Finance 金融, 2024, 14(5), 1693-1703
Published Online September 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/fin
https://doi.org/10.12677/fin.2024.145173

Hans汉斯

基于理性疏忽的均值方差投资组合模型研究

宋思敏，张　勇*，冯　洁，杨吉丽

吉首大学数学与统计学院，湖南　吉首

收稿日期：2024年6月18日；录用日期：2024年7月4日；发布日期：2024年9月10日

摘　要

经典的均值－方差模型根据经典经济学假设，认为人都是理性的。但实际情况中，人们通常会受限于有限的注意力，最优的投资组合会改变，于是本文在经典均值方差模型中添加信息约束条件，并用中国证券市场部分股票实证模拟了投资者在信息约束条件下可达到的最优投资组合，得到有效前沿。结果发现在增加信息约束条件后，有效前沿范围缩短，人们可以处理的风险变小。研究为理性疏忽的研究提供了思路。

关键词

理性疏忽，均值方差模型，投资组合，信息约束

Study on the Mean Variance Portfolio Model Based on Rational Negligence

Simin Song, Yong Zhang*, Jie Feng, Jili Yang

School of Mathematics and Statistics, Jishou University, Jishou Hunan

Received: Jun. 18th, 2024; accepted: Jul. 4th, 2024; published: Sep. 10th, 2024

Abstract

The classic mean variance model assumes that people are rational based on classical economic assumptions. However, in reality, people are often limited by limited attention and the optimal investment portfolio will change. Therefore, this article adds information constraints to the classical mean variance model and uses some stocks in the Chinese securities market to empirically simulate the optimal investment portfolio that investors can achieve under information constraints, obtaining an efficient frontier. It was found that with the addition of information constraints, the effective frontier range was shortened, and the risk that people could handle decreased. The study

*通讯作者。

文章引用: 宋思敏, 张勇, 冯洁, 杨吉丽. 基于理性疏忽的均值方差投资组合模型研究[J]. 金融, 2024, 14(5): 1693-1703. DOI: 10.12677/fin.2024.145173

provides ideas for limited attention.

Keywords

Rational Inattention, Mean-Variance Model, Investment Portfolio, Information Constraints

1. 引言

理性忽视是由 Christopher A. Sims [1] [2]提出的理论，即经济决策者不能吸收所有可用的信息，但可以选择处理哪些信息。他将信息论带入经济学的研究中，使用信息论的方法量化有限注意力，并研究其对于经济学的影响。理论认为：行为人在做决策时，理论上面对的信息是完全的，然而由于注意力的有限性，他们只能基于自己所吸收和理解的信息做出条件性决策。当遭遇各种冲击时，信息会发生波动，但任何人都不可能在完全消化和内化所有相关的完整信息后再做出决策。所以面对冲击时，行为人需要理性地分配自己的注意力，有选择地关注和处理某些信息，而对那些相对不重要的信息，则分配较少的注意力，甚至直接进行理性的忽略，不进行相关的处理。在此基础上 Sims 提供了一个认知有限的人如何简化和总结可用信息的模型。

在 Sims 研究的基础上 Cheremukhin [3]运用行为实验的数据来证明了 Sims 理论的正确性，此模型估计了个体参与者对风险和信息成本的态度，并记录了相对同类样本中这些参数压倒性的异质性。许多学者将理性疏忽理论实践至不同的领域中，研究信息处理限制对于家庭消费及储蓄、代理商的最优消费及投资决策、特定部门投资对总体宏观经济冲击等的影响。Tutino [4]提出了一个动态模型，消费者在香农信息通道的约束下理性地选择他们的财务可能性的信息的大小和范围，预测风险厌恶程度较高的人会理性地选择更多的信息；Luo [5] [6]的实验表明理性疏忽会增加隐含的股权溢价，因为投资者面临更大的长期消费风险，从而需要更高的补偿均衡；Zorn [7]发现宏观经济的冲击会随着时间的推移产生额外的投资需求，而且在持续性相对较高的综合冲击之后更是如此。宋秀娜[8]发现在货币政策宽松时，宏观信息波动更大，而货币政策紧缩时，微观信息波动更大。这些研究表明了理性疏忽对于各个领域都有不小的影响。

