frac{\partial^\alpha V}{\partial t^\alpha}$ 的关系有

$$\begin{aligned}
 D^\alpha V(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T \frac{V(\xi) - V(T)}{(\xi - t)^\alpha} d\xi \\
 &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{-d}{d\tau} \int_{T-\tau}^T \frac{V(\xi) - V(T)}{(\xi - (T - \tau))^\alpha} d\xi \\
 &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{V(T - \eta) - V(T)}{(\tau - \eta)^\alpha} d\eta \\
 &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{U(\eta) - U(0)}{(\tau - \eta)^\alpha} d\eta \\
 &= - \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{U(\eta)}{(\tau - \eta)^\alpha} d\eta - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{U(0)}{(\tau - \eta)^\alpha} d\eta \right] \\
 &= - \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau \frac{U(\eta)}{(\tau - \eta)^\alpha} d\eta - U(0) \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] \\
 &= \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\tau \frac{U'(\eta)}{(\tau - \eta)^\alpha} d\eta \\
 &= -{}_0^c D_\tau^\alpha U(\tau).
 \end{aligned} \tag{12}$$

那么此时方程 (11) 就转化为以下前向时间分数阶偏微分方程

$$\begin{aligned}
 {}_0^c D_\tau^\alpha U &= \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + S \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial r} + \frac{1}{2} \sigma_2^2 r \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} \\
 &\quad + a(b - r) \frac{\partial U}{\partial r} + r S \frac{\partial U}{\partial S} - r U.
 \end{aligned} \tag{13}$$

3. 时间分数阶 CIR 模型下回望期权价格的数值解

上一小节所得到的定价公式的本质是一个二阶抛物型偏微分方程, 众所周知, 大多数偏微分方程没有精确解, 即使我们使用分离变量法进行化简, 仍然有可能无法求解, 所以在本节, 我们对定价公式在时间方向使用 L1 公式, 在空间方向使用有限差分方法进行离散, 然后对得到的离散方程使用 Matlab 求解。

构建三维网格: 以资产价格 S 为 x 轴, 利率 r 为 y 轴, 时间 t 为 z 轴, 同时对求解区域 $\Omega = \{0 \leq S \leq J, 0 \leq r \leq R, 0 \leq t \leq T\}$ 进行网格化: 对区间 $[0, J]$ 进行 M 等分, 区间 $[0, R]$ 进行 N 等分, 以及对区间 $[0, T]$ 进行 K 等分, 即 $\Delta S = \frac{J}{M}, \Delta r = \frac{R}{N}, \Delta t = \frac{T}{K}$, 定义 $U_{i,j}^k$ 为 $S_i = i\Delta S, r_j = j\Delta r, t_k = k\Delta t$ 时的期权价格。

下面, 对上述偏微分方程 (13) 在网格上使用差分格式进行离散, 首先, 在时间方向使用 L1 公式离散

$${}_0^c D_\tau^\alpha U(\tau^k) = \frac{\Delta \tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [b_0 U(\tau^k) - \sum_{l=1}^{k-1} (b_{k-l-1} - b_{k-1}) U(\tau^l) - b_{k-1} U(\tau^0)] + O(\Delta \tau^{2-\alpha}),$$

在空间方向使用有限差分方法离散

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_{i,j}^k}{\partial S} &= \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i-1,j}^k}{2\Delta S}, \quad \frac{\partial^2 U_{i,j}^k}{\partial S^2} = \frac{U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k}{\Delta S^2}, \\ \frac{\partial U_{i,j}^k}{\partial r} &= \frac{U_{i,j+1}^k - U_{i,j-1}^k}{2\Delta r}, \quad \frac{\partial^2 U_{i,j}^k}{\partial r^2} = \frac{U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{\Delta r^2}, \\ \frac{\partial^2 U_{i,j}^k}{\partial S \partial r} &= \frac{U_{i+1,j+1}^k - U_{i+1,j-1}^k - U_{i-1,j+1}^k + U_{i-1,j-1}^k}{4\Delta S \Delta r},\end{aligned}$$

