Finance 金融, 2026, 16(1), 65-74
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/fin
https://doi.org/10.12677/fin.2026.161007

Hans汉斯

基于无风险定期储蓄及有风险投资组合的两种养老金投资策略的量化分析

梅佳芮[1]，贾新明[2*]

[1]宁波财经学院税收系，浙江 宁波
[2]浙江外国语学院金融工程系，浙江 杭州

收稿日期：2025年11月26日；录用日期：2025年12月8日；发布日期：2026年1月12日

摘 要

本文针对构建的养老金计划，探讨了“无风险定期储蓄”及“定期储蓄与风险资产构成的投资组合”两种养老金投资策略，并利用贴现函数、期望收益、标准差等金融数学工具给出了具体的量化分析，研究表明，对于“无风险定期储蓄”养老金策略，投资者每月支付养老金所占工资的比例，显著依赖于定期储蓄月利率与养老金月增长率的差额，当该差额固定时，工资支付比例保持相对稳定；对于“有风险投资组合”下的投资策略，每月投资养老金所占工资的比例与其能承担的金融风险能力密切相关。

关键词

养老金，投资策略，期望收益，标准差，量化分析

Quantitative Analysis of Pension Investment Strategies Based on Risk-Free Regular Savings and Risky Investment Portfolio

Jiarui Mei[1], Xinming Jia[2*]

[1]Department of Taxation, Ningbo University of Finance and Economics, Ningbo Zhejiang
[2]Department of Financial Engineering, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang

Received: November 26, 2025; accepted: December 8, 2025; published: January 12, 2026

Abstract

This paper examines two pension investment strategies: the “risk-free regular savings” plan and

*通讯作者。

文章引用: 梅佳芮, 贾新明. 基于无风险定期储蓄及有风险投资组合的两种养老金投资策略的量化分析[J]. 金融, 2026, 16(1): 65-74. DOI: 10.12677/fin.2026.161007

the "investment portfolio composed of regular savings and risky assets". Using financial mathematical tools such as discount functions, expected returns, and standard deviations, a detailed quantitative analysis is conducted. The study reveals two key findings: for the risk-free regular savings strategy, the required monthly contribution as a percentage of salary is predominantly determined by the spread between the monthly savings rate and pension growth rate, maintaining relative stability when this differential remains constant. Under the risky portfolio strategy, however, the optimal contribution ratio exhibits strong dependence on the investor's financial risk tolerance.

Keywords

Pensions, Investment Strategy, Expected Return, Standard Deviation, Quantitative Analysis

1. 引言

民政部、全国老龄办发布《2024 年度国家老龄事业发展公报》显示，截至 2024 年年末，我国 65 周岁及以上老年人口 22,023 万人，占总人口的 15.6% [1]。我国养老保险制度正面临着人口抚养比失衡、基金可持续性承压等多重结构性挑战。作为社会保障体系的核心支柱，养老金不仅关乎民众的晚年生活质量，更是维系代际公平与社会稳定的重要基石。为了应对我国人口老年化，近年来，政府也推出了一系列战略举措，不断丰富、发展了我国的养老金制度。

现实生活中，对于普通工薪阶层而言，将每月工资收入一部分定期储蓄于银行养老金账户，这是目前较为普遍采用的养老金投资策略。但对于一些收入较高群体而言，除了将每月工资一部分定期储蓄于银行养老金账户外，他愿承担一定的金融风险，将工资一部分投资于风险债券市场，期望退休时获得更高回报。对于确定缴费型养老金的最优投资策略，已有学者从不同风险模型和决策准则角度进行了探讨。例如，李娜与刘伟[2]将跳扩散模型引入研究，分析了带有违约风险的 DC 型养老金在积累期的最优投资问题。邵艳宇等人[3]进一步考虑了利率与波动率的双重风险，在混合随机波动模型下研究了带有随机工资的最优策略。此外，针对模型参数的不确定性，曾向阳等人[4]采用了兼顾乐观与悲观权重的 Hurwicz 准则，构建了更为稳健的多阶段投资决策模型。