在标准香农理性疏忽模型的基础上改进及推广是近年来非常热门的研究领域，Joo [9]基于对理性疏忽理论的新解释，开发了一个新的离散选择实证框架。Jung [10]提出个体不断地处理外部信息并将其转化为行动力是需要有限注意力资源的，并且占用的有限注意力会影响其他相关经济行为的决策。Caplin [11]提供了一个更普遍使用的模型从行为数据中回收注意力成本，因为其选择只依赖于收益的概率结构，所以这种香农模型是注意力约束的理想形式。这些研究将基于香农理论的理性疏忽模型逐渐完善、发展成熟，为本文实证部分奠定了坚实的基础。

尽管有限注意力这一概念已经被引入经济学研究中，但目前尚未与经典的投资组合模型进行深入的结合研究。受以上文献启发，我们不仅引入有限注意力，建立信息约束下的均值–方差模型，也通过实证分析讨论信息处理能力 κ 对于投资组合的筛选，并通过不同的信息处理能力 κ 约束下的均值方差有效前沿相互比较，进一步研究信息约束下的均值–方差模型，经过研究，我们发现在增加了信息约束条件后，有效前沿的范围有所缩短，意味着人们所能处理的风险范围也随之变小。

2. 模型假设

2.1. 熵的定义

理性疏忽理论将信息熵这一通信概念引入经济学研究，以不确定的减少速度来衡量信息流动的速度，也就是信息中排除了冗余后的平均信息量，信息论的不确定性衡量从度量熵开始。对具有连续概率密度 $p(x)$ 的随机变量 X 的熵 $H(X)$ 定义为：

$$H(X) = -E\ln\left[p(x)\right] = -\int p(x)\ln p(x)\mathrm{d}x \tag{1}$$

因为 $X \sim N\left(\bar{X},\Sigma\right)$ 是多维正态分布，则其熵为

$$H(X) = \frac{1}{2}\ln\left(\left(2\pi e\right)^{n}\left|\Sigma\right|\right) \tag{2}$$

考虑两个随机变量 X、Y，它们具有联合密度函数 $p(x,y)$、边际密度函数 $p(x)$、$p(y)$，互信息 $I(X,Y)$ 定义为

$$I(X,Y) = \int p(x,y)\ln\frac{p(x,y)}{p(x)p(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = H(X) - H(X\,|\,Y) \tag{3}$$

互信息对于随机变量 X 和 Y 的任何线性变换都是不变的

$$I(X,Y) = I(aX+b, cY+d) \tag{4}$$

给定一个有限的信息处理能力 κ，即投资者处理信息能力的最大速率，信息处理能力约束条件可表示为

$$I(X,Y) = H(X) - H(X\,|\,Y) \le \kappa \tag{5}$$

信息处理约束通过引入互信息的上界来限制信息流。直观地说，这个约束限制了 Y 中包含的关于 X 的信息量。

2.2. 投资者的信息约束

投资者被赋予有限的信息处理能力，投资者的有限注意力决定了他们可处理的最大信息量，他们需要在信息约束的条件下寻找最优的投资组合。

根据 Mondria [12]我们假设投资者受限于以下形式的信号：

$$\tilde{Y} = \omega\tilde{R} + \tilde{\varepsilon} \text{ 其中 } \tilde{\varepsilon} \sim N\left(0,\sigma_{\varepsilon}\right)$$

$\tilde{Y}$ 为私人信号、$\tilde{R} = \left(r_1, r_2, \cdots, r_n\right)^{\mathrm{T}}$ 为资产的收益率向量、ω 是 $1\times n$ 的投资者在各风险资产上的配置比例向量，$\tilde{\varepsilon}$ 是噪声，与 $\tilde{R}$ 无关，σ_{ε} 是 $\tilde{\varepsilon}$ 的方差($\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n}$，$\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{1}$，$\tilde{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{1}$，$\omega \in \mathbb{R}^{1\times n}$，$\Sigma_R \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$1 \in \mathbb{R}^{1\times n}$)。

根据 Sims 的理性疏忽理论，信息约束条件为：

$$H\left(\tilde{R}\right) - H\left(\tilde{R}\,|\,\tilde{Y}\right) \le \kappa \tag{6}$$

假设资产报酬和私人信号均为正态分布，则信息处理约束可重写为：

$$\ln\left|Var\left(\tilde{R}\right)\right| - \ln\left|Var\left(\tilde{R}\,|\,\tilde{Y}\right)\right| \le 2\kappa \tag{7}$$

已知 $\tilde{R} \sim N\left(\bar{R},\Sigma_R\right)$，则私人信号 $\tilde{Y}$ 的期望与方差为：

$$E\left(\tilde{Y}\right) = E\left[\omega\tilde{R} + \tilde{\varepsilon}\right] = \omega\bar{R} \tag{8}$$

$$Var\left[\tilde{Y}\right] = \omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}} + \sigma_{\varepsilon} \tag{9}$$