将离散后的差分格式代入式 (13), 得到前向偏微分方程的离散形式

$$\begin{aligned}b_0 U_{i,j}^k - \sum_{l=1}^{k-1} (b_{k-l-1} - b_{k-1}) U_{i,j}^l - b_{k-1} U_{i,j}^0 &= \frac{p\sigma_1^2 S_i^2}{2} \frac{U_{i+1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i-1,j}^k}{\Delta S^2} \\ &+ \frac{p\sigma_2^2 r_j}{2} \frac{U_{i,j+1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j-1}^k}{\Delta r^2} + pa(b - r_j) \frac{U_{i,j+1}^k - U_{i,j-1}^k}{2\Delta r} \\ &+ pr_j S_i \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i-1,j}^k}{2\Delta S} - pr_j U_{i,j}^k \\ &+ pS_i \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r_j} \rho \frac{U_{i+1,j+1}^k - U_{i+1,j-1}^k - U_{i-1,j+1}^k + U_{i-1,j-1}^k}{4\Delta S \Delta r}.\end{aligned}\quad (14)$$

其中 $p = \Delta \tau^\alpha \Gamma(2 - \alpha)$.

归纳整理后可以得到

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{k-1} (b_{k-l-1} - b_{k-1}) U_{i,j}^l - b_{k-1} U_{i,j}^0 \\ &= \frac{pS_i \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r_j} \rho}{4\Delta S \Delta r} U_{i-1,j-1}^k + \left(\frac{p\sigma_1^2 S_i^2}{2\Delta S^2} - \frac{pr_j S_i}{2\Delta S} \right) U_{i-1,j}^k - \frac{pS_i \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r_j} \rho}{4\Delta S \Delta r} U_{i-1,j+1}^k \\ &+ \left(\frac{p\sigma_2^2 r_j}{2\Delta r^2} - \frac{pa(b - r_j)}{2\Delta r} \right) U_{i,j-1}^k - \left(\frac{p\sigma_1^2 S_i^2}{\Delta S^2} + \frac{p\sigma_2^2 r_j}{\Delta r^2} + pr + 1 \right) U_{i,j}^k \\ &+ \left(\frac{p\sigma_2^2 r_j}{2\Delta r^2} + \frac{pa(b - r_j)}{2\Delta r} \right) U_{i,j+1}^k - \frac{pS_i \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r_j} \rho}{4\Delta S \Delta r} U_{i+1,j-1}^k + \left(\frac{p\sigma_1^2 S_i^2}{2\Delta S^2} + \frac{pr_j S_i}{2\Delta S} \right) U_{i+1,j}^k \\ &+ \frac{pS_i \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r_j} \rho}{4\Delta S \Delta r} U_{i+1,j+1}^k,\end{aligned}\quad (15)$$

定义

$$\begin{aligned}d_{i,j}^1 &= \frac{pS_i \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{r_j} \rho}{4\Delta S \Delta r}, \quad d_i^2 = \left[\frac{p\sigma_1^2 S_i^2}{2\Delta S^2} - \frac{pr_j S_i}{2\Delta S} \right], \\ d_j^3 &= \left(\frac{p\sigma_2^2 r_j}{2\Delta r^2} - \frac{pa(b - r_j)}{2\Delta r} \right), \quad d_{i,j}^4 = -\left(\frac{p\sigma_1^2 S_i^2}{\Delta S^2} + \frac{p\sigma_2^2 r_j}{\Delta r^2} + pr + 1 \right), \\ d_j^5 &= \left(\frac{p\sigma_2^2 r_j}{2\Delta r^2} + \frac{pa(b - r_j)}{2\Delta r} \right), \quad d_{i,j}^6 = \left(\frac{p\sigma_1^2 S_i^2}{2\Delta S^2} + \frac{pr_j S_i}{2\Delta S} \right).\end{aligned}$$

将期权价格满足的方程写为矩阵形式

$$\sum_{l=1}^{k-1} (b_{k-l-1} - b_{k-1}) \mathbf{U}^l - b_{k-1} \mathbf{U}^0 = \mathbf{A} \mathbf{U}^k + \mathbf{F},$$

其中 $\mathbf{U}^k = [U_{1,1}^k, \dots, U_{1,N-1}^k, U_{2,1}^k, \dots, U_{2,N-1}^k, \dots, U_{M-1,1}^k, U_{M-1,N-1}^k]^T$.