然而，上述研究均致力于在复杂的随机模型下求解连续动态的最优配置比例，其策略对于普通工薪阶层而言理解与执行门槛较高。因此，本文将聚焦现实中更为普遍的养老金投资策略，即在无风险定期储蓄与有风险投资组合之间进行合理性选择，并通过量化分析，比较这两种基础策略的长期效果，为普通工薪阶层提供一个关于长期养老金规划的量化参考。

具体而言，本文主要回答两个问题：第一，个人养老金长期积累的效率和收益水平，主要受哪些关键决策因素的影响？第二，为实现退休后生活无忧的目标，每月应将工资收入的多大比例投入养老金账户？为此，本文构建如下养老金计划，并进行建模与比较分析。

养老金计划：若不考虑通胀因素，假设某员工的工资每月增长率为 g，工作 40 年后，他希望退休后首月养老金为退休前最后一个月工资的 50%，并且以后养老金按比例 g 逐月增长且连续支付 20 年(240 个月)。

为了实现该养老金计划，本文提出“无风险定期储蓄”与“定期储蓄与风险资产构成的混合资产组

合”两种情形下的养老金投资策略。

策略 1 (无风险储蓄策略)：假设该员工每月将固定比例工资定存于养老金账户。若 r 为养老金存款月利率，g 为工资月增长率，x 为每月投资养老金所占工资的比例，则当

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{480}\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{240}}{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{480}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{480}\frac{1}{1+\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{240}} \tag{1}$$

时，他的养老金计划就可以实现。

策略 2 (有风险投资组合)：假设该员工可承受的月收益率风险为 2% (以标准差衡量，对应年化风险约 6.928%)。在制定养老金计划时，除了将部分工资以定期储蓄形式存入银行养老金账户(养老金存款月利率为 $r=0.5\%$)外，他还拿出部分工资投资于股票 1、股票 2、股票 3 构成的风险资产组合。假设这三支股票的月期望收益率分别为 $\mu_1=0.7\%$，$\mu_2=0.8\%$，$\mu_3=1\%$，月收益率的标准差分别为 $\sigma_1=3\%$，$\sigma_2=5\%$，$\sigma_3=7\%$，彼此间的相关系数为 $\rho_{12}=0.4$，$\rho_{13}=-0.2$，$\rho_{23}=0.2$。设 μ 为整个投资组合(包括无风险养老金账户及 3 支股票)的月期望收益率，x 为每月投资养老金所占工资的比例，则当

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g}{1+\mu}\right)^{480}\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+\mu}\right)^{240}}{1-\left(\frac{1+g}{1+\mu}\right)^{480}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g}{1+\mu}\right)^{480}\frac{1}{1+\left(\frac{1+g}{1+\mu}\right)^{240}} \tag{2}$$

时，他的养老金计划也可以实现。

2. 基本概念及引理

先给出与量化分析相关的一些定义与引理。

定义 1 [5] 用 $A(t)$ 表示原始投资 $A(0)$ 经过时间 $t(t>0)$ 后的价值，当 t 变动时，称 $A(t)$ 为总量函数。

定义 2 [5] 总量函数 $A(t)$ 在时间 $[t_1,t_2]$ 内变化量(增量)称为初期货币量 $A(t_1)$ 在时间 $[t_1,t_2]$ 内的利息，记为 I_{t_1,t_2}，即

$$I_{t_1,t_2}=A(t_2)-A(t_1)。$$

定义 3 [5] 给定时间 $[t_1,t_2]$ 内总量函数 $A(t)$ 的变化量(增量)与初期货币量比值称为在时间区间 $[t_1,t_2]$ 内的利率，记为 i_{t_1,t_2}，即