根据(8)、(9)得到 $\tilde{Y} \sim N\left(\omega\bar{R}, \sigma_\varepsilon + \omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}\right)$ 即 $p\left(\tilde{Y}\right) = N\left(\omega\bar{R}, \sigma_\varepsilon + \omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}\right)$

因此收益率向量 $\tilde{R}$ 对于私人信号 $\tilde{Y}$ 的条件方差为：

$$Var\left[\tilde{R} \mid \tilde{Y}\right] = \Sigma_R - \Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}\left(\sigma_\varepsilon + \omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\omega\Sigma_R \tag{10}$$

则信息约束(7)求解可转化为：

$$\ln\left|\Sigma_R\right| - \ln\left|\Sigma_R - \Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}\left(\sigma_\varepsilon + \omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\omega\Sigma_R\right| \le 2\kappa \tag{11}$$

化简(11)后得到投资者信息约束条件：

$$1 + \frac{\omega^{\mathrm{T}}\Sigma_R\omega}{\sigma_\varepsilon} \le \mathrm{e}^{2\kappa} \tag{12}$$

2.3. 投资者目标函数

由于投资者的信息处理能力受香农容量的限制，其在投资组合的选择上难以做出精确而持续的反应，为了讨论理性疏忽的影响，我们在无卖空约束的均值–方差投资组合模型的基础上，考虑信息约束的情况下，构建具有信息约束的均值–方差组合模型为：

$$\begin{gathered}\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov\left(r_i, r_j\right) \\ \text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} \bar{r} w_i = E\left(R\right) \\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ \ln\left|Var\left(\tilde{R}\right)\right| - \ln\left|Var\left(\tilde{R} \mid \tilde{Y}\right)\right| \le 2\kappa\end{cases}\end{gathered} \tag{13}$$

将信息约束条件化简后得到：

$$\begin{gathered}\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov\left(r_i, r_j\right) \\ \text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{n} \bar{r} w_i - E\left(R\right) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} w_i - 1 = 0 \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j Cov\left(r_i, r_j\right)}{\sigma^{\varepsilon}} + 1 - \mathrm{e}^{2\kappa} \le 0\end{cases}\end{gathered} \tag{14}$$

这类问题一般不存在解析解的形式，但其解的形式可以被表达出来，构造拉格朗日函数如下：

$$L\left(\omega, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \omega_i\omega_j Cov\left(r_i, r_j\right) - \lambda_1\left(\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i\omega_i - E\left(R\right)\right) - \lambda_2\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i - 1\right) - \mu\left(\mathrm{e}^{2\kappa} - 1 - \frac{\omega\Sigma\omega^{\mathrm{T}}}{2\sigma_\varepsilon}\right) \tag{15}$$

求解出信息约束下的有效前沿解析解为：

$$\sigma_p^2 = \frac{cE\left(R\right)^2 - 2bE\left(R\right) + a}{ac - b^2}; \quad \sigma_p^2 \le \sigma^{\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{2\kappa} - 1\right) \tag{16}$$

其中 $a = \tilde{R}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\tilde{R}$，$b = 1\Sigma^{-1}\tilde{R} = \tilde{R}^{T}\Sigma^{-1}1^{\mathrm{T}}$，$c = 1\Sigma^{-1}1^{\mathrm{T}}$。建立这个模型后，投资者可以通过选择 ω 和 Σ_ε，最优地求解信息约束下收益的条件方差–协方差矩阵的形式。

3. 实证分析

3.1. 数据的收集和处理

本文针对沪深股市，考虑股票的规模、收益率、流动性等因素，从中选出 8 只股票作为研究样本，这 8 只股票分别为中国稀土(000831)、招商银行(600036)、中国中车(601766)、益丰药房(603939)、王府井(600859)、牧原股份(002714)、海天味业(603288)、芒果超媒(300413)。研究时限选取为 2022 年 2 月 1 日到 2024 年 2 月 29 日，收集的数据是这 8 只股票在研究时限内的月收益率，我们可以根据这 8 只股票的收盘价数据分析来推断收益率未来的收益趋势，其中股票的收益率定义为：$r_{it} = \left(p_{i,t} - p_{i,t-1}\right) / p_{i,t-1}$，其中 $p_{i,t}$ 为第 i 种证券 t 时间的收盘价[13]。