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{M-2} \\ & & & c_{M-1} & a_{M-1} \end{pmatrix}.$$

$$a_i = \begin{pmatrix} d_{i,1}^4 & d_1^5 & & & \\ d_2^3 & d_{i,2}^4 & d_2^5 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & d_{N-2}^5 \\ & & & d_{N-1}^3 & d_{i,N-1}^4 \end{pmatrix}.$$

$$b_i = \begin{pmatrix} d_{i,1}^6 & d_{i,1}^1 & & & \\ -d_{i,2}^1 & d_{i,2}^6 & d_{i,2}^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & d_{i,N-2}^1 \\ & & & -d_{i,N-1}^1 & d_{i,N-1}^6 \end{pmatrix}.$$

$$c_i = \begin{pmatrix} d_{i,1}^2 & -d_{i,1}^1 & & & \\ d_{i,2}^1 & d_{i,2}^2 & -d_{i,2}^1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -d_{i,N-2}^1 \\ & & & d_{i,N-1}^1 & d_{i,N-1}^2 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{F} = [\phi(1) + d_1^3 U_{1,0} - d_{1,1}^1 U_{2,0}, \phi(2), \dots, \phi(N-2), \\ \phi(N-1) + d_{N-1}^5 U_{1,N} + d_{1,N-1}^1 U_{2,N}, \psi(2), \dots, \psi(M-2), \\ \theta(1) + d_{M-1,1}^1 U_{M-2,0} + d_1^3 U_{M-1,0}, \theta(2), \dots, \theta(N-2), \\ \theta(N-1) - d_{M-1,N-1}^1 U_{M-2,N} + d_{N-1}^5 U_{M-1,N}]^T.$$

$$\phi(j) = d_{1,j}^1 U_{0,j-1} + d_{1,j}^2 U_{0,j} - d_{1,j}^1 U_{0,j+1}, \theta(j) = -d_{M,j}^1 U_{M,j-1} + d_{M,j}^6 U_{M,j} + d_{M,j}^1 U_{M,j+1}, \psi(i) = [d_{i,1}^1 U_{i-1,0} + d_1^3 U_{i,0} - d_{i,1}^1 U_{i+1,0}, 0, \dots, 0, -d_{i,N-1}^1 U_{i-1,N} + d_{N-1}^5 U_{i,N} + d_{i,N-1}^1 U_{i+1,N}]^T.$$

其次, 对边界条件以及初始条件进行离散

$$\text{初始条件: } \tau = 0 \text{ 时, } U_{i,j}^0 = J - S_i, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad j = 0, 1, \dots, N;$$

$$\text{边界条件: } \begin{cases} S = 0 \text{ 时, } & U_{0,j}^k = J, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad K = 0, 1, \dots, K; \\ S = J \text{ 时, } & U_{M,j}^k = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad K = 0, 1, \dots, K; \end{cases}$$

得到期权定价公式的离散格式后, 就可以使用 Matlab 进行求解, 由初始条件以及边界条件, 计算得到终值时刻 $\tau = T$ 时的期权数据, 并对网格进行线性插值, 最后得到资产价格为 S_0 , 利率为 r_0 的期权价格。

4. 数值实验

这一部分我们对上一小节得到的离散后的期权定价公式进行 Matlab 求解, 通过算例验证上述方法的有效性。考虑回望看跌期权, 假设标的资产的初始价格为 85, 90, 95, 100, 初始利率为 0.02, 距离期权到期日为 1 年 ($T=1$), $[s_{min}, s_{max}] = [0, 140]$, $[r_{min}, r_{max}] = [0, 0.25]$, $M = 100$, $N = 100$, 以及其他参数分别选取为 $\alpha = [0.9, 0.7, 0.5, 0.3, 0.1]$, $a = 0.3$, $b = 0.7$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.15$, $\rho = 0.5$ 。

固定上述参数, 以不同的时间步长 ($K=100, 200, 500, 1000$) 来计算期权价格来验证该方法的有效性。将选取的参数输入 Matlab 进行求解, 得到期权价格的数值解。

Table 1. The option prices under different time steps when $\alpha = 0.9$

表 1. $\alpha = 0.9$ 时不同时间步长下的期权价格

初始价格	$K = 100$	$K = 200$	$K = 500$	$K = 1000$
85	24.4501	24.4449	24.4419	24.4409
90	22.0929	22.0882	22.0854	22.0845
95	19.7356	19.7314	19.7289	19.7281
100	17.3784	17.3746	17.3725	17.3717

Table 2. The option prices under different time steps when $\alpha = 0.7$

表 2. $\alpha = 0.7$ 时不同时间步长下的期权价格

初始价格	$K = 100$	$K = 200$	$K = 500$	$K = 1000$
85	26.5401	26.5329	26.5287	26.5274
90	23.9936	23.9871	23.9833	23.9821
95	21.4472	21.4413	21.4379	21.4368
100	18.9007	18.8955	18.8925	18.8915

