

基于数据驱动的DD-EWMA模型在港股市场上的金融风险预测

汤敏岚*, 梁译匀, 梁 墨

长沙理工大学数学与统计学院, 湖南 长沙

收稿日期: 2024年7月24日; 录用日期: 2024年8月22日; 发布日期: 2024年9月25日

摘 要

金融风险预测是关于波动性、风险价值(VaR)、期望损失(ES)的预测。本文利用传统的GARCH模型、基于数据驱动的指数加权移动平均(DD-EWMA)模型和数据驱动的神经网络波动率模型来对港股市场进行金融风险预测比较。除此之外, 本文还运用了滚动DD-EWMA模糊波动率模型、滚动神经网络模糊波动率模型以及滚动GARCH模型来预测VaR和ES。最后, 对滚动预测出的VaR和ES分别进行回溯测试, 比较这三个模型优劣。模型证明, 与GARCH模型相比, DD-EWMA模型具有无偏性。与利用传统估计量样本标准差来估计波动率相比, DD-EWMA模型具有稳定性。实证也表明, 这三种模型预测具有高峰度特性的数据的VaR和ES, DD-EWMA波动率模型预测效果最好。

关键词

DD-EWMA模型, VaR, ES, 点预测, 区间预测, 回溯测试

Financial Risk Prediction in Hong Kong Stock Market Based on Data-Driven DD-EWMA Model

Minlan Tang*, Yiyun Liang, Zhao Liang

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: Jul. 24th, 2024; accepted: Aug. 22nd, 2024; published: Sep. 25th, 2024

Abstract

Financial risk prediction is a prediction of volatility, value at risk (VaR) and expected loss (ES). In

*通讯作者。

this paper, the traditional GARCH model, the data-driven index weighted moving average (DD-EWMA) model and the data-driven neural network volatility model are used to forecast and compare the financial risks of the Hong Kong stock market. In addition, this paper also uses rolling DD-EWMA fuzzy volatility model, rolling neural network fuzzy volatility model and rolling GARCH model to predict VaR and ES. Finally, the VaR and ES predicted by rolling are backtested to compare the advantages and disadvantages of these three models. The model proves that the DD-EWMA model is unbiased compared with the GARCH model. The DD-EWMA model is stable compared with the traditional estimator sample standard deviation. The empirical results also show that the volatility models of VaR, ES and DD-EWMA have the best prediction effect on the data with peak degree characteristics.

Keywords

DD-EWMA Model, VaR, ES, Point Forecast, Interval Forecast, Backtesting

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

金融市场不确定性最常见的度量方式就是波动率，波动率在金融市场中定义为金融资产的波动程度，在计量经济学和经济预测中成为最活跃和最成功的研究领域之一。VaR 目前是金融行业中衡量风险的主要方法，而且 VaR 是可用风险度量中最支持使用的风险计量指标。ES 的提出则是为了克服 VaR 中的次可加性并且提供更多尾部信息。VaR 常用的预测模型有历史模拟(HS)、移动平均(MA)、指数加权平均(EWMA)、极值理论(EVT)、广义自回归方差(GARCH)。本文使用参数方法来预测 VaR 和 ES，通过确定对数收益率 r_t 的适当分布并预测波动率，参数方法有更高的精确性和稳定性。假设 $f(x)$ 是对数收益率的条件分布密度函数， $F_r^{-1}(p)$ 表示在重尾概率为 p 时，对数收益率 r_t 的可逆累计分布函数。 $\hat{\sigma}_{t+1}$ 表示的是 $t+1$ 时刻预测的波动率，它是根据过去 t 时刻所有的观测值预测的。最后用下列式子对 VaR 和 ES 进行一步向前的短期预测：

$$VaR_{t+1}(p) = -\hat{\sigma}_{t+1} F_r^{-1}(p). \quad (1)$$

$$ES_{t+1}(p) = -\frac{\hat{\sigma}_{t+1}}{p} \int_{-\infty}^{F_r^{-1}(p)} x f(x) dx. \quad (2)$$

因此，在金融中想要得到波动率才能计算出风险价值(VaR)和期望损失(ES)，一般情况，我们会使用股票价格的对数收益率的标准差作为波动率，而在统计学中，波动率由模型计算出的条件方差开方得到。

D. Ruppert [1]和 J. Danielsson [2]使用 GARCH 模型估计和预测对数收益率 r_t 和条件方差 σ^2 ，波动率模型使用的是去均值收益率。这会导致直接使用波动率 σ 预测 VaR 和 ES 时偏差较大，而 DD-EWMA 模型估计结果具有无偏性，会更加有优势。研究[3]表明一些金融数据是遵循重尾分布例如自由度小于 4 的 student-t 分布，尤其是科技股有时会出现明显的价格波动，GARCH 模型面对这种极端值的处理效果差。A. Thavaneswaranetal 认为 t-garch 模型不能用来预测理论上具有无限锋度的对数收益 r_t 的波动率，然后提出了这种新的基于中心对数回归时变波动率的广义数据驱动的 EWMA (DDEWMA)预测模型，并与 EWMA 模型在美股风险市场上进行实证研究的比较，表明 DD-EWMA 更适合估计具有较大峰度股票收