$$i_{t_1,t_2}=\frac{A(t_2)-A(t_1)}{A(t_1)}=\frac{I_{t_1,t_2}}{A(t_1)}。$$

定义 4 [5] 记 1 个货币单位本金在 $t(t>0)$ 时刻的价值为 $a(t)$，则当 t 变动时，称 $a(t)$ 为积累函数。

定义 5 [5] 1 个货币单位的投资经过任何一个单位计息期产生的**利息**为常数，则称对应的利息计算方式为简单利息计算方式，对应的利息称为**单利**。

定义 6 [5] 1 个货币单位的投资经过任何一个单位计息期产生的**利率**为常数，则称对应的利息计算方式为复合利息计算方式，对应的利息称为**复利**。

定义 7 [5] 记 $t(t\geq 0)$ 时刻的 1 个货币单位在 0 时刻价值为 $a^{-1}(t)$，则当 t 变动时，称 $a^{-1}(t)$ 为贴现函数。

由定义 7 知，贴现函数为积累函数的倒数，因此在单利方式下，

$$a^{-1}(t)=(1+it)^{-1}\quad(t\geq 0),$$

其中 i 为单利率；在复利方式下，

$$a^{-1}(t)=(1+i)^{-t}\quad(t\geq 0),$$

其中 i 为复利率。

定义 8 [6] 对于可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$，在 $\mathcal{F}$ 上定义非负集合函 $P(\cdot)$，以度量 $\mathcal{F}$ 中事件发生可能性大小，它满足

(1) 非负性：即 $\forall A\in\mathcal{F}$，$0\leq P(A)\leq 1$；

(2) 规范性：即 $P(\Omega)=1$；

(3) 可数(列)可加性：若 $A_i\in\mathcal{F}$，且 $A_i\cap A_j=\phi\ (i\neq j)$，$i,j=1,2,\cdots$，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_i^{\infty}P(A_i)$，$P(A)$ 称为事件 A 发生的概率，$(\Omega,\mathcal{F},P)$ 称为概率空间。

定义 9 [6] 设 $(\Omega,\mathcal{F})$ 是一个可测空间，若 $X:\Omega\to\bar{R}[-\infty,\infty]$，$\forall x\in\bar{R}$，有 $\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)\leq x\}\in\mathcal{F}$，则称函数 X 是关于 $\mathcal{F}$ (或 Ω)的可测函数。特别地，概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上定义的可测函数称为随机变量。

定义 10 [6] 若随机变量 X 的取值 $(x_1,x_2,\cdots)$ 是有限或可列无穷，且

$$p_k=P\{X=x_k\}=P\{\omega\in\Omega\,|\,X(\omega)=x_k\}\geq 0,\quad \sum_k p_k=1,$$

则称 X 为离散随机变量。

定义 11 [6] 设 X 为离散随机变量，$p_k=P\{X=x_k\}$，$k=1,2,\cdots$，则 X 的数学期望 μ_X 与方差 σ_x^2 定义为

$$\mu_X=E[X]=\sum_k x_k p_k,\quad \sigma_X^2=\mathrm{Var}(X)=\sum_k(x_k-\mu_X)^2p_k,$$

其中 $\sigma_k=\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ 称为标准差。

定义 12 [6] 设 X,Y 为离散随机变量，其协方差 $\mathrm{cov}(X,Y)$ 及相关系数 $\rho_{X,Y}$ 分别定义为

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\big[(X-E(X))(Y-E(Y))\big],$$

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\sqrt{\mathrm{var}(Y)}},$$

为了方便，记 $\mathrm{cov}(X,Y)=c_{XY}=\rho_{XY}\sigma_X\sigma_Y$。

定义 13 [7] 设风险证券市场上一支股票的现在价格为 $S(0)$，未来价格 $S(t):\Omega\to[0,\infty]$ 是概率空间 Ω 上随机变量，收益率定义为

$$K=\frac{S(t)-S(0)}{S(0)},$$

它是概率空间 Ω 上随机变量。风险(或风险测量)定义为

$$\sigma_k=\sqrt{\mathrm{Var}(K)}。$$

定义 14 [7] 在 n 个不同资产构成的所有资产组合中，方差最小的资产组称为最小方差资产组合，简称 MVP。

引理 1 [7] 设银行储蓄月利率为 r，以常数月利率 g 增长的 n 次月底支付序列为

$$A(1+g),A(1+g)^2,\cdots,A(1+g)^n,$$

则这 n 次月底支付序列的现值为

$$V(0)=\frac{A(1+g)}{r-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right]。$$