Table 3. The option prices under different time steps when $\alpha = 0.5$

表 3. $\alpha = 0.5$ 时不同时间步长下的期权价格

初始价格	$K = 100$	$K = 200$	$K = 500$	$K = 1000$
85	28.1772	28.1710	28.1672	28.1660
90	25.4831	25.4774	25.4740	25.4729
95	22.7890	22.7838	22.7808	22.7798
100	20.0948	20.0903	20.0876	20.0867

表 1-表 5 分别给出了不同分数阶 α , 不同的股票价格、时间步长下的期权价格。观察得到, 随着股票价格的上升, 回望看跌期权价格下降。当股票价格不变, 时间步长越来越小时, 期权价格

Table 4. The option prices under different time steps when $\alpha = 0.3$ **表 4.** $\alpha = 0.3$ 时不同时间步长下的期权价格

初始价格	$K = 100$	$K = 200$	$K = 500$	$K = 1000$
85	29.4652	29.4609	29.4583	29.4575
90	26.6551	26.6512	26.6489	26.6481
95	23.8451	23.8415	23.8394	23.8387
100	21.0350	21.0319	21.0300	21.0294

Table 5. The option prices under different time steps when $\alpha = 0.1$ **表 5.** $\alpha = 0.1$ 时不同时间步长下的期权价格

初始价格	$K = 100$	$K = 200$	$K = 500$	$K = 1000$
85	30.4729	30.4713	30.4704	30.4701
90	27.5722	27.5707	27.5698	27.5696
95	24.6714	24.6701	24.6693	24.6691
100	21.7707	21.7695	21.7688	21.7686

逐渐趋于稳定, 从而说明了该方法的有效性。此外, 对比多个表格可以看出, 分数阶 α 的值对期权价格也会产生影响, 随着 α 的减小, 期权价格逐渐增大。

5. 结论

在本文中, 我们研究了时间分数阶 CIR 模型下回望期权的定价问题。通过一系列的推导, 得出时间分数阶 CIR 模型下回望期权所满足的定价公式。接着将公式在时间与空间方向进行离散, 最后使用 Matlab 进行数值求解, 研究了模型中不同参数对期权价格的影响, 数值结果验证了该方法的有效性。

基金项目

国家自然科学基金项目 (No. 12071479)。

参考文献

- [1] Bachelier, L. (1900) Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **17**, 21-86. <https://doi.org/10.24033/asens.476>
- [2] Samuelson, P.A. (2015) Rational Theory of Warrant Pricing. In: Grünbaum, F., van Moerbeke, P. and Moll, V., Eds., *Henry P. McKean Jr. Selecta. Contemporary Mathematicians*, Birkhäuser, 195-232. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22237-0_11
- [3] Black, F. and Scholes, M. (1973) The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654. <https://doi.org/10.1086/260062>