益率的波动率 σ 。后续 Y. Liang [4] 等人对文献[1]提出的 DD-EWMA 模型进行正则化, 发现使用正则化(包括岭回归、套索回归、弹性网络)后的数据结果更具有稳定性。神经网络(NN)模型是近似多元非线性函数的最常见的方法之一, 它可以均匀和精确地逼近邻域上任何实数非线性函数。J. Frank [5] 和 M. Sing [6] 等人都使用了前馈神经网络波动率模型和区间预测方法进行研究。文献[5]中主要是研究讨论金融数据的 VaR 预测, 而文献[6]则是主要研究股票的模糊期权定价方法。[5]详细介绍了前馈神经网络波动性模型, 并第一次把 R 程序 forecast 包中 nnetar 函数可以运用到金融股票数据中来预测股票收益率的波动率, 结构表明在高科技股票数据预测和估计波动率中, 使用 A. Thavaneswaranetal 提出的新型的前馈神经网络波动率模型具有较小的均方误差(RMSE), 并且预测的 VaR 区间会更窄, 更具稳定性。Zhang [7] 等人分别提出了在正态分布下、偏态 t 分布下和其他分布下的分数驱动指数加权移动平均模型(Score-driven EWMA) 预测波动率的表达式。并在实证研究中比较三个不同分布下 SD-EWMA 的模型, 使用 6 个汇率数据和 6 个代表行业现状的股票数据对 VaR 进行预测, 最后使用回溯测试对这三种模型进行比较, 发现具有时变波动性、自由度和偏度参数的倾斜 student-t 分布的 SD-EWMA 模型在不同的时序序列和不同水平的置信度下, 对 VaR 的预测总体表现最好。R. Hyndman [8] 不仅提出了数据驱动型的模糊布林带方法, 并且研究了夏普比率(SR)的模糊估计和预测。Y. J. Lyu [9] 测试了 7 种广义自回归条件异方差模型(GARCH)和混合数据采样(midas)模型的风险价值(VaR)预测精度, 通过从市场上捕获不同形式的混合频率信息, 提供比传统 GARCH 模型更优越的预测精度。

虽然神经网络的许多模型已经广泛的应用于金融领域, 但多数都是对美国市场或是欧洲市场的一个分析, 少有对港股的研究。同时部分文献在构建金融模型时未考虑模型的稳定性, 基于这样的背景, 本文提出利用 DD-EWMA 模型对港股进行研究预测。本文的组织部分如下, 第二部分我们介绍了理论部分, 即如何使用 DD-EWMA 模型、GARCH 模型和神经网络波动率模型点预测和区间预测 VaR 和 ES, 并滚动数据对 VaR 和 ES 进行滚动预测及它们的区间预测, 第三部分介绍了对滚动预测的 VaR 和 ES 进行回溯测试的理论知识; 第四部分我们进行了实证研究。

2. 基于数据驱动的 VaR 和 ES 的估计和预测

2.1. 基于静态数据驱动的 VaR 和 ES 估计

由于大量的文献基本都是在美股市场上进行 VaR 和 ES 的预测, 因此, 我们想选取在港股市场上具有高峰特性数据的股票预测 VaR 和 ES 最佳的模型。我们使用 2015 年 1 月 1 日至 2021 年 6 月 30 日时间段的数据, 选取 TCL、金山软件、中兴、阿里健康、国美零售、中国中铁这六支股票的对数收益率 $r_t = \log P_t - \log P_{t-1}$ 的 VaR 和 ES 进行点预测和区间预测的计算。六项资产每日对数收益率数据特性见表 1。一般来说, 由于我们使用的是金融股票数据, 它遵循重尾分布, 所以假设这些金融股票数据服从 student-t 分布。

如表 1 所示, 这些股票的对数收益率趋于零, 且峰度较大。根据一阶滞后自相关系数, 对数收益率绝对值 $|r_t|$ 的一阶滞后自相关性和对数收益率的平方 r_t^2 一阶滞后相关性非常明显。根据 $\hat{\rho}$ 计算出的自由度可以确定这些数据的分布, df 小于 4 (样本符号相关性 $\hat{\rho}$ 小于 0.79) 的这些科技股对数收益率的波动率预测相较于传统样本标准差估计量, 更适应于 DD-EWMA 模型, 因为这些技术股票在理论上具有无限的峰度, 因而导致使用 DD-EWMA 模型估计的波动率比使用样本标准差估计的波动率稳定性更好, 利用与文献[1]中相似的方法可以计算两种方法波动率的渐近方差, 结果见表 2。并从中可知使用 DD-EWMA 模型, 其系数都小于 2, 尤其体现在峰度较大的股票收益率, 比如中兴和阿里健康股票数据使用传统的样本标准差估计波动率的方差有 $\frac{10.13\sigma^2}{n}$ 和 $\frac{10.58\sigma^2}{n}$ 。

Table 1. Summary statistics of daily logarithmic returns of all assets**表 1.** 所有资产的每日对数收益汇总统计

asset	mean	SD	k	sk	lag 1 r_i	sample $ r_i $	acf r_i^2	$\hat{\rho}$	df
TCL	0.0003	0.0298	7.7779	0.3338	0.0099	0.1841	0.1625	0.6749	3.4046
金山软件	0.0007	0.0338	5.6161	0.1666	0.0284	0.0737	0.033	0.7011	3.8592
中兴	0.0004	0.0359	38.5184	-1.9919	-0.0358	0.1209	0.0324	0.6318	2.9618
阿里健康	0.0008	0.0384	40.3183	2.8163	-0.0185	0.1957	0.0582	0.6359	2.9945
国美零售	-0.0001	0.0328	14.7165	1.3033	0.0012	0.3238	0.2297	0.627	2.9258
中国中铁	-0.0002	0.0211	6.7291	0.7203	0.0859	0.2494	0.1305	0.6795	3.4711

SD: 标准差; k : 峰度; sk : 对数收益率; $|r_i|$: 对数收益率的绝对值; r_i^2 : 对数收益率的平方; $\hat{\rho}$: 样本符号相关性; df : 由 $\hat{\rho}$ 得出的自由度。

Table 2. DD-EWMA model and asymptotic variance of volatility estimated by sample standard deviation**表 2.** DD-EWMA 模型和样本标准差估计的波动率渐近方差

	AS.Var.con	AS.Var.ewma		AS.Var.con	AS.Var.ewma
TCL	$\frac{2.44\sigma^2}{n}$	$\frac{1.20\sigma^2}{n}$	阿里健康	$\frac{10.58\sigma^2}{n}$	$\frac{1.47\sigma^2}{n}$
金山软件	$\frac{1.90\sigma^2}{n}$	$\frac{1.03\sigma^2}{n}$	国美零售	$\frac{4.18\sigma^2}{n}$	$\frac{1.54\sigma^2}{n}$
中兴	$\frac{10.13\sigma^2}{n}$	$\frac{1.51\sigma^2}{n}$	中国中铁	$\frac{2.18\sigma^2}{n}$	$\frac{1.17\sigma^2}{n}$