证明 因月底支付序列为

$$A(1+g),A(1+g)^2,\cdots,A(1+g)^n,$$

根据定义 7 中复利率计算公式知，月底支付序列现值为

$$A\frac{1+g}{1+r},A\frac{(1+g)^2}{(1+r)^2},\cdots,A\frac{(1+g)^n}{(1+r)^n},$$

故 n 次支付的现值总和为

$$V(0)=\sum_{k=1}^{n}A\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^k=A\frac{1+g}{1+r}\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n}{1-\frac{1+g}{1+r}}\right]$$
$$=\frac{A(1+g)}{r-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^n\right]。$$

引理 2 [7] 收益率分别为 K_1,K_2 的两个资产构成的资产组合 V 的收益率 $K_v=\omega_1K_1+\omega_2K_2$，其中 ω_1,ω_2 表示权重($\omega_1+\omega_2=1$)，则资产组合 V 的期望收益与标准差分别为

$$E(K_v)=\omega_1E(K_1)+\omega_2E(K_2),$$

$$\sigma_{k_v}=\sqrt{\mathrm{Var}(k_v)}=\sqrt{\omega_1^2\mathrm{Var}(K_1)+2\omega_1\omega_2\operatorname{cov}(K_1,K_2)+\omega_1^2\mathrm{Var}(K_2)},$$

特别地，当资产组合中一种资产为无风险资产时，如 $\mathrm{Var}(K_1)=0$ 时，$\sigma_{k_v}=|\omega_2|\sqrt{\mathrm{Var}(K_2)}$。

引理 3 [7] 收益率 $K_i\,(i=1,2)$ 的期望值与标准差分别记为 $\mu_i=E(K_i)$，$\sigma_i=\sqrt{\mathrm{Var}(K_i)}$，相关系数 $\rho_{12}=\frac{c_{12}}{\sigma_1\sigma_2}<1$，且 K_1,K_2 构成的资产组合 V 的收益率 $K_v=\omega K_1+(1-\omega)K_2$，则资产组合 V 的方差

$$\sigma_V^2=\omega^2\mathrm{Var}(K_1)+2\omega(1-\omega)\operatorname{cov}(K_1,K_2)+\omega^2\mathrm{Var}(K_2)。$$

在 $\omega=\omega_0=\frac{\sigma_2^2-c_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2c_{12}}$ 时，σ_V^2 取得最小值 $\sigma_0^2=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2-c_{12}^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2c_{12}}$，此时对应收益期望值为

$$\mu_V=\mu_0=\frac{\mu_2\sigma_1^2+\mu_1\sigma_2^2-(\mu_1+\mu_2)c_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2c_{12}}。$$

引理 4 [7] 收益率 $K_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 的期望值与标准差分别记为 $\mu_i=E(K_i)$，$\sigma_i=\sqrt{\mathrm{Var}(K_i)}$，设 $C=(c_{ij})_{n\times n}$ 为协方差矩阵，其中 $c_{ij}=\operatorname{cov}(K_i,K_j)=\rho_{12}\sigma_i\sigma_j$。记 n 个资产构成的资产组合 V 的收益率 $K_v=\omega_1K_1+\omega_2K_2+\cdots+\omega_nK_n$。记 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)$，$\mu=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$\tau=(1,1,\cdots,1)$，则 K_v 的期望收益 μ_v 与方差 σ_V^2 分别为

$$\mu_v=\omega\mu^{\mathrm{T}},\ \sigma_V^2=\omega C\omega^{\mathrm{T}}。$$

假设有一个无风险证券 P，其利率为 r。设 Q 是 n 个风险资产构成的资产组合，每个风险资产收益率

的期望值与标准差分别为μ_i，$\sigma_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$。设$C=\left(c_{ij}\right)_{n\times n}$为协方差矩阵。现在让$P$与$Q$构成一个新的资产组合，记为$V$，其期望收益为$\mu_v$，标准差为$\sigma_v$。