噪声成分指标的选取即选择一个能度量市场噪声成分的量，而且还同时要求这个量与前面的每日融资余额和每日融券余量一样都是一个月数据。

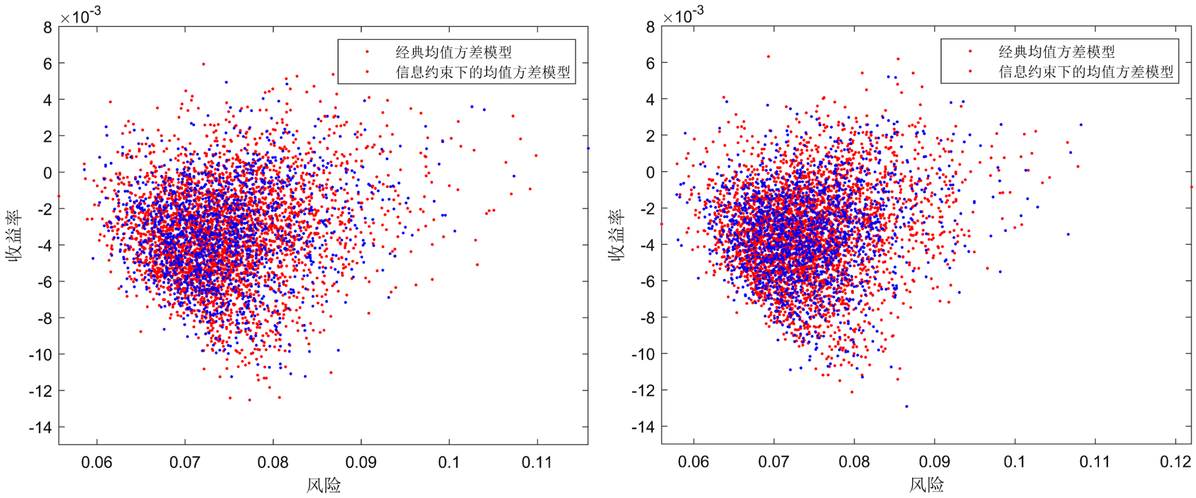
每日噪声成分指标的选择：根据周孝华[14]中国股市 IPOs 高抑价的噪声分析中将市场噪声用换手率来做唯一解释变量。即用换手率来衡量市场每日噪声成分大小的指标。其中换手率 = 成交量/流通总股数 100%。

3.2. 理性疏忽下的投资组合分布范围分析比较

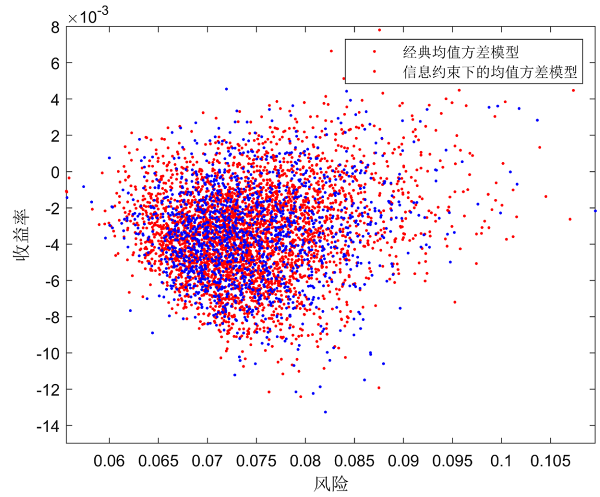
检验理性疏忽约束的合理性，我们建立理性疏忽下的均值－方差模型(15)，通过赋予信息处理能力 κ 不同的值，利用 MATLAB 求出 8 支股票的最优投资组合，随机生成 5000 个投资组合，使用信息约束过滤不符合条件的组合后余下的就是有限注意力下的投资组合模型图像，其结果如表 1、图 1。

Table 1. Information processing capability κ corresponds to the remaining sample size
表 1. 信息处理能力 κ 对应剩余样本数