根据数据的特性, 我们可知每个资产的形状分布, 并使用 GARCH、DD-EWMA、神经网络波动率模型这三种模型对数据进行拟合估计和预测, 再比较这三种模型的均方误差(RMSE)、运行时间、VaR 和 ES 区间预测的宽度。我们使用算法 3 和算法 2 并利用最近的 1000 个每日对数收益率数据分别对 GARCH(1,1)模型和神经波动率模型进行拟合; 然后使用算法 1 并利用 500 个数据对 DD-EWMA 模型进行训练, 估计和预测窗口为 1000 天, 每个股票价格的当前头寸值为 1000 港元。

我们通过模型拟合估计的波动率 $\hat{\sigma}$ 和文献[1]中的方程(4)计算得到的波动率来计算每个模型中每支股票的均方误差(RMSE)。对于 VaR 和 ES 的区间预测, 可先计算出波动率的区间预测, 再计算 VaR 和 ES 的区间预测。使用 DD-EWMA 模型、GARCH 模型和神经网络波动率模型这三种模型的波动率的区间预测为

$$\sigma(\alpha) = (LL^\alpha, UL^\alpha) = \hat{\sigma} \pm cv_\alpha sd(\hat{\sigma}) / \sqrt{n}$$

其中 cv_α 表示 α 的临界值。

2.2. 基于动态数据驱动的滚动 VaR 和 ES 的预测

表 1 所示对数收益率的绝对值样本自相关性比较显著, 这表明时变波动性模型更适合于 VaR 和 ES 的预测。基于过去对数收益率的数据, 我们计算得出样本符号相关性 $\hat{\rho}$ 和观测到的波动率。DD-EWMA 的最优平滑参数 α 可通过最小化一步向前的预测误差平方和(FESS)得出。并利用最优 α , 我们递归计算平滑值 S_t , 然后计算出最后一天最优的平滑值作为波动率预测。对于一个发生时间变化的波动率 σ_t , 在

时间为 t 时的平滑统计量 S_t 等于最近的波动率观测值 σ_t 和之前的平滑值 S_{t-1} 的加权平均:

$$S_t = \alpha \sigma_t + (1 - \alpha) S_{t-1}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

算法 1. 使用 DD-EWMA 模型对 VaR 和 ES 进行点预测

Require: 对数收益率 r_t , $t=1, 2, \dots, n$ from $r_t = P_t - P_{t-1}$

- 1: $\hat{\rho} \leftarrow \text{Corr}(r_t - \bar{r}, \text{sign}(r_t - \bar{r}))$ (计算样本相关性)
- 2: $Z_t \leftarrow |r_t - \bar{r}| / \hat{\rho}$ (计算观测到的对数收益率的波动率)
- 3: $S_0 \leftarrow \bar{Z}_k$ (使用前 k 个观测值来表示初始的波动率预测)
- 4: $\alpha \leftarrow (0.01, 0.8)$ by 0.01 (设置 α 的范围)
- 5: $S_t \leftarrow \alpha * Z_t + (1 - \alpha) * S_{t-1}$, $t=1, 2, \dots, n$
- 6: $\alpha_{opt} \leftarrow \min_{\alpha} \sum_{t=k+1}^n (Z_t - S_{t-1})^2$ (通过最小均方 FESS 选取最优 α)
- 7: $S_t \leftarrow \alpha_{opt} * Z_t + (1 - \alpha_{opt}) * S_{t-1}$
- 8: $\hat{\sigma}^{r,DD} \leftarrow S_n$ (基于 n 个观测值, 使用 DD-EWMA 方法计算对数收益率 r_t 一步向前的波动率预测)
- 9: $RMSE^{r,DD} \leftarrow \sum_{t=k+1}^n (Z_t - S_{t-1}^2) / (n - k)$ (计算最小均方 RMSE)
- 10: $\nu \leftarrow \text{Solve } 2\sqrt{\nu - 2} = \hat{\rho}(\nu - 1)\beta[\nu/2, 1/2]$ (计算对数收益率 r_t 的条件分布的自由度)
- 11: $VaR_{n+1}^{r,DD} \leftarrow -\hat{\sigma}^{r,DD} F_r^{-1}(p)$ (VaR 预测)
- 12: $ES_{n+1}^{r,DD} \leftarrow -\frac{\hat{\sigma}^{r,DD}}{p} \int_{-\infty}^{F_r^{-1}(p)} x f(x) dx$ (ES 预测)
- 13: Return $\alpha_{opt}, \hat{\sigma}^{r,DD}, RMSE^{r,DD}, VaR_{n+1}^{r,DD}, ES_{n+1}^{r,DD}$

第一次 k 个观测值作为初始平滑值 S_0 :

$$S_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|r_i - \bar{r}|}{\hat{\rho}}.$$

波动率预测的均方误差(RMSE)计算:

$$\sum_{t=k+1}^n \frac{(\hat{\sigma}_t - S_{t-1})^2}{n - k}.$$

算法 2. 使用神经网络波动率模型对 VaR 和 ES 进行点预测

Require: 对数收益率 r_t , $t=1, 2, \dots, n$ from $r_t = P_t - P_{t-1}$

- 1: $\hat{\rho} \leftarrow \text{Corr}(r_t - \bar{r}, \text{sign}(r_t - \bar{r}))$ (计算样本相关性)
- 2: $\text{vol}_t \leftarrow |r_t - \bar{r}| / \hat{\rho}$ (计算对数收益率 r_t 观测到的波动率)
- 3: $\text{Vol.nnet} \leftarrow \text{nnetar}(\text{Vol})$ (使用 R 语言函数 `nnetar` 计算神经网络模型对数收益率 r_t 的波动率)
- 4: $\hat{\sigma}^{r,DD} \leftarrow \text{forecast}(\text{Vol.nnet}, h=1) \backslash \mean (使用神经网络模型计算一步向前的波动率预测)
- 5: $RMSE^{r,NN} \leftarrow \sqrt{\text{mean}((\text{vol}_t - \text{Vol.nnet}\$fitted))^2}$ (计算均方误差 RMSE)
- 6: $VaR_{n+1}^{r,NN} \leftarrow -\hat{\sigma}^{r,NN} F_r^{-1}(p)$ (VaR 预测)
- 7: $ES_{n+1}^{r,NN} \leftarrow -\frac{\hat{\sigma}^{r,NN}}{p} \int_{-\infty}^{F_r^{-1}(p)} x f(x) dx$ (ES 预测)
- 8: Return $\hat{\sigma}^{r,DD}, RMSE^{r,NN}, VaR_{n+1}^{r,NN}, ES_{n+1}^{r,NN}$