- [4] d'Halluin, Y., Forsyth, P.A. and Labahn, G. (2004) A Penalty Method for American Options with Jump Diffusion Processes. *Numerische Mathematik*, **97**, 321-352.
<https://doi.org/10.1007/s00211-003-0511-8>
- [5] Khabir, M.H.M. and Patidar, K.C. (2012) Spline Approximation Method to Solve an Option Pricing Problem. *Journal of Difference Equations and Applications*, **18**, 1801-1816.
<https://doi.org/10.1080/10236198.2011.596150>
- [6] Cox, J.C., Ingersoll, J.E. and Ross, S.A. (2005) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. In: Bhattacharya, S. and Constantinides, G.M., Eds., *Theory of Valuation*, World Scientific, 129-164. https://doi.org/10.1142/9789812701022_0005
- [7] Vasicek, O. (1977) An Equilibrium Characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, **5**, 177-188. [https://doi.org/10.1016/0304-405x\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405x(77)90016-2)
- [8] Cox, J.C. (1996) The Constant Elasticity of Variance Option Pricing Model. *The Journal of Portfolio Management*, **23**, 15-17. <https://doi.org/10.3905/jpm.1996.015>
- [9] Park, J.J., Jang, H.J. and Jang, J. (2020) Pricing Arithmetic Asian Options under Jump Diffusion CIR Processes. *Finance Research Letters*, **34**, Article 101269.
<https://doi.org/10.1016/j.frl.2019.08.017>
- [10] Carr, P., Itkin, A. and Muravey, D. (2020) Semi-Closed Form Prices of Barrier Options in the Time-Dependent CEV and CIR Models. *The Journal of Derivatives*, **28**, 26-50.
<https://doi.org/10.3905/jod.2020.1.113>
- [11] Lv, G., Xu, P. and Zhang, Y. (2023) Pricing of Vulnerable Options Based on an Uncertain CIR Interest Rate Model. *AIMS Mathematics*, **8**, 11113-11130.
<https://doi.org/10.3934/math.2023563>
- [12] Goldman, M.B., Sosin, H.B. and Gatto, M.A. (1979) Path Dependent Options: "Buy at the Low, Sell at the High". *The Journal of Finance*, **34**, 1111-1127.
<https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1979.tb00059.x>
- [13] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [14] 袁国军, 杜雪樵. 跳-扩散模型中回望期权的定价研究 [J]. 合肥工业大学学报 (自然科学版), 2006, 29(10): 1302-1305.
- [15] 张艳秋, 杜雪樵. 随机利率下的回望期权的定价 [J]. 合肥工业大学学报 (自然科学版), 2007, 30(4): 515-517.
- [16] 冯德育. 分数布朗运动条件下回望期权的定价研究 [J]. 北方工业大学学报, 2009, 21(1): 67-72.
- [17] 黄东南, 周圣武. 基于跳扩散过程的回望期权定价的数值算法 [J]. 大学数学, 2019, 35(1): 14-19.
- [18] 顾哲煜. 混合双分数布朗运动模型下回望期权定价 [J]. 淮海工学院学报 (自然科学版), 2019, 28(1): 8-13.
- [19] Cao, J. and Li, C. (2013) Finite Difference Scheme for the Time-Space Fractional Diffusion Equations. *Open Physics*, **11**, 1440-1456. <https://doi.org/10.2478/s11534-013-0261-x>

-
- [20] Li, C., Chen, A. and Ye, J. (2011) Numerical Approaches to Fractional Calculus and Fractional Ordinary Differential Equation. *Journal of Computational Physics*, **230**, 3352-3368. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2011.01.030>
 - [21] Gao, G., Sun, Z. and Zhang, H. (2014) A New Fractional Numerical Differentiation Formula to Approximate the Caputo Fractional Derivative and Its Applications. *Journal of Computational Physics*, **259**, 33-50. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.11.017>
 - [22] Alikhanov, A.A. (2015) A New Difference Scheme for the Time Fractional Diffusion Equation. *Journal of Computational Physics*, **280**, 424-438. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2014.09.031>
 - [23] Cao, J.Y., Xu, C.J. and Wang, Z.Q. (2014) A High Order Finite Difference/Spectral Approximations to the Time Fractional Diffusion Equations. *Advanced Materials Research*, **875**, 781-785. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amr.875-877.781>
 - [24] Cao, J., Li, C. and Chen, Y. (2015) High-Order Approximation to Caputo Derivatives and Caputo-Type Advection-Diffusion Equations (II). *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **18**, 735-761. <https://doi.org/10.1515/fca-2015-0045>
 - [25] Mokhtari, R. and Mostajeran, F. (2019) A High Order Formula to Approximate the Caputo Fractional Derivative. *Communications on Applied Mathematics and Computation*, **2**, 1-29. <https://doi.org/10.1007/s42967-019-00023-y>
 - [26] Wyss, W. (2000) The Fractional Black-Scholes Equation. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **3**, 51-61.
 - [27] Jumarie, G. (2008) Stock Exchange Fractional Dynamics Defined as Fractional Exponential Growth Driven by (Usual) Gaussian White Noise. Application to Fractional Black-Scholes Equations. *Insurance: Mathematics and Economics*, **42**, 271-287. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2007.03.001>
 - [28] Zhang, H., Liu, F., Turner, I. and Yang, Q. (2016) Numerical Solution of the Time Fractional Black-Scholes Model Governing European Options. *Computers & Mathematics with Applications*, **71**, 1772-1783. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.02.007>
 - [29] Nourian, F., Lakestani, M., Sabermahani, S. and Ordokhani, Y. (2022) Touchard Wavelet Technique for Solving Time-Fractional Black-Scholes Model. *Computational and Applied Mathematics*, **41**, Article No. 150. <https://doi.org/10.1007/s40314-022-01853-y>
 - [30] Taghipour, M. and Aminikhah, H. (2022) A Spectral Collocation Method Based on Fractional Pell Functions for Solving Time-Fractional Black-Scholes Option Pricing Model. *Chaos, Solitons & Fractals*, **163**, Article 112571. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112571>