κ 值	样本数
0.15	1502
0.2	3014
0.25	3947



$\kappa = 0.15$ $\kappa = 0.20$



$\kappa = 0.25$

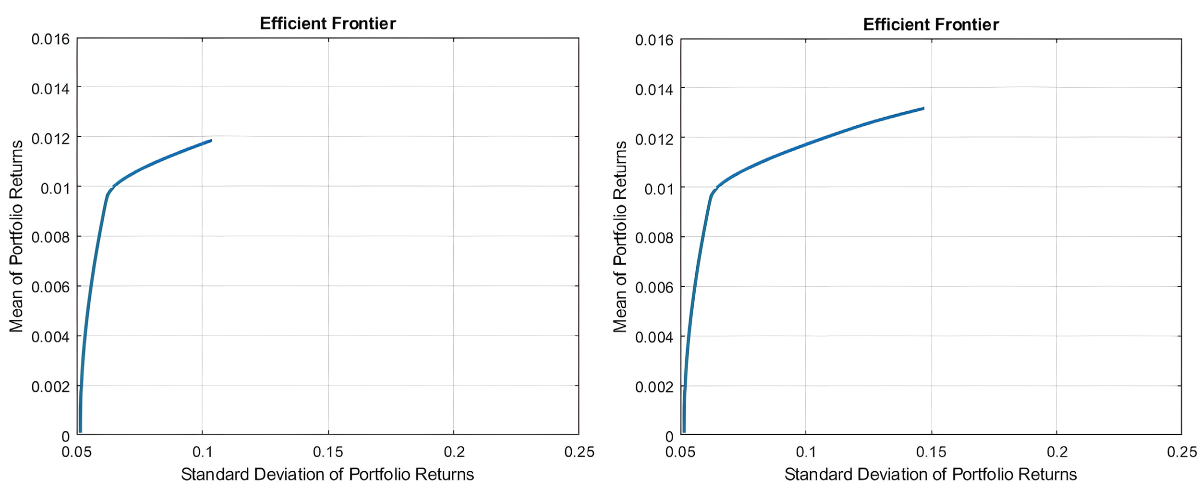
Figure 1. Distribution of investment portfolio before and after rational constraints
图 1. 理性约束前后投资组合分布图

从表 1 中我们可以得到随着 κ 值的变大，样本数也随之变大，将样本与未过滤过的均值方差投资组合模型放在同一张图上，根据图 1 可以看出虽然投资组合的数量变少了，但是模型的范围及分布在一定的区域内都没有变化，这与我们得出的理论模型相符，也就是信息约束并不影响一定范围内的有效前沿曲线。

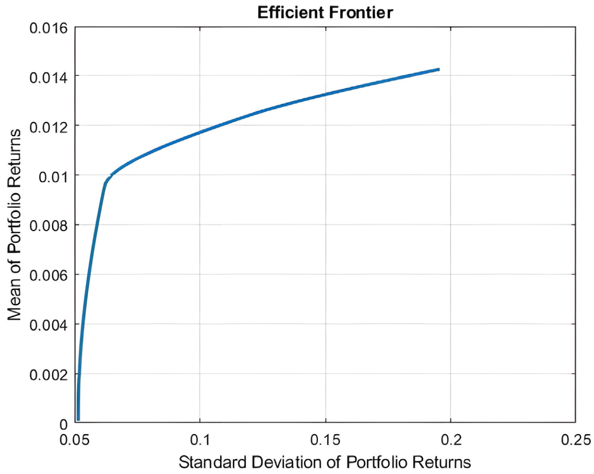
3.3. 理性疏忽下的投资组合有效前沿

根据信息约束下的有效前沿解析解(16)，再利用 MATLAB 软件，赋予信息处理能力 κ 不同的值，求出相应的有效前沿曲线。

根据图 2，从三组有效前沿曲线对比发现随着信息处理能力 κ 的变大，有效前沿的范围也就越大，即信息处理能力 κ 与投资者可以处理的风险成正比。但是对于已有的曲线有效前沿是没有变化的，证实信息处理能力 κ 只约束了投资者可以处理的风险，使投资者可以接受的风险变小，并不影响风险较小时的投资组合最优收益。



$\kappa = 0.15$ $\kappa = 0.20$



$\kappa = 0.25$

Figure 2. Effective frontiers under different values κ
图 2. 不同 κ 值下的有效前沿图

4. 结论

马科维茨均值方差理论自创建以来一直是金融领域的重要课题，随着我国改革开放的深入，我国的证券制度不断得到完善，市场变得更加成熟，实现有效投资成了当下资产管理不可逆转的趋势。但经典均值方差模型过于理想化，模型在现实环境中的实用性受到限制。