神经网络波动率模型同样使用文献[1]中的方程(5)获得观测到的股票对数收益率, 并把其作为输入值进行拟合估计和预测。我们使用 R 程序 `forecast` 包中 `nnetar` 函数计算神经网络波动率预测。我们使用 GARCH 族模型中 GARCH(1,1)来估计股票对数收益率的条件方差, 然后开方得到波动率的估计, 最后一天拟合估计的条件方差通过 $\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha_1 r_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2$ 递归方程开方得出波动率的预测。上述方法计算得出的滚动的每日波动率预测, 最后根据方程(1)和方程(2)计算出滚动的每日 VaR 和 ES 预测。得到滚动的每日 VaR 和 ES 预测后, 我们可以通过所有滚动窗口的每日 VaR 和 ES 预测来计算滚动窗口 VaR 和 ES 的区间估计, 即

算法 3. 使用 GARCH 模型对 VaR 和 ES 进行点预测

Require: 对数收益率 $r_t, t=1,2,\dots,n$ from $r_t = P_t - P_{t-1}$

1: $g \leftarrow \text{garchFit}(\sim \text{garch}(1,1), r_t, \text{cond.dist} = "std",$

$\text{include.mean} = \text{FALSE}, \text{trace} = \text{FALSE})$

(使用 R 语言函数 `garchFit` 把对数收益率 r_t 进行 GARCH(1,1)模型拟合)

2: $\omega \leftarrow g@fit\$matcoef[1,1]; \alpha_1 \leftarrow g@fit\$matcoef[2,1]; \beta_1 \leftarrow g@fit\$matcoef[3,1]$

(得到 GARCH(1,1)模型参数)

3: $df \leftarrow g@fit\$matcoef[4,1]$ (得到由 GARCH(1,1)模型拟合出的对数收益率 r_t 的条件分布的自由度)

4: $\text{vol.garch}_t \leftarrow g@sigma.t$ (得到 GARCH(1,1)模型的估计的波动率)

5: $\hat{\sigma}^{r,GG} \leftarrow \omega + \alpha_1 r_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2$ (计算使用 GARCH(1,1)模型的波动率预测)

6: $\text{vol}_t \leftarrow |r_t - \bar{r}| / \hat{\rho}$ (计算对数收益率 r_t 观测到的波动率)

7: $\text{RMSE}^{r,GG} \leftarrow \sqrt{\text{mean}((\text{vol.garch}_t - \text{vol}_t)^2)}$ (计算均方误差 RMSE)

8: $\text{VaR}_{n+1}^{r,GG} \leftarrow -\hat{\sigma}^{r,GG} F_r^{-1}(p)$ (VaR 预测)

9: $\text{ES}_{n+1}^{r,GG} \leftarrow -\frac{\hat{\sigma}^{r,GG}}{p} \int_{-\infty}^{F_r^{-1}(p)} x f(x) dx$ (ES 预测)

10: Return $\hat{\sigma}^{r,GG}, \text{RMSE}^{r,GG}, \text{VaR}_{n+1}^{r,GG}, \text{ES}_{n+1}^{r,GG}$

$$\overline{\text{Daily.VaR}(\alpha)} = (LL^{\text{Daily.VaR}}, UL^{\text{Daily.VaR}}) = \text{mean}(\text{Daily.VaR}_i) \pm cv_\alpha \text{sd}(\text{Daily.VaR}_i) / \sqrt{n}. \quad (4)$$

$$\overline{\text{Daily.ES}(\alpha)} = (LL^{\text{Daily.ES}}, UL^{\text{Daily.ES}}) = \text{mean}(\text{Daily.ES}_i) \pm cv_\alpha \text{sd}(\text{Daily.ES}_i) / \sqrt{n}. \quad (5)$$

算法 4. 使用三种模型对 VaR 和 ES 进行区间预测

Require: 对数收益率 $r_t, t=1,2,\dots,n$ from $r_t = P_t - P_{t-1}$

1: $\hat{\sigma} \leftarrow \hat{\sigma}^{r,DD}$ (使用算法 1 中 DD-EWMA 方法计算对数收益率 r_t 波动率预测)

2: $\hat{\sigma} \leftarrow \hat{\sigma}^{r,NN}$ (使用算法 2 中神经网络方法计算对数收益率 r_t 波动率预测)

3: $\hat{\sigma} \leftarrow \hat{\sigma}^{r,GG}$ (使用算法 3 中 GARCH(1,1)模型计算对数收益率 r_t 波动率预测)

4: α cut of $\sigma \leftarrow (LL^\sigma, UL^\sigma) = \hat{\sigma} \pm cv_\alpha * \text{sd}(\hat{\sigma}) / \sqrt{n}$

(基于 $\hat{\sigma}^{r,DD}, \hat{\sigma}^{r,NN}$ and $\hat{\sigma}^{r,GG}$ (计算对数收益率 r_t 的波动率区间预测))

5: α cut of VaR $\leftarrow (-LL^\sigma F_r^{-1}(p), -UL^\sigma F_r^{-1}(p))$ (使用三种方法计算 VaR 区间预测)

6: α cut of ES $\leftarrow \left(-\frac{LL^\sigma}{p} \int_{-\infty}^{F_r^{-1}(p)} x f(x) dx, -\frac{UL^\sigma}{p} \int_{-\infty}^{F_r^{-1}(p)} x f(x) dx \right)$ (使用三种方法计算 ES 区间预测)