引理 5 [7]若$\det C\neq 0$且无风险利率r低于最小方差资产组合的期望收益率μ_{MVP}，则存在权重

$$\omega=\omega_M=\frac{\left(\mu-r\tau\right)C^{-1}}{\left(\mu-r\tau\right)C^{-1}\tau^{\mathrm{T}}},$$

使得

$$\frac{\mu_V-r}{\sigma_V}=\frac{\omega\tau^{\mathrm{T}}-r}{\sqrt{\omega C\omega^{\mathrm{T}}}}$$

取得最大值。

3. 无风险储蓄策略的量化分析

考虑到现实情况，参加工作后员工的工资收入逐步增加，每个月固定储蓄存款数目大于刚开始工作时所得工资收入。为了便于计算，假设该员工工作 40 年的月平均工资A为初始工资，银行存款月利率r为常数，尽管银行利率有变动，但在如此长时间内波动有一个平均效应，因此这种假设有合理性，由此得出的计算结果有一定可信度。考虑到银行存款利率r及工资月增长率g为常数，假设每月支付工资比例为x，因此该员工月底支付部分工资序列为

$$xA\left(1+g\right),xA\left(1+g\right)^2,\cdots,xA\left(1+g\right)^{480}。$$

由引理 1 知，该员工支付序列的现值总和为

$$V\left(0\right)=xA\frac{\left(1+g\right)}{r-g}\left(1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{480}\right)。$$

记

$$GAF\left(r,g,n\right)=\frac{\left(1+g\right)}{r-g}\left(1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{n}\right),$$

则

$$V\left(0\right)=xA\cdot GAF\left(r,g,480\right),$$

其中$GAF\left(r,g,n\right)$称为月度增长因子。那么 40 年后该员工累计养老金总额为

$$V\left(480\right)=V\left(0\right)\left(1+r\right)^{480}=xA\cdot GAF\left(r,g,480\right)\left(1+r\right)^{480},$$

这就是该员工退休时的所有养老金的初始资本。因为该员工工作 40 年后退休前最后一个月的工资为$A\left(1+g\right)^{480}$。按照策略 1 的条件，他第一个月的养老金初始值为$B=\frac{A}{2}\left(1+g\right)^{480}$，随后按照固定比例$g$逐月增长。因此，在他退休后 20 年里，其每个月养老金构成了如下支付序列

$$B\left(1+g\right),B\left(1+g\right)^2,\cdots,B\left(1+g\right)^{240}。$$

按照上面讨论，这个支付序列在退休时刻的现值总和为

$$B\frac{1+g}{r-g}\left(1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{240}\right)=\frac{A}{2}\left(1+g\right)^{480}\cdot GAF\left(r,g,240\right)。$$

这个值必等于所有养老金的初始资本$V(480)$，即

$$xA\cdot GAF(r,g,480)(1+r)^{480}=\frac{A}{2}(1+g)^{480}GAF(r,g,240),$$

故

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{480}\frac{GAF(r,g,240)}{GAF(r,g,480)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{480}\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{240}}{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{480}}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{480}\frac{1}{1+\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^{240}}。$$

于是策略 1 得证。

下面给出实例。若银行存款月利率r分别取值 0.4%、0.5%、0.6% (相当于存款年利率$\overline{r}$分别为 4.8%、6%、7.2%)，工资月增长率g (也是养老金月增长率)分别取值 0.1%、0.2%、0.3% (相当于年增率$\overline{g}$分别为 1.2%、2.4%、3.6%)时，由策略 1 中公式(1)，可以简单算出每月支付工资比例为x的值，见表 1。