本文基于理性疏忽理论在经典均值方差模型的基础上加入信息约束条件，并通过实证，利用从沪深股市中筛选的 8 只股票检验模型的正确性。为了检验理性疏忽是否只约束了投资者可承受的风险，我们使用 MATLAB 随机生成有限个投资组合，并使用信息约束筛选掉投资者不可以接受的风险额度上的投资组合，发现筛选后的投资组合与筛选前的投资组合范围以及密度分布差别不大，而后画出信息约束下的投资组合有效前沿发现信息处理能力 κ 只影响有效前沿的范围，即当风险大于受信息处理能力影响下的约束值后，投资者将无法使用有限的注意力处理过多的信息，这与我们之前得出的理论模型相互印证，也与投资组合范围图相互照应，即信息约束只影响了投资者可承担风险的上限，并不影响风险在一定范围内时，投资者可得到的最优收益。

基金项目

国家自然科学基金(72061014)；湖南省自然科学基金(2021JJ30558)。

参考文献

[1] Sims, C.A. (2003) Implications of Rational Inattention. *Journal of Monetary Economics*, **50**, 665-690. https://doi.org/10.1016/s0304-3932(03)00029-1

[2] Sims, C.A. (2006) Rational Inattention: Beyond the Linear-Quadratic Case. *American Economic Review*, **96**, 158-163. https://doi.org/10.1257/000282806777212431

[3] Cheremukhin, A., Popov, A. and Tutino, A. (2011) Experimental Evidence on Rational Inattention. https://doi.org/10.24149/wp1112

[4] Tutino, A. (2008) The Rigidity of Choice: Lifecycle Savings with Information-Processing Limits. *Finance and Economics Discussion Series*, **2008**, 1-66. https://doi.org/10.17016/feds.2008.62

[5] Luo, Y. and Young, E.R. (2009) Rational Inattention and Aggregate Fluctuations. *The B.E. Journal of Macroeconomics*, **9**, 1-43. https://doi.org/10.2202/1935-1690.1700

[6] Luo, Y. (2010) Rational Inattention, Long-Run Consumption Risk, and Portfolio Choice. *Review of Economic Dynamics*,

13, 843-860. https://doi.org/10.1016/j.red.2010.01.002

[7] Zorn, P. (2020) Investment under Rational Inattention: Evidence from US Sectoral Data. *SSRN Electronic Journal*, Article No. 8436. https://doi.org/10.2139/ssrn.3657972

[8] 王军, 宋秀娜. 基金经理对货币政策反应的异质性分析——基于理性疏忽视角的有限注意力配置理论[J]. 商业研究, 2021(3): 83-92.

[9] Joo, J. (2021) Rational Inattention as an Empirical Framework: Application to the Welfare Effects of New-Product Introduction.

[10] Jung, J., Kim, J.H., Matějka, F. and Sims, C.A. (2019) Discrete Actions in Information-Constrained Decision Problems. *The Review of Economic Studies*, **86**, 2643-2667. https://doi.org/10.1093/restud/rdz011

[11] Caplin, A., Dean, M. and Leahy, J. (2022) Rationally Inattentive Behavior: Characterizing and Generalizing Shannon Entropy. *Journal of Political Economy*, **130**, 1676-1715. https://doi.org/10.1086/719276

[12] Mondria, J. (2010) Portfolio Choice, Attention Allocation, and Price Comovement. *Journal of Economic Theory*, **145**, 1837-1864. https://doi.org/10.1016/j.jet.2010.03.001

[13] 江璐瑶, 邓雪. 基于收益权重的均值-熵投资组合模型的研究[J]. 运筹与管理, 2020, 29(11): 181-185.

[14] 周孝华, 胡国生, 苟思. 中国股市 IPOs 高抑价的噪声分析[J]. 软科学, 2005, 19(5): 30-33.

附录 1. 信息约束条件简化过程

已知

$$\left[\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\right]\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_n\end{bmatrix}=\omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

所以将 $\omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}$ 与 $\omega^{\mathrm{T}}\omega\Sigma_R$ 化为数值形式为：

$$\omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}=\left[\sum_i\omega_i\sigma_{i1},\sum_i\omega_i\sigma_{i2},\cdots,\sum_i\omega_i\sigma_{in}\right]\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\\ \vdots\\ \omega_n\end{bmatrix}=\sum_i\sum_j\omega_i\omega_j\sigma_{ij} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\omega^{\mathrm{T}}\omega\Sigma_R&=\begin{bmatrix}\omega_1^2 & \omega_1\omega_2 & \cdots & \omega_1\omega_n\\ \omega_2\omega_1 & \omega_2^2 & \cdots & \omega_2\omega_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_n\omega_1 & \omega_n\omega_2 & \cdots & \omega_n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\omega_1\sum_i\omega_i\sigma_{i1} & \omega_1\sum_i\omega_i\sigma_{i2} & \cdots & \omega_1\sum_i\omega_i\sigma_{in}\\ \omega_2\sum_i\omega_i\sigma_{i1} & \omega_2\sum_i\omega_i\sigma_{i2} & \cdots & \omega_2\sum_i\omega_i\sigma_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_n\sum_i\omega_i\sigma_{i1} & \omega_n\sum_i\omega_i\sigma_{i2} & \cdots & \omega_n\sum_i\omega_i\sigma_{in}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{19}$$