7: Return α cut of σ, α cut of VaR, α cut of ES

3. VaR 和 ES 的回溯测试

要评估滚动预测的 VaR 和 ES 不同方案的性能,最常用的是使用回溯测试。我们将置信水平为 $(1-\alpha)$ 下 $VaR = -r_\alpha$ 定义为

$$r_\alpha = \sup\{r^* \mid P(r < r^*) \leq \alpha\}.$$

Chen 和 Lu (2010)认为 r_α 的值是高度依赖于 r_t 的分布假设, r_α 分布的肥尾性和波动性的变化之间是存在着平衡。当 r_t 为 student-t 分布时,波动率的变化与正态分布相比,对极端实际的收益率反应会更低。因此,使得计算出的 VaR 对突变波动率的变化反应减弱。因此,与正态分布相比之下,如果有偶然的尾部观察,基于 student-t 分布的模型在预测窗口期间提供了一个更好和更稳健的波动率。此外,与固定置信水平的高斯分布相比,基于 student-t 分布的 VaR 在置信水平为 $(1-\alpha)$ 下的尾部位置更远。这些平衡导致了不同的预测方法的相对性能,这只能通过不同置信水平 $(1-\alpha)$ 和不同的数据集进行实证研究。

为了评估三种模型估计的滚动每日 VaR 结果的优劣,我们考虑了一些尾部概率预测质量的标准检验: UC 测试(无条件覆盖检验)、IN 测试(独立性检验)和 CC 测试(覆盖率测试和独立性测试的联合测试)。所有的这些检验都是基于似然比(LR)的检验。一个好的 VaR 模型应该是一致的,因为 VaR 偏离的比例,即事件 $\{r_t < -VaR_t\}$ 在大样本中应该等于 α 。定义 VaR 偏离的指标为

$$I_t = P\{r_t < -VaR_t\}.$$

在时间段 T 内 VaR 的偏离次数为 $N = \sum_{t=1}^T I_t$ 。一个好的 VaR 模型应该产生连续独立的 I_t 。我们的后置测试方法都与良好的覆盖率、序列的独立性或两者都相关。Kupiec (1995)测试为 VaR 模型的无条件覆盖率测试(UC 测试),我们根据上述 VaR 的偏离次数,假设 VaR 偏离的概率在第 t 天为 η_t 。因此,我们对 VaR 偏离的原假设为

$$H_0: \eta B(p).$$

B 表示为伯努利分布。伯努利的分布密度为

$$(1-p)^{1-\eta_t} p^{\eta_t}, \eta_t = 0, 1.$$

概率 p 可以估计为

$$\hat{p} = \frac{v_1}{W_T}.$$

那么似然函数为

$$L_U(\hat{p}) = \prod_{t=W_E+1}^T (1-\hat{p})^{1-\eta_t} \hat{p}^{\eta_t} = (1-\hat{p})^{v_0} \hat{p}^{v_1}.$$

其中,在 $W_E + 1$ 至 T 时间段内为预测测试窗口。这个似然函数的值可以无穷大,因此,我们为了限制它,让估计的概率 \hat{p} 比上概率 p 。在原假设 H_0 下, $p = \hat{p}$, 所以, 概率 p 的似然函数为

$$L_R(p) = \prod_{t=W_E+1}^T (1-p)^{1-\eta_t} p^{\eta_t} = (1-p)^{v_0} p^{v_1}.$$

并且,我们使用似然比去测试 $L_R = L_U$,

$$\begin{aligned}
 LR &= 2(\log L_U(p) - \log L_U(\hat{p})) \\
 &= 2 \log \frac{(1-\hat{p})^{v_0} (1-\hat{p})^{v_1}}{(1-p)^{v_0} p^{v_1}} \\
 &\stackrel{\text{asymptotic}}{\sim} \chi^2(1)
 \end{aligned} \tag{6}$$

如果选择 5% 作为测试的显著性水平，那么原假设的拒绝域为 $LR > 3.84$ ，但是在绝大多数情况下我们只需要计算和比较 p 值。并且显著性水平的选择影响着测试的性能，显著性水平低，第一类错误会变低，则意味着第二类错误更高。这个对 VaR 的回溯测试是不需要参数的，也就是说对所有的分布都可以使用它进行测试。

Christoffersen (1998) 提出了 VaR 的偏离指标 I_t 的独立性测试 (IN 测试)。因为我们不仅对 VaR 的覆盖率感兴趣，也对 VaR 偏离的集聚性有兴趣。我们需要计算在之前 VaR 没有偏离时，VaR 连续偏离和偏离的两种概率，即

$$p_{ij} = P(\eta_t = i | \eta_{t-1} = j).$$

其中， i 和 j 表示为 0 或 1。

相应的一阶马尔可夫链的转移矩阵为

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1-p_{01} & p_{01} \\ 1-p_{11} & p_{11} \end{bmatrix}.$$

那么上述转移矩阵的似然函数为

$$L_R(\Pi_1) = (1-p_{01})^{v_{00}} p_{01}^{v_{01}} (1-p_{11})^{v_{10}} p_{11}^{v_{11}}.$$

其中， v_{ij} 表示为从 i 转移到 j 的观测数。通过求 $L_R(\Pi)$ 最大化，得到最大似然估计值 (ML) 为：

$$\hat{\Pi}_1 = \begin{bmatrix} \frac{v_{00}}{v_{00} + v_{01}} & \frac{v_{01}}{v_{00} + v_{01}} \\ \frac{v_{10}}{v_{10} + v_{11}} & \frac{v_{11}}{v_{10} + v_{11}} \end{bmatrix}.$$

原假设为 VaR 偏离没有集聚性，那么则意味着 VaR 今天偏离的概率不决定 VaR 明天偏离的概率。那么， $p_{01} = p_{11} = p$ ，转移矩阵的估计可以写为

$$\Pi_0 = \begin{bmatrix} 1-\hat{p} & \hat{p} \\ 1-\hat{p} & \hat{p} \end{bmatrix}.$$

其中

$$\hat{p} = \frac{v_{01} + v_{11}}{v_{00} + v_{10} + v_{01} + v_{11}}.$$

根据原假设，使用估计转移矩阵得出的似然函数为

$$L_U(\hat{\Pi}_0) = (1-\hat{p})^{v_{00}+v_{10}} \hat{p}^{v_{01}+v_{11}}.$$

那么，似然比为

$$LR = 2(\log L_U(\hat{\Pi}_0) - \log L_R(\hat{\Pi}_1)) \stackrel{\text{asymptotic}}{\sim} \chi^2(1). \tag{7}$$