Table 1. Salary contribution ratio under the risk-free fixed savings pension strategy
表 1. 无风险定期储蓄策略下每月投资养老金的工资比例

工资月增长率 \ 银行存款月利率	$r=0.4\%$	$r=0.5\%$	$r=0.6\%$
$g=0.1\%$	$x=7.99\%$	$x=5.33\%$	$x=3.51\%$
$g=0.2\%$	$x=11.85\%$	$x=8\%$	$x=5.34\%$
$g=0.3\%$	$x=17.34\%$	$x=11.86\%$	$x=8.01\%$

从表 1 可知，每月投资养老金的工资比例x的值强烈地依赖于存款月利率r与工资月增长率g的差，当二者差值固定时，工资支付比例x的值保持相对稳定，如$r-g=0.3\%$时，x取值在 8%上下波动(见表 1 中主对角线方向取值)；如$r-g=0.2\%$时，x取值在 11.85%上下波动；如$r-g=0.4\%$时，x取值在 5.33%上下波动(见表 1 中紧挨主对角线方向两组数值)。

4. 有风险投资组合策略的量化分析

从策略 2 的条件可知，3 支股票相关系数为

$$\rho_{12}=\rho_{21}=0.4，\quad \rho_{13}=\rho_{31}=-0.2，\quad \rho_{23}=\rho_{32}=0.2，$$

每支股票月收益标准差为$\sigma_1=3\%$，$\sigma_2=5\%$，$\sigma_3=7\%$。

根据定义 12 中协方差及相关系数关系可知，

$$c_{12}=c_{21}=\rho_{12}\sigma_1\sigma_2=0.4\times0.03\times0.05=0.0006，$$

$$c_{13}=c_{31}=\rho_{13}\sigma_1\sigma_3=-0.2\times0.03\times0.07=-0.00042，$$

$$c_{23}=c_{32}=\rho_{23}\sigma_2\sigma_3=0.2\times0.05\times0.07=0.0007，$$

$$c_{11}=\sigma_1^2=0.03^2=0.0009，\quad c_{22}=\sigma_2^2=0.05^2=0.0025，$$

$$c_{33}=\sigma_3^2=0.07^2=0.0049。$$

故协方差矩阵

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.0009 & 0.0006 & -0.00042 \\ 0.0006 & 0.0025 & 0.0007 \\ -0.00042 & 0.0007 & 0.0049 \end{pmatrix}。$$

注意到 $\det C \neq 0$，矩阵 C 的逆矩阵 C^{-1} 存在，通过仔细数值计算可得

$$C^{-1}=\begin{pmatrix} 1465.2015 & -402.9304 & 183.1502 \\ 40.29304 & 527.4725 & 109.8901 \\ 183.1502 & -109.8901 & 235.47881 \end{pmatrix}。$$

注意到

$$\mu=(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=(0.7\%,0.8\%,1\%),$$

$$\tau=(1,1,1)，\quad r=0.5\%，$$

因此 $\mu-r\tau=(0.002,0.003,0.005)$，故

$$(\mu-r\tau)C^{-1}=(0.002,0.003,0.005)\begin{pmatrix} 1465.2015 & -402.9304 & 183.1502 \\ -402.9304 & 527.4725 & -109.8901 \\ 183.1502 & -109.8901 & 235.47881 \end{pmatrix}=(2.6374,0.2271,1.214),$$

$$(\mu-r\tau)C^{-1}\tau^{\mathrm{T}}=(2.6371,0.2271,1.214)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=4.0782。$$

于是，由引理 5 可知，

$$\omega_M=\frac{(\mu-r\tau)C^{-1}}{(\mu-r\tau)C^{-1}\tau^{\mathrm{T}}}=\frac{(2.6371,0.2271,1.214)}{4.0782}=(0.647,0.056,0.297),$$