令 $C=\sigma_\varepsilon+\omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}=\sigma_\varepsilon+\sum_i\sum_j\omega_i\omega_j\sigma_{ij}$ 。

将(17)、(18)带入 $\left|E-\dfrac{\omega^{\mathrm{T}}\omega\Sigma_R}{\sigma_\varepsilon+\omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}}\right|$ 有

$$\begin{aligned}\left|E-\frac{\omega^{\mathrm{T}}\omega\Sigma_R}{\sigma_\varepsilon+\omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}}\right|&=\left(-\frac{1}{C}\right)^n\left|\omega^{\mathrm{T}}\omega\Sigma_R-CE\right|\\ &=\left(-\frac{1}{C}\right)^n\left|\begin{bmatrix}\omega_1\sum_i\omega_i\sigma_{i1}-C & \omega_1\sum_i\omega_i\sigma_{i2} & \cdots & \omega_1\sum_i\omega_i\sigma_{in}\\ \omega_2\sum_i\omega_i\sigma_{i1} & \omega_2\sum_i\omega_i\sigma_{i2}-C & \cdots & \omega_2\sum_i\omega_i\sigma_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_n\sum_i\omega_i\sigma_{i1} & \omega_n\sum_i\omega_i\sigma_{i2} & \cdots & \omega_n\sum_i\omega_i\sigma_{in}-C\end{bmatrix}_{n\times n}\right|\\ &=\left|\begin{bmatrix}1 & \sum_i\omega_i\sigma_{i1} & \cdots & \sum_i\omega_i\sigma_{in}\\ 0 & \omega_1\sum_i\omega_i\sigma_{i1}-C & \cdots & \omega_1\sum_i\omega_i\sigma_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \omega_n\sum_i\omega_i\sigma_{i1} & \cdots & \omega_n\sum_i\omega_i\sigma_{in}-C\end{bmatrix}_{(n+1)(n+1)}\right|\end{aligned} \tag{20}$$

将公式(21)从第二行开始每行减 ω_i 倍第一行得到：

$$\begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sum_i \omega_i\sigma_{i1} & \cdots & \sum_i \omega_i\sigma_{in} \\ \omega_1 & -C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_n & 0 & \cdots & -C \end{bmatrix}_{(n+1)(n+1)} \end{vmatrix} \tag{21}$$

将公式(22)第二列之后每列乘 $-\frac{\omega_i}{C}$ 后相加加到第一列得到：

$$\left(-\frac{1}{C}\right)^n \begin{Vmatrix} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{C}\sum_j \omega_j \sum_i \omega_i\sigma_{ij} & \sum_i \omega_i\sigma_{i1} & \cdots & \sum_i \omega_i\sigma_{in} \\ 0 & -C & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -C \end{bmatrix} \end{Vmatrix}$$
$$=\left(-\frac{1}{C}\right)^n \cdot(-C)^n \cdot\left(1-\frac{1}{C}\sum_i\sum_j \omega_i\omega_j\sigma_{ij}\right)=1-\frac{C-\sigma_\varepsilon}{C}=\frac{\sigma_\varepsilon}{C}=\frac{\sigma_\varepsilon}{\sigma_\varepsilon+\sum_i\sum_j \omega_i\omega_j\sigma_{ij}} \tag{22}$$

$$\frac{1}{\left|E-\frac{\omega^{\mathrm{T}}\omega\Sigma_R}{\sigma_\varepsilon+\omega\Sigma_R\omega^{\mathrm{T}}}\right|}=\frac{\sigma_\varepsilon+\sum_i\sum_j \omega_i\omega_j a_{ij}}{\sigma_\varepsilon}=1+\frac{\sum_i\sum_j \omega_i\omega_j\sigma_{ij}}{\sigma_\varepsilon}$$
$$=1+\frac{\sum_i\sum_j \omega_i\omega_j Cov\left(r_i,r_j\right)}{\sigma_\varepsilon}=1+\frac{\omega^{\mathrm{T}}\Sigma\omega}{\sigma_\varepsilon} \tag{23}$$