并且这个独立性测试(IN 测试)的值并不取决于真实 p 值。

我们也可以把这两个测试联合起来,既有 VaR 的覆盖率测试也有 VaR 偏离指标 I_t 的独立性测试。下列是 UC 测试的统计量

$$LR(joint) = LR(coverage) + LR(independence) \sim \chi^2(2). \tag{8}$$

相对于 VaR 的回溯测试,ES 的回溯测试更难,因为我们测试的是期望而不是一个分位数。但我们可以用一个简单的方法对 ES 进行回溯测试。假设在 T 这段时间, VaR 是偏离的,那么标准话损失 NS_t 可以计算为

$$NS_t = \frac{y_t}{ES_t}.$$

其中, ES_t 表示为在第 t 天观测到的 ES。根据 ES 的定义,当 VaR 是偏离的, y_t 的期望为

$$\frac{E(Y_t | Y_t < -VaR_t)}{ES_t} = 1.$$

因此,均值 NS 记为 \overline{NS} ,应该等于 1。因此,我们原假设为

$$H_0: \overline{NS} = 1.$$

通过计算每个模型的均值 NS ,若数值越接近于 1,则表示模型计算 ES 越准确。

4. 实证研究

我们利用算法 1、算法 2 和算法 3 中的 DD-EWMA 方法、神经网络波动率模型、GARCH 模型计算 VaR 和 ES 的点预测并得到表 3、表 4 和表 5。在这些表格中还分别提供了上述三种模型的波动率点预测、均方误差(RMSE)以及每支股票使用此方法需要的时间。此外,DD-EWMA 模型的最优平滑参数 α 是根据后 1000 个数据最小化一步向前的预测误差平方和(FESS)得出,见表 3 第一列。而 VaR 和 ES 是利用方程(1)和(2)在 $p=0.01$ 计算得出的。金山软件、国美零售拥有较高的 VaR 和 ES 预测,而 TCL 和中国中铁的 VaR 和 ES 是最低的。根据表 3、表 4 和表 5 数据发现,神经网络波动率模型的均方误差(RMSE)最小,DD-EWMA 模型的均方误差次之,使用 GARCH 模型的均差误差最大。但是 DD-EWMA 模型和神经网络波动率模型这两个模型的 RMSE 相差较小,相差 0.0005 左右。我们再从运行时间角度比较,使用 DD-EWMA 模型的运行时间非常短,可以瞬间出来结果;使用神经网络波动率模型在这三个模型当中运行时间最长。并且 DD-EWMA 模型有公式能具体表达出来,但是神经网络波动率模型是一个黑匣子,没有具体的公式。综上所述,使用 DD-EWMA 模型对 r_t 的波动率进行点预测是最好的。

Table 3. Using DD-EWMA asset risk prediction
表 3. 使用 DD-EWMA 资产风险预测

asset	α	RMSE	Vd	VaR	ES	time
TCL	0.0600	0.0313	0.0246	65.3109	95.7393	0.0000
金山软件	0.0300	0.0332	0.0322	85.4928	120.3320	0.0100
中兴	0.1000	0.0492	0.0231	60.4831	93.8246	0.0000
阿里健康	0.0500	0.0336	0.0262	68.5852	105.8650	0.0000
国美零售	0.1300	0.0357	0.0343	89.5233	139.6614	0.0000
中国中铁	0.0400	0.0166	0.0126	33.5642	48.8666	0.0200

Table 4. Using neural network volatility model asset risk prediction
表 4. 使用神经网络波动率模型资产风险预测

asset	RMSE	Vol	VaR	ES	time
TCL	0.0307	0.0164	43.6481	63.9838	14.9100
金山软件	0.0295	0.0316	83.9183	118.1159	2.1200
中兴	0.0428	0.0358	93.6388	145.2576	1.0300
阿里健康	0.0330	0.0168	43.9752	67.8781	7.9400
国美零售	0.0352	0.0385	100.4152	156.6534	5.8000
中国中铁	0.0166	0.0143	37.9924	55.3136	2.4300

Table 5. Using GARCH(1,1) model asset risk prediction
表 5. 使用 GARCH(1,1)模型资产风险预测

asset	RMSE	Vol	VaR	ES	time
TCL	0.0353	0.0248	65.8396	95.0365	0.2600
金山软件	0.0347	0.0291	76.7797	105.4605	0.1900
中兴	0.0638	0.0224	56.7130	92.0744	0.2000
阿里健康	0.0398	0.0262	69.5813	97.2839	0.1400
国美零售	0.0398	0.0411	109.2095	55.6520	0.1100
中国中铁	0.0211	0.0123	32.7023	45.4319	0.1700

利用算法 4, VaR 和 ES 在 $\alpha = 0.05$ 的区间预测并生成表 6、表 7 和表 8。根据三种模型提供的 VaR 和 ES 的区间预测,我们发现使用 DD-EWMA 模型和 GARCH(1,1)模型除了预测国美零售港股股票的 VaR 和 ES 区间宽度较长,为 6 左右;其余 5 支股票预测 VaR 和 ES 的置信区间都比较窄,区间宽度为 3 左右。其中,相较于 GARCH(1,1)模型,使用 DD-EWMA 模型预测的 VaR 和 ES 的区间宽度略短一些。并且使用神经网络模型预测的 VaR 和 ES 置信区间最长,为 6 左右。因此,我们可知上述三种模型预测 VaR 和 ES 都比较稳健,但是使用 DD-EWMA 模型预测的风险度量在预测具有高峰特性股票市场上是三种模型稳健的。与上述表 3、表 4 和表 5 的点预测结合来看,使用 DD-EWMA 方法预测 VaR 和 ES 的效果最好。此外,它们还提供了使用三种模型的每日平均波动率估计量。