因此对应于权重 ω_M 的资产组合的月期望收益及风险分别为

$$\mu_M=\omega_M\mu^{\mathrm{T}}=(0.647,0.056,0.297)\begin{pmatrix}0.007\\0.008\\0.01\end{pmatrix}=0.7899\%,$$

$$\sigma_M^2=\omega_M C\omega_M^{\mathrm{T}}=(0.647,0.056,0.297)\begin{pmatrix} 0.0009 & 0.0006 & -0.00042 \\ 0.0006 & 0.0025 & 0.0007 \\ -0.00042 & 0.0007 & 0.0049 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.647\\0.056\\0.297\end{pmatrix}=0.00072216。$$

故 $\sigma_M=\sqrt{\omega_M C\omega^{\mathrm{T}}}=\sqrt{0.00072216}=2.687\%$。

由于该员工能够承担月收益风险为 2%，他在制定养老金计划时，需考虑在能够承担金融风险同时，期望获得更好收益回报，为此他需要计算出投资在风险资产组合资金与无风险养老金账户资金的占比(权重)。根据引理 5，他投资于风险资产组合资金权重 ω_1 满足方程 $0.02687\ \omega_1=2\%$，即 $\omega_1=74.4\%$，投资养老金账户资金(无风险)权重为

$$\omega_2=1-\omega_1=25.6\%。$$

此时他通过这种“混合投资”获得的月期望收益为

$$\mu=(0.744,0.256)\begin{pmatrix}0.007899\\0.005\end{pmatrix}=0.72\%\text{。}$$

将策略 1 中工资支付比例公式里的无风险利率 r 换成月期望收益率 μ，得到第二种养老金策略的工资支付比例公式为

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1+g}{1+\mu}\right)^{480}\frac{1}{1+\left(\frac{1+g}{1+\mu}\right)^{240}},$$

于是策略 2 得证。

从策略 2 的条件知，该员工每月工资增长率及退休后每月养老金增长率为 $g=0.2\%$，他承担的月收益风险金融风险 $\sigma=2\%$，此时对应“混合投资”的月期望收益为 $\mu=0.72\%$，由上述工资支付比例公式知

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1.002}{1.0072}\right)^{480}\frac{1}{1+\left(\frac{1.002}{1.0072}\right)^{240}}=3.23\%\text{。}$$

考虑到不同群体因收入差异导致自己承担金融风险能力不同，因此在制定自己养老金计划时，每个人投资在风险资产组合资金与无风险养老金账户资金的占比(权重)各不相同，这就导致每个人的月期望收益不一样，从而每个人月工资支付比例也不同。假设工资月增长率(也是养老金月增长率) $g=0.2\%$ 保持不变，月收益标准差(能够承担的金融风险) σ 分别 1.5%、2.5%时，按照上面相同的计算方法，可知投资于无风险资产的资金(养老金账户资金)权重 ω 分别为 44.2%、16.3%。对应“混合投资”月期望收益 μ 分别为 0.67%、0.74%，通过公式(2)可以简单算出每月支付工资比例 x 分别为 3.99%、2.97%。

从上面量化分析可知，每个人能够承担的金融风险 σ 不同，他投资于无风险资产(养老金账户资金)占比 ω 各不相同，月期望收益 μ 也不同，从而导致他每个月工资支付比例 x 也不同。根据金融风险 σ 不同取值，得到 ω、μ、x 相应的取值，见表 2。

Table 2. Optimal monthly salary allocation to pension under a risky portfolio strategy
表 2. 有风险投资组合策略下每月投资养老金的工资比例

承担金融风险 σ	无风险投资占比 ω	月期望收益 r	月工资比例 x
0	100%	0.5%	8.00%
1.5%	44.2%	0.67%	3.99%
2%	25.6%	0.72%	3.32%
2.5%	16.3%	0.74%	2.97%

从表 2 可以看出，该员工每月投资养老金的工资比例 x 的值强烈地依赖于他的金融风险承受能力。当金融风险承受能力逐渐变大时，他投资到养老金账户资金(无风险)占比逐步减小(这意味着投资到风险资产组合中资金占比逐步变大)，月期望收益逐步变大，从而每个月支付的养老金在工资中占比逐步降低。