至此，我们可以得到信息约束最优化简为 $1+\frac{\omega^{\mathrm{T}}\Sigma\omega}{\sigma_\varepsilon}\le \mathrm{e}^{2\kappa}$。

附录 2. 拉格朗日乘子法求解过程

由 KKT 条件转化目标函数(14)为：

$$\Sigma\omega^{\mathrm{T}}-\lambda_1 R-\lambda_2 1^{\mathrm{T}}-\mu\frac{\Sigma\omega}{\sigma_\varepsilon}=0 \tag{24}$$

$$E(R)-\omega R=0 \tag{25}$$

$$1-\omega 1^{\mathrm{T}}=0 \tag{26}$$

$$\mu\left(\mathrm{e}^{2\kappa}-1-\frac{\omega\Sigma\omega^{\mathrm{T}}}{2\sigma_\varepsilon}\right)=0 \tag{27}$$

$$\mu\ge 0 \tag{28}$$

构造拉格朗日函数公式如下：

$$L(\omega,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \omega_i\omega_j Cov\left(r_i,r_j\right)-\lambda_1\left(\sum_{i=1}^n \overline{r}_i\omega_i-E(R)\right)$$
$$-\lambda_2\left(\sum_{i=1}^n \omega_i-1\right)-\mu\left(\mathrm{e}^{2\kappa}-1-\frac{\omega\Sigma\omega^{\mathrm{T}}}{2\sigma_\varepsilon}\right) \tag{29}$$

其中 λ_1、λ_2 和 μ 是待定参数限制条件 1、2、3 中的拉格朗日乘子。

假设 Σ 是非退化即满秩的，将式(23)右乘 Σ^{-1} 得到最优解为：

$$\omega^{*}=\frac{\sigma_{\varepsilon}}{\sigma_{\varepsilon}-\mu}\left(\lambda_1\tilde{R}^{\mathrm{T}}+\lambda_2 1\right)\Sigma^{-1} \tag{30}$$

将式(29)代入式(24)和式(25)得：

$$\left(1-\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon}}\right)E\left(R\right)=\lambda_1\tilde{R}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\tilde{R}+\lambda_2 1\Sigma^{-1}\tilde{R}=\lambda_1 a+\lambda_2 b \tag{31}$$

$$\left(1-\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon}}\right)=\lambda_1 R^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}1^{\mathrm{T}}+\lambda_2 1\Sigma^{-1}1^{\mathrm{T}}=\lambda_1 b+\lambda_2 c \tag{32}$$

其中 $a=\tilde{R}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}\tilde{R}$， $b=1\Sigma^{-1}\tilde{R}=\tilde{R}^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}1^{\mathrm{T}}$， $c=1\Sigma^{-1}1^{\mathrm{T}}$ 。

化为矩阵形式如下：

$$\begin{bmatrix}\left(1-\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon}}\right)E\left(R\right)\\ 1-\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{ac-bc}\begin{bmatrix}c & -b\\ -b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\left(1-\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon}}\right)E\left(R\right)\\ 1-\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix} \tag{33}$$

化为方程形式为：

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{1}{ac-bc}\left(1-\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon}}\right)\left(cE\left(R\right)-b\right)\\ \lambda_2&=\frac{1}{ac-bc}\left(1-\frac{\mu}{\sigma_{\varepsilon}}\right)\left(a-bE\left(R\right)\right)\end{aligned} \tag{34}$$

由于约束条件 $\mathrm{e}^{2\kappa}-1-\frac{\omega^{\mathrm{T}}\Sigma\omega}{\sigma_{\varepsilon}}\geq 0$ 与目标函数的法向量平行，所以 μ 的值有且只有 0，当 $\mu=0$ 时，可以解出：

$$\begin{aligned}\lambda_1&=\frac{1}{ac-bc}\left(cE\left(R\right)-b\right)\\ \lambda_2&=\frac{1}{ac-bc}\left(a-bE\left(R\right)\right)\end{aligned} \tag{35}$$

至此，带有信息约束的均值方差模型与经典均值方差模型求解步骤一致可以求出：
在信息约束下，有效前沿的解析解为：

$$\sigma_p^2=\frac{cE\left(R\right)^2-2bE\left(R\right)+a}{ac-b^2} \tag{36}$$

由于理性疏忽的约束，其中 $\sigma_p^2\leq\sigma^{\varepsilon}\left(\mathrm{e}^{2\kappa}-1\right)$。