Table 6. Using DD-EWMA model of 0.05-cuts to predict VaR and ES
表 6. 使用 DD-EWMA 模型的 0.05-cuts 的 VaR 和 ES 预测

asset	DD-EWMA	0.05-cut of vol	0.05-cut of VaR	0.05-cut of ES
TCL	0.0292	(0.0239, 0.0252)	(63.6261, 66.9956)	(93.2696, 98.2090)
金山软件	0.0334	(0.0318, 0.0327)	(84.2773, 86.7082)	(118.6212, 122.0428)
中兴	0.0362	(0.0222, 0.0240)	(58.1498, 62.8163)	(90.2051, 97.4441)
阿里健康	0.0353	(0.0257, 0.0267)	(67.2341, 69.9363)	(103.7794, 107.9505)
国美零售	0.0305	(0.0333, 0.0354)	(86.7690, 92.2775)	(135.3647, 143.9582)
中国中铁	0.0197	(0.0124, 0.0129)	(32.9122, 34.2162)	(47.9172, 49.8159)

Table 7. VaR and ES prediction of 0.05-cuts using neural network volatility mode

表 7. 使用神经网络波动率模型的 0.05-cuts 的 VaR 和 ES 预测

asset	DD-EWMA	0.05-cut of vol	0.05-cut of VaR	0.05-cut of ES
TCL	0.0300	(0.0152, 0.0176)	(40.4409, 46.8553)	(59.2824, 68.6853)
金山软件	0.0348	(0.0312, 0.0321)	(82.7625, 85.0740)	(116.4891, 119.7427)
中兴	0.0403	(0.0351, 0.0366)	(91.6368, 95.6409)	(142.1519, 148.3632)
阿里健康	0.0333	(0.0158, 0.0178)	(41.4242, 46.5262)	(63.9405, 71.8157)
国美零售	0.0311	(0.0373, 0.0397)	(97.3262, 103.5042)	(151.8344, 161.4724)
中国中铁	0.0170	(0.0141, 0.0145)	(37.4020, 38.5828)	(54.4541, 56.1732)

Table 8. Using GARCH(1,1) model of 0.05-cuts to predict VaR and ES

表 8. 使用 GARCH(1,1)模型的 0.05-cuts 的 VaR 和 ES 预测

asset	DD-EWMA	0.05-cut of vol	0.05-cut of VaR	0.05-cut of ES
TCL	0.1722	(0.0242, 0.0254)	(64.2729, 67.4062)	(92.7751, 97.2978)
金山软件	0.1884	(0.0287, 0.0295)	(75.7199, 77.8394)	(104.0049, 106.9161)
中兴	0.2113	(0.0203, 0.0245)	(51.3927, 62.0334)	(83.4367, 100.7121)
阿里健康	0.1821	(0.0258, 0.0267)	(68.4933, 70.6693)	(95.7627, 98.8050)
国美零售	0.1685	(0.0403, 0.0419)	(107.1996, 111.2193)	(152.7874, 158.5166)
中国中铁	0.1319	(0.0121, 0.0126)	(32.1432, 33.2614)	(44.6552, 46.2087)

图 1 表示的是这三种模型对中兴股票对数收益率的波动率的估计和预测以及观测到的波动率的图形。其中，黑色线条表示观测到的波动率，红色线条表示的是 DD-EWMA 模型对中兴股票对数收益率的波动率的估计，绿色线条是神经网络波动率模型对波动率的拟合，蓝色线条是 GARCH(1,1)模型对波动率的估计，紫色线条则是观测到的波动率的标准差。

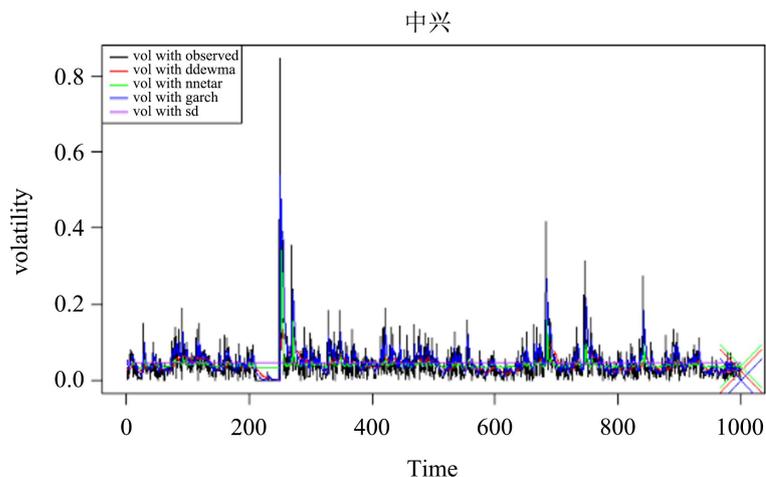


Figure 1. Comparison of the estimated and observed volatility of the SP500

图 1. SP500 估计的和观测到的波动率比较

而图中特殊符号“X”表示的是这三种模型对波动率的预测。可以看出，GARCH(1,1)模型对波动率的预测与其他两种模型(DD-EWMA)模型和神经网络波动率模型)相差很大，DD-EWMA 模型和神经网络波动率模型对波动率的预测是非常接近的。