值得注意的是，在对策略 2 进行量化分析时发现，3 支股票构成的风险资产组合中每支股票所占权重 $\omega_M=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ 与协方差矩阵 C 的逆矩阵 C^{-1} 密切相关，由于协方差矩阵的元素与这 3 支股票的相关

系数及标准差有关，因此 3 支股票所占权重 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 可能出现负数，即出现卖空行为。但是作为一个小的投资者，他没有卖空能力，这就需要限制他的资产组合只能选择具有非负权重资产。考虑到 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=1$，这就出现以下 3 种情况：

(1) 若 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 中，三个均为正数。这在上文中已讨论。

(2) 若 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 中，有一个是负数。不妨设 $\omega_1<0$，则去掉 ω_1 对应股票，由剩下两支股票组成一个资产组合，由引理 3，算出这个资产组合的最小标准差 σ_M 及对应权重权重 ω_M，然后根据他能够承担的金融风险，重复策略 2 最后的量化分析步骤，可得表 2 中 μ,ω,x 的值。

(3) 若 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 中，有两个是负数。不妨设 $\omega_1<0$， $\omega_2<0$，则去掉 ω_1,ω_2 对应股票，他只能选择第三支股票。此时 $\sigma_M=\sigma_3$ 且 $\omega_M=1$，根据投资者能够承担的金融风险，可得表 2 中 μ,ω,x 的值。

最后需要说明的是，当文中提到的资产组合中风险资产个数 n 较大时，比如说 $n>3$，若风险资产对应权重 $\omega_M=\left(\omega_1,\cdots,\omega_n\right)$ 出现负数(卖空情形)时，没有一般的权重解析公式。需要利用专业软件进行数值求解，才能解决相应问题。

5. 结论与应用建议

基于以上量化分析，两种投资策略均可实现养老金目标。针对无风险定期储蓄情形，策略 1 适用于希望养老金投资稳定的人群，投资者每月投资于养老金的工资比例强烈地依赖于定期储蓄月利率与养老金月增长率的差值，当二者差值固定时，工资支付比例值保持相对稳定；针对定期储蓄与风险资产构成的有风险投资组合情形，策略 2 通过风险资产降低了储蓄比例，投资者每月支付养老金的工资比例与其能承担的金融风险能力密切相关。随着风险的增加，月工资支付比例显著降低，例如，当风险为 2.5%时，月工资支付比例仅为 2.97%，但该策略需承担年化 6.93%的收益波动，适合于具有中等风险承受能力的投资者。

未来的研究中，可进一步纳入通胀调整与税收因素，提升模型的现实适用性，也可研究延迟退休、兼职收入等对养老金计划的影响。

参考文献

[1] 中华人民共和国民政部. 民政部、全国老龄办发布《2024 年度国家老龄事业发展公报》[EB/OL]. 2025-07-25. https://www.mca.gov.cn/n152/n166/c1662004999980006135/content.html, 2025-12-12.

[2] 李娜, 刘伟. 跳扩散模型下带违约风险的 DC 型养老金最优投资策略[J]. 应用概率统计, 2024, 40(5): 725-740.

[3] 邵艳宇, 夏登峰, 费为银, 等. 混合随机波动模型下带随机工资的 DC 型养老金最优投资策略[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2024, 50(1): 145-151.

[4] 曾向阳, 刘伟, 胡亦钧. 基于 Hurwicz 准则的不确定养老金最优投资策略问题[J]. 应用数学, 2023, 36(1): 265-276.

[5] 吴岚, 黄海. 金融数学引论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2005.

[6] 何书元. 随机过程[M]. 北京: 北京大学出版社, 2008.

[7] 马克雷·凯宾斯基, 托马斯·札斯特温尼克. 金融数学——金融工程引论[M]. 北京: 中国人民大学出版社, 2004.