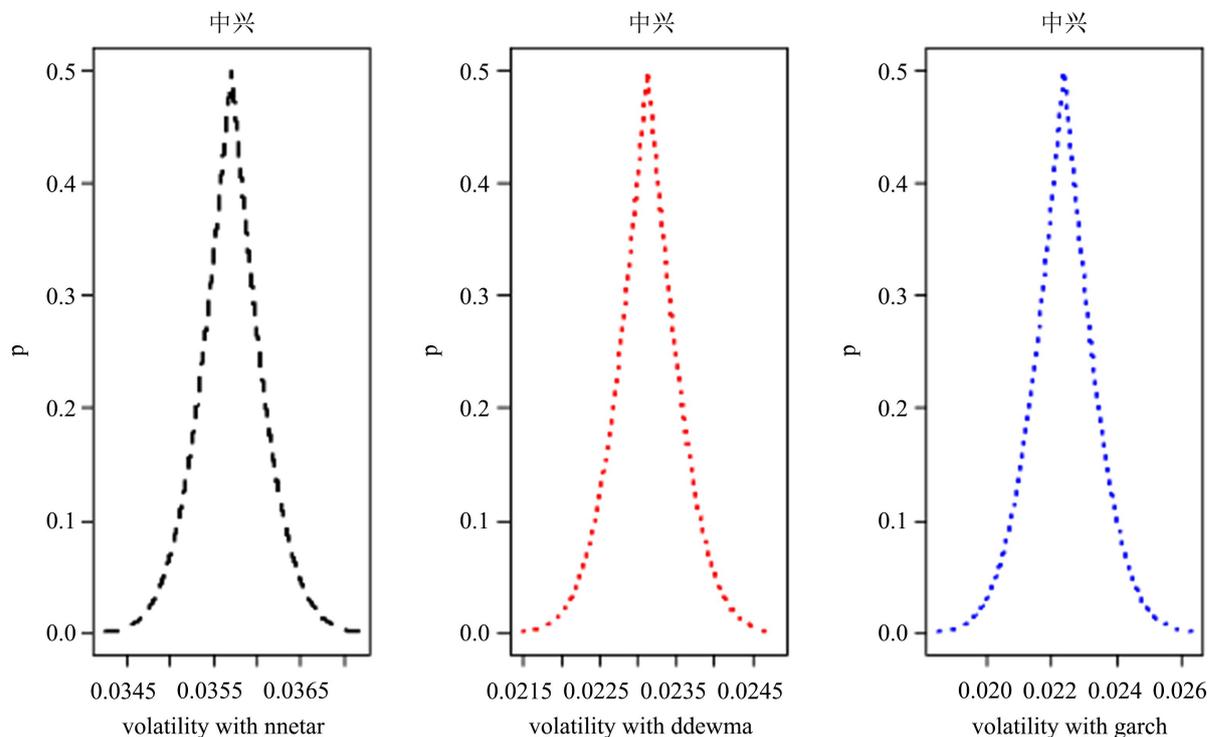


Figure 2. Comparative forecast of the range of SP500 volatility

图 2. SP500 波动率的区间预测比较

图 2 显示的是 DD-EWMA 模型、神经网络波动率模型和 GARCH(1,1)模型这三种模型对中兴股票对数收益率的波动率的区间预测，黑色线条、红色线条、蓝色线条分别表示的是使用神经网络波动率模型、DD-EWMA 模型和 GARCH(1,1)模型对波动率的区间预测，我们利用方程(3)在 $p = (0, 0.5)$ 的区间下计算波动率的区间估计。图 2 中，很明显使用这三种模型预测的波动率的置信区间都很窄，宽度不超过 0.01 可以认为 DD-EWMA 模型、GARCH(1,1)模型和神经网络波动率模型对波动率的预测是稳健的。其中，神经网络波动率模型波动率的区间宽度最窄，为 0.002；再是 DD-EWMA 模型波动率的区间宽度为 0.003；这说明两个模型在港股市场上预测具有高峰特性数据的股票稳健性差不多。而 GARCH(1,1)模型波动率的区间宽度为 0.006。从而得出在这个数据特性中使用 GARCH 模型与其他两个模型相比并没有优势。

5. 结论

VaR 目前已成为金融行业中衡量风险的主要方法，而且 VaR 是可用风险度量之间的最佳平衡，是最支持最实用的风险模型。而 ES 则克服了 VaR 中的次可加性并且提供更多 r_t 的尾部信息。波动率预测在投资者和金融中介机构的资产估值和风险管理中起着重要作用。本文使用 DD-EWMA 模型、神经网络波动率模型和 GARCH(1,1)模型这三种模型对波动率、VaR 和 ES 进行点预测、区间预测和滚动预测的比较。模型证明，相比较 GARCH 模型，DD-EWMA 模型预测金融数据的波动率具有无偏性。而相较使用传统估计量样本标准差来估计波动率，DD-EWMA 模型预测高科技股票数据的波动率具有稳定性。在实证研

究中也发现这三种模型预测具有高峰度特性的数据的 VaR 和 ES, DD-EWMA 波动率模型预测效果是最好的。

参考文献

- [1] Ruppert, D. and Matteson, D.S. (2015) Risk Management. In: *Springer Texts in Statistics*, Springer New York, 553-579. https://doi.org/10.1007/978-1-4939-2614-5_19
- [2] Danielsson, J. (2011) Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab. Wiley, 76-91.
- [3] Thavaneswaran, A., Paseka, A. and Frank, J. (2019) Generalized Value at Risk Forecasting. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **49**, 4988-4995. <https://doi.org/10.1080/03610926.2019.1610443>
- [4] Liang, Y., Thavaneswaran, A., Zhu, Z., Thulasiram, R.K. and Hoque, M.E. (2020). Data-Driven Adaptive Regularized Risk Forecasting. 2020 *IEEE 44th Annual Computers, Software, and Applications Conference (COMPSAC)*, Madrid, 13-17 July 2020, 1296-1301. <https://doi.org/10.1109/compsac48688.2020.00-77>
- [5] Thavaneswaran, A., Thulasiram, R.K., Zhu, Z., Hoque, M.E. and Ravishanker, N. (2019). Fuzzy Value-at-Risk Forecasts Using a Novel Data-Driven Neuro Volatility Predictive Model. 2019 *IEEE 43rd Annual Computer Software and Applications Conference (COMPSAC)*, Milwaukee, 15-19 July 2019, 221-226. <https://doi.org/10.1109/compsac.2019.10210>
- [6] Thavaneswaran, A., Thulasiram, R.K., Frank, J., Zhu, Z. and Singh, M. (2019). Fuzzy Option Pricing Using a Novel Data-Driven Feed Forward Neural Network Volatility Model. 2019 *IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, Orleans, 23-26 June 2019, 1-6. <https://doi.org/10.1109/fuzz-ieee.2019.8858826>
- [7] Lucas, A. and Zhang, X. (2016) Score-Driven Exponentially Weighted Moving Averages and Value-at-Risk Forecasting. *International Journal of Forecasting*, **32**, 293-302. <https://doi.org/10.1016/j.ijforecast.2015.09.003>
- [8] Hyndman, R., Athanasopoulos, G., Bergmeir, C., *et al.* (2018) Package Forecast—The Comprehensive R Archive Network. <https://cran.r-project.org/web/packages/forecast/forecast.pdf>
- [9] Lyu, Y., Kong, M., Ke, R. and Wei, Y. (2021) Does Mixed Frequency Information Help to Forecast the Value at Risk of the Crude Oil Market? *SSRN Electronic Journal*, **29**, 139-141. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3774891>